第 56 卷 第 4 期 2007 年 4 月
1000-3290/2007/56(04)/1847-04
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.56,No.4,April,2007

非线性广义 Landau-Ginzburg-Higgs 方程孤子解的变分迭代解法*

莫嘉琪[1)†]　张伟江[2)]　何　铭[2)]

1)(安徽师范大学数学系,芜湖　241000)

2)(上海交通大学数学系,上海　200240)

(2006 年 7 月 28 日收到;2006 年 10 月 31 日收到修改稿)

利用扰动方法研究了一类非线性广义 Landau-Ginzburg-Higgs 方程.首先引入一个泛函,计算它的变分,求得 Lagrange 乘子.然后构造了原方程解的迭代关系式,得到了近似解.

关键词:孤子,扰动,变分迭代

PACC:0230,0545

1. 引　　言

孤子理论存在于物理学、力学和其他自然科学领域的应用中,是当前国际学术界十分关注的一个研究对象.近来,许多学者在激波[1—3]、光波散射[4]、量子力学[5]、大气物理[6—9]、神经网络[10]、爆炸与燃烧[11]等方面都作了一些研究.非线性孤子理论的各种定量和定性方法也大量涌现.孤子扰动理论渐近方法的要点是用扰动理论的渐近展开式将非线性孤子方程转化为易求解的方程来求解,这类理论完全摆脱了对逆散射变换所依赖的直接方法.本文使用的变分迭代方法就是属于这一类方法.其优点在于思路直接简明、计算简单、可得到较高近似度的解,且求得的扰动解保留了解析特性,因而不但能对得到的结果直接进行定量分析,而且还能进一步进行更深入的定性解析分析.此外,本方法还可适用于其他非线性问题,具有较广阔的研究前景.

作者和一些学者利用微分不等式、同伦映射、不动点原理等方法也研究了一系列非线性孤子及相关的问题[11—25].本文利用变分迭代方法研究了一类广义 Landau-Ginzburg-Higgs(LGH)扰动方程.近来,典型的 LGH 方程已有所研究[26,27],它代表的是各类相应自然现象的高度精简和浓缩.为进一步满足当前科学发展的需要,有必要研究更能代表真实自然现象的广义 LHG 扰动方程.本文就是在这样的背景下提出来的.

2. 变分迭代方法和方程孤子解的近似式

讨论如下一类广义 LGH 扰动方程:

$$u_{tt}-u_{xx}-m^2u+k^2u^3=f(u,u_x,u_t),\qquad(1)$$

其中 m,k 为正参数,f 为扰动项,设它是关于其变量为充分光滑的函数.

作自变量的变换

$$\begin{aligned}\xi&=x+t,\\ \eta&=x-t.\end{aligned}\qquad(2)$$

这时方程(1)为

$$-4u_{\xi\eta}-m^2u+k^2u^3=F(u,u_\xi,u_\eta),\qquad(3)$$

其中

$$F(u,u_\xi,u_\eta)\equiv f(u,u_x,u_t).$$

为了得到方程(3)的近似解,引入一个泛函[28]

$$F[u]=u-\int_0^\xi\int_0^\eta[\lambda(\xi_1,\eta_1)]\Big[-4\frac{\partial^2u}{\partial\xi_1\partial\eta_1}-m^2\bar{u}+k^2\bar{u}^3-F(\bar{u},\bar{u}_{\xi_1},\bar{u}_{\eta_1})\Big]\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\eta_1,\qquad(4)$$

* 国家自然科学基金(批准号:40676016,10471039)、国家重点基础研究发展规划(批准号:2003CB415101-03,2004CB418304)、中国科学院知识创新工程方向性项目(批准号:KZCX3-SW-221)和上海市教育委员会科研计划(批准号:NE03004)资助的课题.

† E-mail:mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn

其中 $\bar{u},\bar{u}_{\xi_1},\bar{u}_{\eta_1}$ 分别为 u,u_{ξ_1},u_{η_1} 的限制变量[28]，λ 为对应的 Lagrange 乘子.

计算泛函(4)式的变分 δF，并考虑到参量的变分为零，故有

$$\delta F=\delta u+4(\lambda\delta u_{\eta_1})|_{\xi_1=\xi}-4(\lambda_{\xi_1}\delta u)|_{\eta_1=\eta}+4\int_0^{\xi}\int_0^{\eta}\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial\xi_1\partial\eta_1}\right)\delta u\,\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\eta_1 . \tag{5}$$

令 $\delta F=0$. 于是有

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial\xi_1\partial\eta_1}=0$$

及

$$\lambda(\xi_1,\eta_1)|_{\xi_1=\xi}=0,$$

$$\lambda_{\xi_1}(\xi_1,\eta_1)|_{\eta_1=\eta}=\frac{1}{4}.$$

由此可得

$$\lambda(\xi_1,\eta_1)=\frac{1}{4}(\xi_1-\xi). \tag{6}$$

由(4)—(6)式，我们可构造如下广义变分迭代：

$$u_{n+1}=u_n-\frac{1}{4}\int_0^{\xi}\int_0^{\eta}(\xi_1-\xi)\left[-4\frac{\partial^2u_n}{\partial\xi_1\partial\eta_1}-2m^2u_n+2k^2u_n^3-2F(u_n,(u_n)_{\xi_1},(u_n)_{\eta_1})\right]\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\eta_1 .$$

再由变换(2)式，上式便成为

$$u_{n+1}(x,t)=u_n(x,t)-\frac{1}{4}\int_0^{x+t}\int_0^{x-t}(z-x)\times\left[\frac{\partial^2u_n}{\partial z^2}-\frac{\partial^2u_n}{\partial\tau^2}-m^2u_n+k^2u_n^3-f(u_n,(u_n)_z,(u_n)_\tau)\right]\mathrm{d}z\mathrm{d}\tau . \tag{7}$$

由迭代关系式(7)，可得到序列 $\{u_n(x,t)\}$，设

$$u(x,t)=\lim_{n\to\infty}u_n(x,t).$$

这时 $u(x,t)$ 就是广义 LGH 扰动方程的解.

为了从(7)式出发得到广义 LGH 扰动方程(1)孤子解的近似表达式，取对应于广义 LGH 方程(1)的非扰动方程

$$u_{tt}-u_{xx}-m^2u+k^2u^3=0 \tag{8}$$

的孤子解 $u_0(x,t)$ 作为扰动方程的零次近似. 由文献[23]知，方程(8)具有如下单孤子解：

$$u_0(x,t)=\frac{m}{k}\tanh\frac{m}{\sqrt{2(1-\beta^2)}}\times(x-x_0+\beta t), \tag{9}$$

其中 $x_0,\beta(\beta^2<1)$ 为任意常数，它们可由 LGH 扰动问题的具体条件来确定. 将(9)式代入(7)式，分别得到广义 LGH 扰动方程(1)孤子解的一次、二次近似，

$$u_1(x,t)=\frac{m}{k}\tanh\frac{m}{\sqrt{2(1-\beta^2)}}(x-x_0+\beta t)-\frac{1}{4}\int_0^{x+t}\int_0^{x-t}(z-x)\times[f(u_0,(u_0)_z,(u_0)_\tau)]\mathrm{d}z\mathrm{d}\tau,$$

$$\begin{aligned}u_2(x,t)={}&\frac{m}{k}\tanh\frac{m}{\sqrt{2(1-\beta^2)}}(x-x_0+\beta t)+v_0-\frac{1}{4}\int_0^{x+t}\int_0^{x-t}(z-x)\\&\times\Big[\left(\frac{\partial^2v_0}{\partial z^2}-\frac{\partial^2v_0}{\partial\tau^2}-m^2v_0\right)+k^2((u_0+v_0)^3-u_0^3)\\&-f(u_0+v_0,(u_0+v_0)_z,(u_0+v_0)_\tau)\Big]\mathrm{d}z\mathrm{d}\tau,\end{aligned}$$

其中

$$u_0(x,t)=\frac{m}{k}\tanh\frac{m}{\sqrt{2(1-\beta^2)}}(x-x_0+\beta t),$$

$$v_0=-\frac{1}{4}\int_0^{x+t}\int_0^{x-t}(z-x)\times[f(u_0,(u_0)_z,(u_0)_\tau)]\mathrm{d}z\mathrm{d}\tau .$$

用同样的迭代方法，可以得到广义 LGH 扰动方程(1)孤子解的更高次近似.

3. 微扰孤子解

若在广义 LGH 扰动方程(1)中的扰动项是微扰的，即 $f=\varepsilon g(u)$，其中 ε 为正的小参数. 这时相应的微扰方程为

$$u_{tt}-u_{xx}-m^2u+k^2u^3=\varepsilon g(u)\quad(0<\varepsilon\ll1), \tag{10}$$

由以上计算，不难得到 LGH 微扰方程(10)的孤子扰动解 $u(x,t,\varepsilon)$ 的零次、一次、二次近似，

$$u_0(x,t)=\frac{m}{k}\tanh\frac{m}{\sqrt{2(1-\beta^2)}}(x-x_0+\beta t),$$

$$\begin{aligned}u_1(x,t,\varepsilon)={}&\frac{m}{k}\tanh\frac{m}{\sqrt{2(1-\beta^2)}}(x-x_0+\beta t)-\frac{\varepsilon}{4}\int_0^{x+t}\int_0^{x-t}(z-x)\\&\times\left[g\left(\frac{m}{k}\tanh\frac{m}{\sqrt{2(1-\beta^2)}}\times(z-x_0+\beta\tau)\right)\right]\mathrm{d}z\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

$$(0<\varepsilon\ll1),$$

$$u_2(x,t,\varepsilon) = \frac{m}{k}\tanh\frac{m}{\sqrt{2(1-\beta^2)}}\times(x-x_0+\beta t)+\varepsilon w_0 - \frac{1}{4}\int_0^{x+t}\int_0^{x-t}(z-x)\times\left[\varepsilon\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 w_0}{\partial \tau^2}-m^2 w_0\right)+k^2\left((u_0+\varepsilon w_0)^3-u_0^3\right)-\varepsilon g(u_0+\varepsilon w_0)\right]\mathrm{d}z\mathrm{d}\tau \quad (0<\varepsilon\ll 1),$$

其中

$$w_0 = -\frac{1}{4}\int_0^{x+t}\int_0^{x-t}(z-x)\times g\left(\frac{m}{k}\tanh\frac{m}{\sqrt{2(1-\beta^2)}}(z-x_0+\beta\tau)\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}\tau.$$

4. 结　论

1) 由 LGH 广义扰动方程(1)的左端项的结构及其扰动项 f 关于其变元的性态以及由本文引入的变分迭代关系式的解析性,可以证明由迭代式(7)所决定的函数序列 $\{u_n\}$ 是一致收敛的,从而其极限函数就是原方程(1)的解.

2) 用广义变分迭代方法,引入 Lagrange 乘子并求其形式,以保证得到'最佳'逼近的迭代序列.同时本文选取的初始近似 $u_0(x,t)$ 是采用非扰动情形下的典型 LGH 方程的孤子解(8)式.它保证了对应于扰动情形下的 LGH 方程较快地求得在要求的精度范围内的近似解,特别是对微扰方程(10),从而能快速而有效地得到孤子解的渐近解.这更接近模型的真实现象,所以所得的结果更加实用、简捷.

3) 广义变分迭代方法是一个近似的解析方法,它不同于一般的数值方法和模拟方法.用广义变分迭代方法得到的解的表达式能够继续进行解析运算.由相应的近似解的表达式,还能够用微分、积分等手段来进一步研究方程解各种定性和定量方面的性态.

[1] McPhaden M J, Zhang D 2002 *Nature* **415** 603

[2] Gu D F, Philander S G H 1997 *Science* **275** 805

[3] Liu S K, Fu Z T, Liu S D *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 10 (in Chinese) [刘式适、付遵涛、刘式达等 2002 物理学报 **51** 10]

[4] Pan L X, Zuo W M, Yan J R 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1 (in Chinese) [潘留仙、左伟明、颜家壬 2005 物理学报 **54** 1]

[5] Pan L X, Liu J L, Li S S *et al* 2002 *Sci. China* A **32** 556 (in Chinese) [潘留仙、刘金龙、李树深等 2002 中国科学 A **32** 556]

[6] Feng G L, Dong W J, Jia X J *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1181 (in Chinese) [封国林、董文杰、贾晓静等 2002 物理学报 **51** 1181]

[7] Feng G L, Dai X G, Wang A H *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 606 (in Chinese) [封国林、戴新刚、王爱慧等 2001 物理学报 **50** 606]

[8] Lin W T, Ji Z Z, Wang B 2002 *Prog. Nat. Sci.* **12** 102 (in Chinese) [林万涛、季仲贞、王　斌 2002 自然科学进展 **12** 102]

[9] Wang L S, Xu D Y 2003 *Sci. China* E **32** 488 (in Chinese) [王林山、徐道义 2003 中国科学 E **32** 488]

[10] Wu J F, Ye W H, Zhang W Y *et al* 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1688 (in Chinese) [吴俊峰、叶文华、张维岩等 2003 物理学报 **52** 1668]

[11] Lin W T, Mo J Q 2004 *Chin. Sci. Bull.* **48** (Supp Ⅱ) 5

[12] Mo J Q, Lin W T, Zhu J 2004 *Prog. Nat. Sci.* **14** 550

[13] Mo J Q, Lin W T 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 996 (in Chinese) [莫嘉琪、林万涛 2004 物理学报 **53** 996]

[14] Mo J Q, Lin W T 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3245 (in Chinese) [莫嘉琪、林万涛 2004 物理学报 **53** 3245]

[15] Mo J Q, Lin W T 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 993 (in Chinese) [莫嘉琪、林万涛 2005 物理学报 **54** 993]

[16] Mo J Q, Lin W T 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1081 (in Chinese) [莫嘉琪、林万涛 2005 物理学报 **54** 1081]

[17] Mo J Q, Lin W T 2005 *Chin. Phys.* **14** 875

[18] Mo J Q, Wang H, Lin W T *et al* 2006 *Chin. Phys.* **15** 641

[19] Mo J Q, Wang H, Lin W T 2006 *Chin. Phys.* **15** 1450

[20] Mo J Q, Lin W T, Zhu J 2004 *Prog. Nat. Sci.* **14** 1126

[21] Wu Q K 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2510 (in Chinese) [吴钦宽 2005 物理学报 **54** 2510]

[22] Wu Q K 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1561 (in Chinese) [吴钦宽 2005 物理学报 **54** 1561]

[23] Han X L 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 4061 (in Chinese) [韩祥临 2004 物理学报 **53** 4061]

[24] Ouyang C 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1900 (in Chinese) [欧阳成 2004 物理学报 **53** 1900]

[25] Huang N N 1996 *Theory of Solitons and Method of Perturbations* (Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) (in Chinese) [黄念宁 1996 谷子理论和扰动

方法(上海:上海科技教育出版社)]

[26] Pan L X, Yan J R, Zhou G H 2001 *Chin. Phys.* **10** 594

[27] Fan E G, Zhang H Q 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 1245 (in Chinese) [范恩贵、张鸿庆 1997 物理学报 **46** 1245]

[28] He J H 2002 *Approximate Nonlinear Analytical Methods in Engineering and Sciences* (Zhengzhou: Henan Science and Technology Press) (in Chinese) [何吉欢 2002 工程和科学计算中的近似非线性分析方法 (郑州:河南科学技术出版社)]

The variational iteration method for the soliton solution of nonlinear generalized Landau-Ginzburg-Higgs equation*

Mo Jia-Qi[1)†] Zhang Wei-Jiang[2)] He Ming[2)]

1) (*Department of Mathematics, Anhui Normal University, Wuhu* 241000, *China*)

2) (*Department of Mathematics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai* 200240, *China*)

(Received 28 July 2006; revised manuscript received 31 October 2006)

Abstract

Using the perturbation method, a class of nonlinear generalized Landau-Ginzburg-Higgs equations are studied. Firstly, by introducing a varitational iteration, the Lagrange multiplicator is accounted for. Then the iteration of the solution for original equation is constructed and the approximate solution is obtained.

Keywords: soliton, perturbation, varitational iteration

PACC: 0230, 0545

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 40676016, 10471039), the State Key Development Program for Basic Research of China (Grant Nos. 2003CB415101-03, 2004CB418304), the Direction Program of the Knowledge Innovation of Chinese Academy of Sciences (Grant No. KZCX3-SW-221) and the Scientific Research Program from the Education Committee of Shanghai, China (Grant No. NE03004).

† E-mail: mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn