第 56 卷 第 4 期 2007 年 4 月
1000-3290/2007/56(04)/1843-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.56, No.4, April, 2007


# 强非线性发展方程孤波近似解*

莫嘉琪[1)†]　张伟江[2)]　何　铭[2)]

1)(安徽师范大学数学系,芜湖　241000)

2)(上海交通大学数学系,上海　200240)

(2006 年 1 月 23 日收到;2006 年 10 月 31 日收到修改稿)

研究了一个强非线性发展方程.利用变分原理,首先构造了相应的泛函.选取 Lagrange 乘子,再用广义变分迭代方法得到了孤波的任意次精度的近似解.

关键词:发展方程,非线性,孤立子,近似方法

PACC:0230,0200

## 1. 引　言

探讨非线性发展方程的解是非线性孤立子定性、定量理论中的一个很重要的研究课题.目前提出了许多方法,例如双曲正切函数法[1]、齐次平衡法[2]、Jacobi 椭圆函数展开法[3]、辅助方程法[4]等.本文利用广义变分迭代方法[5]研究一类强非线性发展方程孤波的近似解析解.

近来,许多学者研究了非线性问题的近似理论[6—15].近似方法不断被发展和优化,包括平均法、边界层法、匹配渐近展开法和多重尺度法等.文献[16—28]也利用奇摄动等方法来研究一类反应扩散问题、大气物理问题、生态环境问题、流行性传染病问题、激波问题和激光脉冲问题等.本文利用变分原理,首先构造一个特殊的泛函,然后进行变分计算,并作最优化处理,最后构造出一个广义迭代关系式,由此便可得到一个收敛序列,从而得到相应强非线性发展方程孤波的任意次精度的近似解.

## 2. 强非线性发展方程与广义变分迭代方法

考虑如下 5 次非线性发展方程[29]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + pu + qu^3 + ru^5 = 0, \tag{1}$$

其中系数 $k$, $p$, $q$ 和 $r$ 为正常数.设方程(1)具有右行波孤子解 $v(x-\omega t)$,作变换

$$\xi = x - \omega t,$$

则方程(1)化为

$$(\omega^2 - k)\frac{d^2 v}{d\xi^2} + pv + qv^3 + rv^5 = 0. \tag{2}$$

对应于方程(2)的线性方程为

$$(\omega^2 - k)\frac{d^2 v}{d\xi^2} + pv = 0. \tag{3}$$

方程(3)的解为

$$v_0(\xi) = D_1\cos\left(\sqrt{\frac{p}{\omega^2-k}}\xi\right) + D_2\sin\left(\sqrt{\frac{p}{\omega^2-k}}\xi\right), \tag{4}$$

其中 $D_i(i=1,2)$为任意常数.

为了得到方程(2)的近似解,我们使用广义变分迭代理论[5].为此引入泛函 $F[v]$,

$$F[v] = v - \int_0^\xi \lambda\left[(\omega^2-k)\frac{d^2 v}{d\zeta^2} + pv + q\bar{v}^3 + r\bar{v}^5\right]d\zeta, \tag{5}$$

其中 $\bar{v}$ 为 $v$ 的限制变量[5],$\lambda$ 为对应的 Lagrange 乘子.

泛函(3)式的变分 $\delta F$ 为

$$\delta F = \delta v - (\omega^2-k)[(\lambda\delta v')|_{\zeta=\xi} - (\lambda'\delta v)|_{\zeta=\xi}] - \int_0^\xi\left[(\omega^2-k)\frac{\partial^2\lambda}{\partial\zeta^2} + p\lambda\right]\delta v\, d\zeta.$$

* 国家自然科学基金(批准号:40676016,10471039)、国家重点基础研究发展规划(批准号:2003CB415101-03,2004CB418304)、中国科学院知识创新工程方向性项目(批准号:KZCX3-SW-221)和上海市教育委员会科研计划(批准号:NE03004)资助的课题.

† E-mail:mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn

取 $\delta F=0$,可得

$$\frac{\mathrm{d}^2\lambda}{\mathrm{d}\zeta^2}=-\frac{p}{\omega^2-k}\lambda \qquad (0<\zeta<\xi)$$

及

$$\lambda(\xi)=0,$$
$$\lambda'(\xi)=-\frac{1}{\omega^2-k}.$$

于是

$$\lambda=-\sqrt{\frac{1}{p(\omega^2-k)}}\sin\left(\sqrt{\frac{p}{\omega^2-k}}(\xi-\zeta)\right).$$

由(5)式,我们构造如下广义变分迭代:

$$\begin{aligned}v_{n+1}=v_n&-\sqrt{\frac{1}{p(\omega^2-k)}}\\&\times\int_0^\xi\left[\sin\left(\sqrt{\frac{p}{\omega^2-k}}(\xi-\zeta)\right)\right]\\&\times\left[\frac{\mathrm{d}v_n}{\mathrm{d}\zeta}+pv_n+qv_n^3+rv_n^5\right]\mathrm{d}\zeta,\end{aligned}\qquad(6)$$

由迭代关系式(6),可得到序列 $\{v_n\}$.设

$$v(\xi)=\lim_{n\to\infty}v_n(\xi),$$

这时 $v(x-\omega t)$就是强非线性发展方程(1)的孤波解.

## 3. 孤波近似解的计算

取迭代关系式(6)的零次迭代为强非线性方程(2)相应的线性方程(3)的解(4)式.再由(6)式可得方程(2)的一次近似 $v_1(\xi)$,

$$\begin{aligned}v_1(\xi)&=v_0(\xi)+\sqrt{\frac{1}{p(\omega^2-k)}}\\&\quad\times\int_0^\xi\left[\sin\left(\sqrt{\frac{p}{\omega^2-k}}(\xi-\zeta)\right)\right]\\&\quad\times[q(v_0(\zeta))^3+r(v_0(\zeta))^5]\mathrm{d}\zeta\\&=D_1\cos\left(\sqrt{\frac{p}{\omega^2-k}}\xi\right)+D_2\sin\left(\sqrt{\frac{p}{\omega^2-k}}\xi\right)\\&\quad+\sqrt{\frac{1}{p(\omega^2-k)}}\int_0^\xi\left[\sin\left(\sqrt{\frac{p}{\omega^2-k}}(\xi-\zeta)\right)\right]\\&\quad\times\left[q\left[D_1\cos\left(\sqrt{\frac{p}{\omega^2-k}}\zeta\right)\right.\right.\\&\quad\left.+D_2\sin\left(\sqrt{\frac{p}{\omega^2-k}}\zeta\right)\right]^3+r\left[D_1\cos\left(\sqrt{\frac{p}{\omega^2-k}}\zeta\right)\right.\\&\quad\left.\left.+D_2\sin\left(\sqrt{\frac{p}{\omega^2-k}}\zeta\right)\right]^5\right]\mathrm{d}\zeta\\&=D_1\cos\left(\sqrt{\frac{p}{\omega^2-k}}\xi\right)+D_2\sin\left(\sqrt{\frac{p}{\omega^2-k}}\xi\right)\\&\quad+\sqrt{\frac{q^2}{p(\omega^2-k)}}\sum_{s=0}^{3}D_1^sD_2^{3-s}C_3^s\\&\quad\times\int_0^\xi\left(\sin\left(\sqrt{\frac{p}{\omega^2-k}}(\xi-\zeta)\right)\right)\\&\quad\times\left(\cos\left(\sqrt{\frac{p}{\omega^2-k}}\zeta\right)\right)^s\left(\sin\left(\sqrt{\frac{p}{\omega^2-k}}\zeta\right)\right)^{3-s}\mathrm{d}\zeta\\&\quad+\sqrt{\frac{r^2}{p(\omega^2-k)}}\sum_{s=0}^{5}D_1^sD_2^{5-s}C_5^s\\&\quad\times\int_0^\xi\left(\sin\left(\sqrt{\frac{p}{\omega^2-k}}(\xi-\zeta)\right)\right)\\&\quad\times\left(\cos\left(\sqrt{\frac{p}{\omega^2-k}}\zeta\right)\right)^s\left(\sin\left(\sqrt{\frac{p}{\omega^2-k}}\zeta\right)\right)^{5-s}\mathrm{d}\zeta,\end{aligned}$$

其中 $C_3^s$,$C_5^s$ 为组合数.因此强非线性发展方程(1)的右行波孤子解的一次近似为

$$\begin{aligned}u(x,t)&=D_1\cos\left(\sqrt{\frac{p}{\omega^2-k}}(x-at)\right)\\&\quad+D_2\sin\left(\sqrt{\frac{p}{\omega^2-k}}(x-at)\right)\\&\quad+\sqrt{\frac{q^2}{p(\omega^2-k)}}\sum_{s=0}^{3}D_1^sD_2^{3-s}C_3^sE_s(x,t)\\&\quad+\sqrt{\frac{r^2}{p(\omega^2-k)}}\sum_{s=0}^{5}D_1^sD_2^{5-s}C_5^sF_s(x,t),\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}E_s(x,t)&=\int_0^{x-at\xi}\left(\sin\left(\sqrt{\frac{p}{\omega^2-k}}(\xi-\zeta)\right)\right)\\&\quad\times\left(\cos\left(\sqrt{\frac{p}{\omega^2-k}}\zeta\right)\right)^s\\&\quad\times\left(\sin\left(\sqrt{\frac{p}{\omega^2-k}}\zeta\right)\right)^{3-s}\mathrm{d}\zeta,\\F_s(x,t)&=\int_0^{x-at\xi}\left(\sin\left(\sqrt{\frac{p}{\omega^2-k}}(\xi-\zeta)\right)\right)\\&\quad\times\left(\cos\left(\sqrt{\frac{p}{\omega^2-k}}\zeta\right)\right)^s\\&\quad\times\left(\sin\left(\sqrt{\frac{p}{\omega^2-k}}\zeta\right)\right)^{5-s}\mathrm{d}\zeta.\end{aligned}$$

用同样的方法,能得到强非线性发展方程(1)右行波孤子解的更高次近似.

## 4. 结 论

由非线性方程(1),(2)及泛函(3)式的构造,可以

证明用广义变分迭代式(6)得到的序列 $\{v_n\}$ 在所研究的范围内均是一致收敛的，故 $v(\xi)=\lim_{n\to\infty} v_n(\xi)$ 为方程(2)的解．从而，强非线性发展方程(1)具有形如 $u(x,t)=v(x-\omega t)$ 的右行波孤立子解．这提供了一个构造任意次精度的孤波近似解的方法．由于采用了变分原理，合理地选定了 Lagrange 乘子 $\lambda$，保证了相应序列的收敛速度．


[1] Parkes E J，Duffy B R 1996 *Comp*. *Phys*. *Commun*. **98** 288

[2] Wang M L 1995 *Phys*. *Lett*. A **199** 169

[3] Parkes E J，Duffy B R，Abbott P C 2001 *Phys*. *Lett*. A **295** 280

[4] Sirendaoreji，Sun J 2003 *Phys*. *Lett*. A **309** 387

[5] He J H 2002 *Approximate Nonlinear Analytical Methods in Engineering and Sciences* (Zhengzhou：Henan Science and Technology Press)(in Chinese)[何吉欢 2002 工程和科学计算中的近似非线性分析方法(郑州：河南科学技术出版社)]

[6] Pan L X，Yan J R，Zhou C H 2001 *Chin*. *Phys*. **10** 594

[7] Gao X，Yu J B 2005 *Chin*. *Phys*. **14** 908

[8] Huang L，Bao G W，Liu Y Z 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 2457 (in Chinese)[黄　磊、包光伟、刘延柱 2005 物理学报 **54** 2457]

[9] Han X L 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 4061 (in Chinese)[韩祥临 2004 物理学报 **53** 4061]

[10] Ouyang C 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 1900 (in Chinese)[欧阳成 2004 物理学报 **53** 1900]

[11] Han X L 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 2590 (in Chinese)[韩祥临 2005 物理学报 **54** 2590]

[12] Wu Q K 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 2510 (in Chinese)[吴钦宽 2005 物理学报 **54** 2510]

[13] Hwangm S 2004 *J*. *Diff*. *Eqns*. **200** 191

[14] Chen X F 2004 *J*. *Diff*. *Eqns*. **206** 399

[15] Doelman A，Iron D，Nishiura Y 2004 *SIAM J*. *Math*. *Anal*. **35** 1420

[16] Mo J Q，Zhu J，Wang H 2003 *Prog*. *Nat*. *Sci*. **13** 768

[17] Mo J Q，Lin W T，Zhu J 2004 *Prog*. *Nat*. *Sci*. **14** 550

[18] Mo J Q，Lin W T，Zhu J 2004 *Prog*. *Nat*. *Sci*. **14** 1126

[19] Mo J Q，Lin W T 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 996 (in Chinese)[莫嘉琪、林万涛 2004 物理学报 **53** 996]

[20] Mo J Q，Lin W T 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 3245 (in Chinese)[莫嘉琪、林万涛 2004 物理学报 **53** 3245]

[21] Mo J Q，Lin W T 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 993 (in Chinese)[莫嘉琪、林万涛 2005 物理学报 **54** 993]

[22] Mo J Q，Lin W T 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 1081 (in Chinese)[莫嘉琪、林万涛 2005 物理学报 **54** 1081]

[23] Mo J Q，Lin W T，Wang H 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 3967 (in Chinese)[莫嘉琪、林万涛、王　辉 2005 物理学报 **54** 3967]

[24] Mo J Q，Lin Y H，Lin W T 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 3971 (in Chinese)[莫嘉琪、林一骅、林万涛 2005 物理学报 **54** 3971]

[25] Mo J Q，Wang H，Lin W T 2006 *Acta Phys*. *Sin*. **55** 485 (in Chinese)[莫嘉琪、王　辉、林万涛 2006 物理学报 **55** 485]

[26] Mo J Q，Lin W T 2005 *Chin*. *Phys*. **14** 875

[27] Mo J Q，Lin Y H，Wang H 2005 *Chin*. *Phys*. **14** 2387

[28] Mo J Q，Wang H，Lin W T *et al* 2006 *Acta Phys*. *Sin*. **55** 6 (in Chinese)[莫嘉琪、王　辉、林万涛等 2006 物理学报 **55** 6]

[29] Taogetusang，Sirendaoerji 2006 *Acta Phys*. *Sin*. **55** 13 (in Chinese)[套格图桑、斯仁道尔吉 2006 物理学报 **55** 13]

# The solitary wave approximate solution of strongly nonlinear evolution equations*

Mo Jia-Qi[1)†] Zhang Wei-Jiang[2)] He Ming[2)]

1)(*Department of Mathematics, Anhui Normal University, Wuhu 241000, China*)

2)(*Department of Mathematics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, China*)

(Received 23 January 2006; revised manuscript received 31 October 2006)

Abstract

A strongly nonlinear evolution equation is studied. Using the variational principle, firstly, the corresponding functional is constructed. Next, its Lagrange operator is selected; and then, using the generalized variational iteration method, the approximate solution of arbitrary degree of accuracy for the solitary wave is obtained.

**Keywords**: evolution equation, nonlinear, soliton, approximate method

**PACC**: 0230, 0200

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 40676016, 10471039), the State Key Development Program for Basic Research of China (Grant Nos. 2003CB415101-03, 2004CB418304), the Direction Program of the Knowledge Innovation of Chinese Academy of Sciences (Grant No. KZCX3-SW-221) and the Scientific Research Program from the Education Committee of Shanghai, China (Grant No. NE03004).

† E-mail: mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn