

两态和三态多体纯态的度量和分类^{*}

鲁国英^{1)†} 潘 峰^{1)†}

1) 辽宁师范大学物理系, 大连 116029)

2) 辽宁大学物理系, 沈阳 110036)

(2006 年 3 月 15 日收到, 2006 年 12 月 11 日收到修改稿)

基于多体纯态纠缠的度量方法, 研究了两态两体和三体以及三态两体纯态纠缠的分类和度量. 结果表明, 在随机局域操作与经典通信(SLOCC)等价的意义下, 纯态的纠缠方式可用所定义纠缠度的不同极大值来表征. 通过仔细的计算和分析发现, 两态三体和三态两体纯态各有三种 SLOCC 不等价的基本纠缠方式. 最后将三态两体纯态纠缠度的计算与新近提出的熵积纠缠度方案进行了比较, 并进行了讨论.

关键词: 纯态纠缠, 极值纠缠, 随机局域操作和经典通信

PACC: 0365, 0365B

1. 引 言

近 20 多年来的研究显示, 纠缠态是量子信息处理和量子通信领域的重要资源, 因此对纠缠的量化和分类就显得十分重要^[1-6]. 目前, 对两态两体系统已有了明确的结论, 但对于多态多体系统, 虽经大量的工作^[7-16], 一直未找到理想的度量和分类方案. 针对这一情况, 我们在文献[17]中提出了一种多体纯态纠缠的度量方法, 并成功地应用于分析两态三体纯态纠缠的度量和分类^[18].

本文就是根据文献[17]的多体纯态纠缠度来展示该度量方案对多体纯态纠缠分类的结果. 我们首先引入多体纯态纠缠度量^[17]和随机局域操作与经典通信(SLOCC)的概念^[19]. 作为简单的例子, 将根据该纠缠度引入极值纠缠的概念并结合 SLOCC 来展示两态两体纯态的纠缠和分类并阐述两态三体纯态纠缠的结果^[18]. 我们还将该方法应用于三态两体纯态系统, 对该系统的纠缠进行了分类并对三态两体纯态纠缠度的计算与新近提出的熵积纠缠度方案进行比较.

2. 多体纯态纠缠度量

根据文献[17]针对任一 N 体纯态 Ψ 相应的纠

缠度可利用平均约化熵来度量, 该纠缠度可表示为

$$\chi(\Psi) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_i & (S_i \neq 0 \forall i), \\ 0 & (\exists S_i = 0, i \in \{1, 2, \dots, N\}), \end{cases} \quad (1)$$

式中 $S_i = -\text{tr}[(\rho_{\Psi})_i \log_n(\rho_{\Psi})_i]$ 是 $N-1$ 个粒子被约化后只剩下第 i 个粒子的约化密度矩阵 $(\rho_{\Psi})_i$ 所得到的 von Neumann 熵, n 是单粒子(状态)的数目. 当 $N=2, n=2$ 时(1)式给出的就是两态两体纯态的纠缠度. 这里我们使用以 n 为底的对数而不用 2 为底, 是为了确保任意多态情形的最大纠缠度为 1, 从而便于分析比较纠缠程度. 可以证明^[17], 当存在任一约化密度矩阵的 von Neumann 熵 S_i 为零时, 纯态 Ψ 至少是部分可分离的, 这时 Ψ 就不是真正的 N 粒子纠缠态, 由(1)式得到其 N 体纠缠度就为零. (1)式在局域么正(LU)变换下不变^[17, 19]. 特别是对于纯态系统, LOCC 变换和 LU 变换是等价的^[17, 19], 因此(1)式所定义的纠缠度在 LOCC 下也是不变的.

本文仅研究单份纯态的纠缠特性. 由于任意参数一定的纯态都可经 LU 或 LOCC 变换为参数不同的其他纯态, 似乎所涉及的纯态纠缠有无穷多种. 但正如所指出的那样(1)式所定义的纠缠度在 LOCC 或 LU 下不变, 这就大大减少了刻画纯态纠缠的这

^{*} 国家自然科学基金(批准号:10175031)、辽宁省自然科学基金(批准号:2001101053)和美国路易斯安那州立大学与辽宁师范大学国际合作研究计划(批准号:C192135)资助的课题.

[†] 通讯联系人, E-mail: daipan@dlut.edu.cn

种任意性.然而,即使针对两体问题,纯态并不总能通过 LU 变换相联系,尚需要额外的连续参数来标志不同的等价类,因此似乎仍要涉及无限多种纠缠的窘境.幸运的是,这种任意性能够通过 SLOCC 来克服.所谓 N 体纯态 Ψ 和 Φ SLOCC 等价^[18,19],是指 Ψ 和 Φ 之间能通过可异局域算符(ILO) $Q_1 \otimes Q_2 \otimes \dots \otimes Q_N$ 相互联系,其中 $Q_1 \otimes Q_2 \otimes \dots \otimes Q_N$ 就是复域上一般线性直积群 $GL_1(n, c) \otimes GL_2(n, c) \otimes \dots \otimes GL_N(n, c)$ 的任意元素, $Q_i \in GL_i(n, c)$ 仅对第 i 个粒子的局部坐标进行变换.虽然通过单粒子约化密度矩阵 $(\rho_\Psi)_i$ 所得到的 von Neumann 熵在 $GL_i(n, c)$ 变换下的取值将发生改变,但在 SLOCC 等价的意义上可认为能够通过 ILO 相互联系的纯态是同一种纠缠态^[18].据此,我们就得到 n 态 N 体纯态纠缠的分类准则.如果 n 态 N 体纯态 Ψ 和 Φ 能通过 SLOCC 相互变换,就称 Ψ 和 Φ 是同一类纠缠,并用能通过 SLOCC 相互联系的纠缠态中使(1)式取极大值的纠缠度来标志该类纠缠.下面我们将根据这一准则来研究多态两体和三体纯态的纠缠度量和分类.

3. 两态两体纯态纠缠的度量和分类

两态两体纯态 $|\psi_{AB}\rangle$ 的纠缠度(部分熵纠缠度)被定义为

$$S_E(|\psi_{AB}\rangle) = S(\rho_A) = S(\rho_B),$$

其中

$$\begin{aligned} \rho_A &= \text{tr}_B(|\psi_{AB}\rangle\langle\psi_{AB}|), \\ \rho_B &= \text{tr}_A(|\psi_{AB}\rangle\langle\psi_{AB}|), \\ S(\rho_A) &= -\text{tr}(\rho_A \log_2 \rho_A), \\ S(\rho_B) &= -\text{tr}(\rho_B \log_2 \rho_B). \end{aligned}$$

从态的形成和提纯观点出发,部分熵纠缠度是唯一合理的定义.已经证明两态两体纯态只有一种纠缠类型^[20].显然(1)式定义的纠缠度与此是完全一致的.

作为例子,本节将利用(1)式所给出的纠缠度来展示对两态两体纯态的分析过程,该系统的完备空间是四维的,其基底可用

$$\{ |B_1\rangle = |00\rangle, |B_2\rangle = |11\rangle, |B_3\rangle = |01\rangle, |B_4\rangle = |10\rangle \} \quad (2)$$

来表示.任意两态两体纯态都能通过上述基矢的线性组合来表示.

当一个纯态是(2)式中两项的线性组合构成时

共有 $\binom{4}{2} = 6$ 种,其中 4 种组合对应可分离态或非纠缠态,余下的 2 种组合是真正的纠缠态.具体而言,如果一个态由 $(|B_1\rangle, |B_3\rangle), (|B_1\rangle, |B_4\rangle), (|B_2\rangle, |B_3\rangle)$ 或 $(|B_2\rangle, |B_4\rangle)$ 构成时,容易证明这些态能被分解成两粒子态的直积.很显然它们是可分离的或非纠缠的,这时(1)式所对应的纠缠度为零.如果一个态由 $|\Psi\rangle = a|10\rangle + be^{i\alpha}|01\rangle$ 或 $|\Phi\rangle = a|11\rangle + be^{i\alpha}|00\rangle$ 构成,其中 a, b 是实数并满足归一化 $a^2 + b^2 = 1$ 条件, α 为相对相位因子,利用该约束条件并使用条件极值方法可证明,当 $a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$, α 为任意值时(1)式给出的纠缠度极大值为 $\eta_{\max} = 1$.由于(1)式对相对相位没有限制,在 LOCC 等价的意义上取 $\alpha = 0$ 或 π ,可以构造一组由这些极大纠缠态所构成的正交归一完备基底

$$\begin{aligned} |\Psi^\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle \pm |01\rangle), \\ |\Phi^\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle \pm |00\rangle). \end{aligned} \quad (3)$$

显然这正是 Bell 态^[21].在这类纯态中,改变 $a \neq 0, b \neq 0, \alpha$ 的取值使(1)式不变的状态之间可以通过 LOCC 相互变换,而改变 $a \neq 0, b \neq 0, \alpha$ 能使(1)式的取值发生改变的不同态之间则能通过 SLOCC 相互变换,所以(3)式给出的 Bell 态中的任一态就是这类 SLOCC 等价纠缠态的代表,而与(3)式对应的纠缠度正是这类 SLOCC 等价类中使(1)式取极大值的情况.

当一个纯态由(2)式中的三项构成时共有 4 种组合,分别为 $(|B_1\rangle, |B_2\rangle, |B_3\rangle), (|B_1\rangle, |B_2\rangle, |B_4\rangle), (|B_2\rangle, |B_3\rangle, |B_4\rangle), (|B_1\rangle, |B_3\rangle, |B_4\rangle)$, 它们都是真正的纠缠态.例如,当态为 $|\Psi\rangle = a|B_4\rangle + be^{i\alpha}|B_3\rangle + ce^{i\beta}|B_2\rangle = a|10\rangle + be^{i\alpha}|01\rangle + ce^{i\beta}|11\rangle$, 其中 a, b, c 是实数并满足 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, α, β 是相对相位因子.利用条件极值的方法可证明,纠缠度的极大值仅出现在 $a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}, c = 0$ 时,其极大值为 $\eta_{\max} = 1$,与 Bell 态的纠缠度相等,而且在 SLOCC 下这类纠缠态与 Bell 态等价.

四项组合只有一种,即 $|\Psi\rangle = a|11\rangle + be^{i\alpha}|10\rangle + ce^{i\beta}|01\rangle + de^{i\gamma}|00\rangle$, 其中 a, b, c, d 是实数并满足正交归一化条件 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$, α, β, γ 是相对相位因子,利用条件极值方法可证明,当

$a = b = c = d = \frac{1}{2}, \theta = 2k\pi + \pi$ (k 是整数) 时, 纠缠度取极大值 $\eta_{\max} = 1$ 也与 Bell 态的纠缠度相等. 可以证明这类纠缠态在 SLOCC 下可与 Bell 态相互转化, 所以也与 Bell 态等价.

需要指出的是, 我们的主要目的是分析存在纠缠的纯态, 所以没有研究纠缠度为零的可分离态或非纠缠态. 实际上, 纠缠度为零的纯态在 SLOCC 下不能变换为纠缠度不为零的纯态. 从 (1) 式定义的纠缠度出发, 通过以上分析表明, 两态两体纯态在 SLOCC 等价的意义上只有一种基本的纠缠方式, 并等价于 Bell 态. 而 Bell 态的纠缠度是两态两体纯态纠缠度的极大值. 所以 Bell 态所对应的两态两体纯态的纠缠度极大值唯一表征了所有两态两体的纯态纠缠. 该结论和目前公认的两态两体纯态纠缠方式的结论完全一致. 经两态两体纯态纠缠的分析发现, 可以通过 (1) 式所定义的纠缠度并利用条件极值方法来寻找多态多体纯态纠缠度的各种极大值. 如果纠缠度的不同极大值所对应的纠缠态之间不能通过 SLOCC 相互变换, 则不同的极大纠缠度就可用来表征多态多体纯态纠缠. 下面将把这一分析方法应用于两态三体和三态两体纯态, 结果充分表明了这一猜想的正确性.

4. 两态三体纯态纠缠的度量和分类

$N \geq 3$ 时, 两态系统的纯态纠缠特性显然要复杂得多. Dür 等^[14]利用 SLOCC 等价的概念曾经研究过两态三体纯态, 并指出(至少)存在两种不等价的纠缠类, 分别为 Greenberger-Horne-Zeilinger (GHZ) 类^[22]和 W 类^[14]. 由于文献 [14] 所研究的情况不够全面, 我们曾经将以上介绍的方法应用于两态三体情形^[18], 并全面地研究了两态三体纯态的各种可能纠缠. 下面仅介绍文献 [18] 的分析过程和主要的结果.

两态三体系统的基底可用如下 8 个直积态来表示:

$$\{ |W_1\rangle = |000\rangle, |W_2\rangle = |110\rangle, |W_3\rangle = |101\rangle, |W_4\rangle = |011\rangle, |\bar{W}_1\rangle = |111\rangle, |\bar{W}_2\rangle = |001\rangle, |\bar{W}_3\rangle = |010\rangle, |\bar{W}_4\rangle = |100\rangle \}, \quad (4)$$

它们张成 8 维的希尔伯特子空间. 任意两态三体纯态都可利用 (4) 式中基矢的线性组合来表示. 下面将

采用第 3 节所提出的分析方法.

纯态为 (4) 式中两项组合的情况共有 $\binom{8}{2} = 28$ 种. 当态 $|\psi\rangle$ 为 $\{|W_i\rangle, |W_j\rangle$ 或 $\{|\bar{W}_i\rangle, |\bar{W}_j\rangle$ 的线性组合有 12 种, 其中 $i, j \in P, i \neq j, P = \{1, 2, 3, 4\}$, 这样得到的 $|\psi\rangle$ 都是部分可分离态; $|\psi\rangle$ 是 $\{|W_i\rangle, |\bar{W}_j\rangle$ 的不同线性组合也有 12 种, 其中 $i \neq j$, 这时 $|\psi\rangle$ 也是可分离态. (1) 式对应所有这些可分离态的纠缠度为零; $|\psi\rangle$ 为 $\{|W_i\rangle, |\bar{W}_i\rangle$ 的组合有 4 种情况, 它们都是真正的纠缠态. 我们可以将这类纠缠纯态表达成 $|\Psi\rangle = a|W_i\rangle + be^{i\alpha}|\bar{W}_i\rangle$, 其中 a, b 是实数, α 是相对相位因子. 利用条件极值方法可证明, 当 $a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 相对相位任意时, 所对应的纠缠度极大值为 $\eta = \eta_{\max} = 1$. 该极大(最大)纠缠态对应的正是 GHZ 态.

三项线性组合共有 $\binom{8}{3} = 56$ 种. 其中有 24 种组合能被分解成两部分直积的形式, 它们是部分可分离的; 纯态 $|\psi\rangle$ 为 $(|W_i\rangle, |\bar{W}_i\rangle, |W_j\rangle)$ ($|W_i\rangle, |\bar{W}_i\rangle, |\bar{W}_j\rangle$) 的组合有 24 种, 其中 $i, j \in P$ 且 $i \neq j$, 可以证明当所有系数都不为零时, 这类纯态除与 GHZ 态 SLOCC 等价的情形外没有新的纠缠类; $|\psi\rangle = a|W_i\rangle + be^{i\alpha}|W_j\rangle + ce^{i\beta}|W_k\rangle$ 共有 8 种, 都是真正的纠缠态, 其中 a, b, c 是不为零的实数并满足 $a^2 + b^2 + c^2 = 1, \alpha, \beta$ 为相对相位因子, $i, j, k \in P, i \neq j \neq k$. 利用条件极值方法可证明, 当 $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 而相对相位因子任意时, 这类纠缠态的纠缠度极大值为 $\eta(|\psi\rangle) = 0.918296$, 对应的正是 W 态.

四项情况共有 $\binom{8}{4} = 70$ 种组合. 其中有 6 种组合 $(|W_i\rangle, |W_j\rangle, |\bar{W}_i\rangle, |\bar{W}_q\rangle)$ 是部分可分离的, 其中 $i, j, t, q \in P, P = \{1, 2, 3, 4\}, i \neq j \neq t \neq q$; 其余的 64 种组合是真正的纠缠态. 当一个态 $|\psi\rangle$ 为 $(|W_i\rangle, |W_j\rangle, |\bar{W}_i\rangle, |\bar{W}_q\rangle)$ 的线性组合, 其中 $i, j, q \in P, i \neq j \neq q$, 或由 $(|W_i\rangle, |W_j\rangle, |W_t\rangle, |\bar{W}_q\rangle)$ ($|\bar{W}_i\rangle, |\bar{W}_j\rangle, |\bar{W}_t\rangle, |W_q\rangle$) 的线性组合, 其中 $i, j, t, q \in P, i \neq j \neq t \neq q$. 可以证明, 这些组合给出的纠缠态没有新的极大值, 并且在 SLOCC 下等价于 GHZ 态. 当 $|\psi\rangle = a|\bar{W}_i\rangle + be^{i\alpha}|W_i\rangle + ce^{i\beta}|W_j\rangle + de^{i\gamma}|\bar{W}_j\rangle$, 其中 $i \neq j, a, b, c, d$ 是实数并满足 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$, 且 α, β, γ 是相对相位因子时, 或 $|\psi\rangle = a|W_i\rangle +$

$b e^{i\alpha} |W_j + c e^{i\beta} |W_t + d e^{i\gamma} |W_q$ 或 $|\psi = a |\bar{W}_i + b e^{i\alpha} |\bar{W}_j + c e^{i\beta} |\bar{W}_t + d e^{i\gamma} |\bar{W}_q$, 其中 $i \neq j \neq t \neq q$. 可以证明, 这些纠缠态在 SLOCC 下也与 GHZ 态等价. 当 $|\psi = a |W_j + b e^{i\alpha} |W_t + c e^{i\beta} |W_i + d e^{i\gamma} |\bar{W}_i$ 或 $|\psi = a |\bar{W}_j + b e^{i\alpha} |\bar{W}_t + c e^{i\beta} |\bar{W}_i + d e^{i\gamma} |W_i$, 其中 $i \neq j \neq t$, 相应的纠缠度存在三个极大值: 当 $|a| = |b| = 0, |c| = |d| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, 相对相位任意时, $\eta_{\max}(\psi) = 1$, 这些纠缠态在 SLOCC 下与 GHZ 态等价; 当 $|a| = |b| = |c| = \frac{1}{\sqrt{3}}, d = 0$, 相对相位任意时, 纠缠极大值为 $\eta(\psi) = 0.918296$, 这类纠缠态在 SLOCC 下与 W 态等价; 当 $|a| = |b| = 0.462175, |c| = 0.653614, |d| = 0.381546$, 相对相位任意时, 纠缠极大值为 $\eta(\psi) = 0.893295$. 可以证明, 这类纠缠态在 SLOCC 下与 GHZ 和 W 态都不等价, 被称作 III_4 态^[18].

利用同样的分析方法, 我们详细地计算了具有五项、六项、七项、八项的各种组合, 没有得到相应纠缠态对应纠缠度的其他极大值, 即在 SLOCC 等价的意义下, 两态三体纯态有三类不同的纠缠方式, 分别是对应纠缠度极大值为 1 的 GHZ 态,

$$|\text{GHZ} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000 + |111),$$

对应极大值为 0.918296 的 W 态

$$|W = \frac{1}{\sqrt{3}}(|100 + |010 + |001),$$

对应极大值为 0.893295 的 III_4 态

$$|\text{III}_4 = a |110 + b |101 + c |011 + d |100. \quad (5)$$

这里 $|a| = |b| = 0.462175, |c| = 0.653614, |d| = 0.381546$. 这三类纠缠态不能在 SLOCC 下相互变换, 因此是互不等价的. 值得指出的是, 文献^[23]独立地验证了我们所提出的 III_4 态与 GHZ 及 W 态的非等价性.

5. 三态两体纯态纠缠的度量和分类

正是以上所介绍的用极值纠缠对纯态纠缠分类所取得的成功, 促使我们将该方法应用于分析其他多态多体纯态纠缠的分类问题. 两态三体纠缠态已被广泛应用于量子信息处理^[24-29], 所以对这类纠缠态进行量化和分类也是当务之急.

我们将三态系统的单粒子态用相互正交的 3 个线性独立基底 $|1, |0, |-1$ 来表示, 并在 $SU(2)$ 下按一阶张量变换. 因此, 三态两体系统的基底可用如下 9 个直积态来表示:

$$\begin{aligned} \{ & |U_1 = |11, |U_2 = |10, \\ & |U_3 = |1-1, \\ & |V_1 = |01, |V_2 = |00, |V_3 = |0-1, \\ & |T_1 = |-11, |T_2 = |-10, \\ & |T_3 = |-1-1 \}, \end{aligned} \quad (6)$$

它们张成 9 维的希尔伯特子空间. 三态两体系统中的任意纯态都可利用它们的线性组合来表示.

纯态为(6)式中两项的线性组合方式共有

$\binom{9}{2} = 36$ 种, 其中有 18 种是可分离的或非纠缠的, 其余的 18 种是真正的纠缠态. 具体而言, 当一个态为 $\zeta(|U_i, |U_j) \zeta(|V_i, |V_j) \zeta(|T_i, |T_j)$ 或 $(|U_i, |V_i) \zeta(|U_i, |T_i) \zeta(|V_i, |T_j)$ 的线性组合, 其中 $i, j \in P, i \neq j, P = \{1, 2, 3\}$, 这些态总能被分解为两部分直积的形式, 从而是可分离的或非纠缠的, 这时所对应的纠缠度为零; 态为 $(|U_i, |V_j) \zeta(|U_i, |T_j)$ 或 $(|V_i, |T_j)$ 的线性组合得到的都是真正的纠缠态, 其中 $i, j \in P, i \neq j, P = \{1, 2, 3\}$. 例如, 当态为 $|\Psi = a |U_1 + b e^{i\alpha} |V_2 = a |11 + b e^{i\alpha} |00$, 其中 a, b 是不为零的实数且满足归一化条件 $a^2 + b^2 = 1, \alpha$ 是相对相位因子, 利用条件极值方法计算发现, 当 $a = b = 1/\sqrt{2}$ 时, 得到纠缠度极大值为 $\eta = 0.63093$, 该结果与相对相位因子无关. 我们将与该极值纠缠态 SLOCC 等价的三态两体纠缠态称为 I 型(纠缠)态.

三项的线性组合共有 $\binom{9}{3} = 84$ 种. 如果态为 $(|U_i, |U_j, |U_k) \zeta(|V_i, |V_j, |V_k) \zeta(|T_i, |T_j, |T_k)$ 的线性组合(其中 $i, j, k \in P$ 且 $i \neq j \neq k$)或为 $(|U_i, |V_i, |W_i)$ 的线性组合(其中 $i \in P$), 容易证明这些态都是可分离的, 这样的组合有 6 种. 其余的 78 种组合则都是纠缠态, 它们可被划分成如表 1 所列的 3 类. 其中 III_3 型的 36 种纯态所对应的极值纠缠情形都退化为两项的情况. 对 III_2 型态, 如态为 $|\Psi = a |U_1 + b e^{i\alpha} |U_2 + c e^{i\beta} |V_3 = a |11 + b e^{i\alpha} |10 + c e^{i\beta} |0-1$, 其中 $a, b, c \neq 0$ 是实数并满足约束条件 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, 通过计算条件极值得到, 当 $a^2 + b^2 = 1/2, c = 1/2$ 时, 纠缠度取

极大值 $\eta = 0.63093$,该结果与相对相位无关.可以证明,在 SLOCC 下 III₂ 和 III₃ 型态都等价于 I 型态.

对于 III₁ 型的态,如态为 $a|U_i + be^{i\alpha}|V_j + ce^{i\beta}|T_k$,其中 a, b, c 是实数并满足正交归一化条件 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, α, β 是相对相位因子,利用条件极值方法求得,当 $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 而相对相位任意

时,纠缠度取极大(最大)值 $\eta_{\max} = 1$.从纠缠度的极大值看,显然与 I 型态的纠缠度极值不相等,我们称与这类纠缠态 SLOCC 等价的纠缠态为 II 型态.

可以证明,在 SLOCC 下 II 型态与 I 型态不等价.为

简洁说明问题,选取 II 型态中的一个代表为例,

$$|\Psi\rangle = x_1|11\rangle + x_2|00\rangle + x_3|-1-1\rangle = (x_1|11\rangle + x_2|00\rangle) + x_3|-1-1\rangle \quad (7)$$

其中所有系数都是非零的复数.(7)式中括号内的组合属于 I 型态,在 SLOCC 下它总是与 I 型态等价,而在 SLOCC 变换下最后一项总是单粒子直积态.所以当所有系数都不为零时(7)式始终是 I 型态和单粒子直积态的线性组合.只有当 $x_3 = 0$ 时(7)式才退化为 I 型态,但 $x_3 = 0$ 时的态不能与 $x_3 \neq 0$ 的(7)式通过 SLOCC 相联系.这就证明了 II 型态与 I 型态不等价.

表 1 三项组合所有纠缠态的分类

类型	线性组合		
III ₁	$(U_i\rangle, V_j\rangle, T_k\rangle), (i \neq j \neq k \in \{1, 2, 3\})$		
III ₂	$(U_i\rangle, U_j\rangle, V_k\rangle)$	$(U_i\rangle, U_j\rangle, T_k\rangle)$	$(V_i\rangle, V_j\rangle, U_k\rangle)$
	$(V_i\rangle, V_j\rangle, T_k\rangle)$	$(T_i\rangle, T_j\rangle, U_k\rangle)$	$(T_i\rangle, T_j\rangle, V_k\rangle)$
	$(U_i\rangle, V_i\rangle, T_j\rangle)$	$(U_i\rangle, T_i\rangle, V_j\rangle)$	$(V_i\rangle, W_i\rangle, U_j\rangle)$
$(i \neq j \neq k \in \{1, 2, 3\})$			
III ₃	$(U_i\rangle, U_j\rangle, V_k\rangle)$	$(U_i\rangle, U_j\rangle, T_k\rangle)$	$(V_i\rangle, V_j\rangle, U_k\rangle)$
	$(V_i\rangle, V_j\rangle, T_k\rangle)$	$(T_i\rangle, T_j\rangle, U_k\rangle)$	$(T_i\rangle, T_j\rangle, V_k\rangle)$
$(i, j, k \in \{1, 2, 3\}, k = i \text{ 或 } k = j, i \neq j)$			

当态为四项线性组合时共有 $\binom{9}{4} = 126$ 种情况,它们都是真正的纠缠态.这些纠缠态的 5 种类型列于表 2.通过条件极值计算可以证明,在 SLOCC 下 IV₁ 型、IV₂ 型、IV₃ 型、IV₄ 型和 IV₅ 型态都与 I 型态等价.以 IV₄ 型态为例,如果态为 $|\Psi\rangle = a|U_1 + be^{i\alpha}|U_2 + ce^{i\beta}|V_1 + de^{i\gamma}|V_2 = a|11\rangle + be^{i\alpha}|10\rangle + ce^{i\beta}|01\rangle + de^{i\gamma}|00\rangle$,其中 a, b, c, d 是实数并满足 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$, α, β, γ 是相对相位因子,当 $a = d, b = c$,且 $\varphi = \alpha + \beta - \gamma = 2k\pi + \pi$ 时,纠缠度取极大值 $\eta = 0.63093$,显然与 I 型态的纠缠度相等.因此,在 SLOCC 下所有可能的四项线性组合得不到新的纠缠类.

五项共有 $\binom{9}{5} = 126$ 种线性组合,它们都是真正的纠缠态,其 6 种类型列于表 3.在 SLOCC 下,从所有的 V₁—V₆ 型态出发都得不到新的纠缠类.以 V₂ 型态为例,如态为 $|\Psi\rangle = a|U_1 + be^{i\alpha}|U_2 + ce^{i\beta}|V_1 + de^{i\gamma}|V_2 + fe^{i\xi}|W_3$,其中 a, b, c, d, f 是满足 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + f^2 = 1$ 的实数, $\alpha, \beta, \gamma, \xi$ 是

相对相位因子,可以证明此时纠缠度存在两种不同的极大值.当 $a = b = c = d = \frac{1}{2\sqrt{2}}, f = \frac{1}{\sqrt{2}}, \varphi = \alpha + \beta - \gamma = 2k\pi$ 纠缠度取极大值 $\eta = 0.63093$,所以这类 V₂ 态在 SLOCC 下等价于 I 型态,而当 $a = b = c = d = \frac{1}{\sqrt{6}}, f = \frac{1}{\sqrt{3}}, \varphi = \alpha + \beta - \gamma = 2k\pi + \pi$ 时,纠缠度的极大值 $\eta = 1$.可以证明,这类纠缠态在 SLOCC 下可转化为 II 型态.因此,在 SLOCC 下所有五项线性组合的纠缠态不是与 I 型态等价就是与 II 型态等价,从而没有新的纠缠类出现.

六项线性组合共有 $\binom{9}{6} = 84$ 种,它们都是真正的纠缠态,可按表 4 划分为 4 类,其中在 SLOCC 下从 V₁—V₄ 态得不到新的纠缠类.以 V₁ 型态为例,如态为 $|\Psi\rangle = a|U_1 + be^{i\alpha}|U_2 + ce^{i\beta}|U_3 + de^{i\gamma}|V_1 + fe^{i\xi}|V_2 + ge^{i\sigma}|V_3$,其中 a, b, c, d, f, g 是满足约束条件 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + f^2 + g^2 = 1$ 的实数, $\alpha, \beta, \gamma, \xi, \sigma$ 是相对相位因子,当 $a = d, b = f, c = g, \omega = \beta + \gamma - \sigma = 2k\pi + \pi, \varphi = \alpha + \gamma - \xi = 2k\pi$

或当 $a = g, b = f, c = d, \omega = \beta + \gamma - \sigma = 2k\pi, \varphi = \alpha + \gamma - \xi = 2k\pi + \pi$ 时, 纠缠度取极大值 $\eta = 0.63093$.

可以证明, 该纠缠态在 SLOCC 下与 I 型态等价. 在 SLOCC 下, 我们发现从 V_{I_1} 型态出发能得到

表 2 四项组合所有纠缠态的分类

类型	线 性 组 合			纯态数
IV_1	$(U_i\rangle, U_j\rangle, U_k\rangle, V_m\rangle)$	$(U_i\rangle, U_j\rangle, U_k\rangle, W_m\rangle)$	$(V_i\rangle, V_j\rangle, V_k\rangle, U_m\rangle)$	18
	$(V_i\rangle, V_j\rangle, V_k\rangle, W_m\rangle)$	$(W_i\rangle, W_j\rangle, W_k\rangle, U_m\rangle)$	$(W_i\rangle, W_j\rangle, W_k\rangle, V_m\rangle)$	
	$(i \neq j \neq k, m \in \{1, 2, 3\})$			
	$(U_i\rangle, U_j\rangle, V_i\rangle, W_i\rangle)$	$(U_i\rangle, U_j\rangle, V_j\rangle, W_j\rangle)$	$(V_i\rangle, V_j\rangle, U_i\rangle, W_i\rangle)$	18
$(V_i\rangle, V_j\rangle, U_j\rangle, W_j\rangle)$	$(W_i\rangle, W_j\rangle, U_i\rangle, V_i\rangle)$	$(W_i\rangle, W_j\rangle, U_j\rangle, V_j\rangle)$		
$(i \neq j \in \{1, 2, 3\})$				
IV_2	$(U_i\rangle, U_j\rangle, V_i\rangle, V_k\rangle)$	$(U_i\rangle, U_j\rangle, V_j\rangle, V_k\rangle)$	$(U_i\rangle, U_j\rangle, W_i\rangle, W_k\rangle)$	18
	$(U_i\rangle, U_j\rangle, W_j\rangle, W_k\rangle)$	$(V_i\rangle, V_j\rangle, W_i\rangle, W_k\rangle)$	$(V_i\rangle, V_j\rangle, W_j\rangle, W_k\rangle)$	
	$(i \neq j \neq k \in \{1, 2, 3\})$			
	$(U_i\rangle, U_j\rangle, V_i\rangle, W_j\rangle)$	$(U_i\rangle, U_j\rangle, V_j\rangle, W_i\rangle)$	$(V_i\rangle, V_j\rangle, U_i\rangle, W_j\rangle)$	18
$(V_i\rangle, V_j\rangle, U_j\rangle, W_i\rangle)$	$(W_i\rangle, W_j\rangle, U_i\rangle, V_j\rangle)$	$(W_i\rangle, W_j\rangle, U_j\rangle, V_i\rangle)$		
$(i \neq j \in \{1, 2, 3\})$				
IV_3	$(U_i\rangle, U_j\rangle, V_i\rangle, W_k\rangle)$	$(U_i\rangle, U_j\rangle, V_j\rangle, W_k\rangle)$	$(U_i\rangle, U_j\rangle, W_i\rangle, V_k\rangle)$	36
	$(U_i\rangle, U_j\rangle, W_j\rangle, V_k\rangle)$	$(V_i\rangle, V_j\rangle, U_i\rangle, W_k\rangle)$	$(V_i\rangle, V_j\rangle, U_j\rangle, W_k\rangle)$	
	$(V_i\rangle, V_j\rangle, W_i\rangle, U_k\rangle)$	$(V_i\rangle, V_j\rangle, W_j\rangle, U_k\rangle)$	$(W_i\rangle, W_j\rangle, U_i\rangle, V_k\rangle)$	
	$(W_i\rangle, W_j\rangle, U_j\rangle, V_k\rangle)$	$(W_i\rangle, W_j\rangle, V_i\rangle, U_k\rangle)$	$(W_i\rangle, W_j\rangle, V_j\rangle, U_k\rangle)$	
$(i \neq j \neq k \in \{1, 2, 3\})$				
IV_4	$(U_i\rangle, U_j\rangle, V_i\rangle, V_j\rangle)$	$(U_i\rangle, U_j\rangle, W_i\rangle, W_j\rangle)$	$(V_i\rangle, V_j\rangle, W_i\rangle, W_j\rangle)$	9
	$(i \neq j \in \{1, 2, 3\})$			
IV_5	$(U_i\rangle, U_j\rangle, V_k\rangle, W_k\rangle)$	$(V_i\rangle, V_j\rangle, U_k\rangle, W_k\rangle)$	$(W_i\rangle, W_j\rangle, U_k\rangle, V_k\rangle)$	9
	$(i \neq j \neq k \in \{1, 2, 3\})$			

新的纠缠类. 例如, 态为 $|\Psi\rangle = a|U_1\rangle + be^{i\alpha}|U_2\rangle + ce^{i\beta}|V_1\rangle + de^{i\gamma}|V_3\rangle + fe^{i\xi}|W_2\rangle + ge^{i\sigma}|W_3\rangle$, 其中 $a, b, c, d, f, g \neq 0$ 是满足正交归一化条件 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + f^2 + g^2 = 1$ 的实数, $\alpha, \beta, \gamma, \xi, \sigma$ 是相对相位因子. 利用条件极值方法发现, 当 $a = b = c = d = f = g = \frac{1}{\sqrt{6}}, \varphi = \alpha + \beta - \gamma - \xi + \sigma = 2k\pi$ 时, 纠缠度有新的极大值 $\eta = 0.78969$. 很显然, 该纠缠度的极大值与 I 型和 II 型态的纠缠度极大值都不相等.

可以证明, V_{I_1} 型态既不等价于 I 型态也不等价于 II 型态. 为了便于说明问题, 以下列一个 V_{I_1} 型态为例证明该态不等价于 I 型态:

$$|\Psi\rangle = (x_1|11\rangle + x_2|10\rangle + x_3|01\rangle + x_4|0-1\rangle + x_5|-10\rangle) + x_6|-1-1\rangle, \quad (8)$$

其中 (x_1, x_2, \dots, x_6) 是非零复数. (8) 式括号中的五

项组合是 V_5 态, 以上已说明 V_5 态等价于 I 型态, 而 (8) 式的最后一项在 SLOCC 下总是等价于单粒子直积态. 当所有系数都不为零时 (8) 式总是 I 型态和单粒子直积态的线性组合. 只有当 $x_6 = 0$ 时 (8) 式才退化为 I 型态. 但 $x_6 = 0$ 的态不能通过 SLOCC 与 $x_6 \neq 0$ 的态相互变换. 所有 V_{I_1} 态与 I 型态不等价. 接着再证明该态与 II 型态不等价. (8) 式可被重写为

$$|\Psi\rangle = (x_1|11\rangle + x_6|-1-1\rangle + x|00\rangle) + (x_2|10\rangle + x_3|01\rangle + x_4|0-1\rangle + x_5|-10\rangle) - x|00\rangle, \quad (9)$$

其中 x 是任意的非零复数. 显然 (9) 式右端第一个括号中的线性组合构成 II 型态, 而第二个括号中的项构成 V_3 态. 已经证明 V_3 态总是等价于 I 型态, 而 I 型态与 II 型态不能通过 SLOCC 相联系. 因此, 当所有系数 (x_1, x_2, \dots, x_6) 和 x 都不为零时 (9) 式

总是 I 型态和 II 型态的线性组合,并且该态在 SLOCC 下既不能等价于 I 型态,也不能等价于 II 型态.因此, V_{11} 态是三态两体纯态系统中的一种新的纠缠类型,称为 III 型态.

表 3 五项组合所有纠缠态的分类

类型	线性组合	纯态数
V_1	$(U_i\rangle, U_j\rangle, U_k\rangle, V_m\rangle, V_n\rangle)$ $(U_i\rangle, U_j\rangle, U_k\rangle, W_m\rangle, W_n\rangle)$ $(V_i\rangle, V_j\rangle, V_k\rangle, U_m\rangle, U_n\rangle)$ $(V_i\rangle, V_j\rangle, V_k\rangle, W_m\rangle, W_n\rangle)$ $(W_i\rangle, W_j\rangle, W_k\rangle, U_m\rangle, U_n\rangle)$ $(W_i\rangle, W_j\rangle, W_k\rangle, V_m\rangle, V_n\rangle)$ $(i \neq j \neq k, m \neq n \in \{1, 2, 3\})$	18
	$(U_i\rangle, U_j\rangle, V_i\rangle, V_j\rangle, W_i\rangle)$ $(U_i\rangle, U_j\rangle, V_i\rangle, V_j\rangle, W_j\rangle)$ $(U_i\rangle, U_j\rangle, W_i\rangle, W_j\rangle, V_i\rangle)$ $(U_i\rangle, U_j\rangle, W_i\rangle, W_j\rangle, V_j\rangle)$ $(V_i\rangle, V_j\rangle, W_i\rangle, W_j\rangle, U_i\rangle)$ $(V_i\rangle, V_j\rangle, W_i\rangle, W_j\rangle, U_j\rangle)$ $(i \neq j \in \{1, 2, 3\})$	18
V_2	$(U_i\rangle, U_j\rangle, V_i\rangle, V_j\rangle, W_k\rangle)$ $(U_i\rangle, U_j\rangle, W_i\rangle, W_j\rangle, V_k\rangle)$ $(V_i\rangle, V_j\rangle, W_i\rangle, W_j\rangle, U_k\rangle)$ $(i \neq j \neq k \in \{1, 2, 3\})$	9
V_3	$(U_i\rangle, U_j\rangle, U_k\rangle, V_m\rangle, W_m\rangle)$ $(V_i\rangle, V_j\rangle, V_k\rangle, U_m\rangle, W_m\rangle)$ $(W_i\rangle, W_j\rangle, W_k\rangle, U_m\rangle, V_m\rangle)$ $(i \neq j \neq k, m \in \{1, 2, 3\})$	9
V_4	$(U_i\rangle, U_j\rangle, U_k\rangle, V_m\rangle, W_n\rangle)$ $(V_i\rangle, V_j\rangle, V_k\rangle, U_m\rangle, W_n\rangle)$ $(W_i\rangle, W_j\rangle, W_k\rangle, U_m\rangle, V_n\rangle)$ $(i \neq j \neq k, m \neq n \in \{1, 2, 3\})$	18
	$(U_i\rangle, U_j\rangle, V_i\rangle, V_k\rangle, W_i\rangle)$ $(U_i\rangle, U_j\rangle, V_j\rangle, V_k\rangle, W_j\rangle)$ $(U_i\rangle, U_j\rangle, W_i\rangle, W_k\rangle, V_i\rangle)$ $(U_i\rangle, U_j\rangle, W_j\rangle, W_k\rangle, V_j\rangle)$ $(V_i\rangle, V_j\rangle, W_i\rangle, W_k\rangle, U_i\rangle)$ $(V_i\rangle, V_j\rangle, W_j\rangle, W_k\rangle, U_j\rangle)$ $(i \neq j \neq k \in \{1, 2, 3\})$	18
V_5	$(U_i\rangle, U_j\rangle, V_i\rangle, V_k\rangle, W_j\rangle)$ $(U_i\rangle, U_j\rangle, V_j\rangle, V_k\rangle, W_i\rangle)$ $(U_i\rangle, U_j\rangle, W_i\rangle, W_k\rangle, V_j\rangle)$ $(U_i\rangle, U_j\rangle, W_j\rangle, W_k\rangle, V_i\rangle)$ $(V_i\rangle, V_j\rangle, W_i\rangle, W_k\rangle, U_j\rangle)$ $(V_i\rangle, V_j\rangle, W_j\rangle, W_k\rangle, U_i\rangle)$ $(i \neq j \neq k \in \{1, 2, 3\})$	18
V_6	$(U_i\rangle, U_j\rangle, V_i\rangle, V_k\rangle, W_k\rangle)$ $(U_i\rangle, U_j\rangle, V_j\rangle, V_k\rangle, W_k\rangle)$ $(U_i\rangle, U_j\rangle, W_i\rangle, W_k\rangle, V_k\rangle)$ $(U_i\rangle, U_j\rangle, W_j\rangle, W_k\rangle, V_k\rangle)$ $(V_i\rangle, V_j\rangle, W_i\rangle, W_k\rangle, U_k\rangle)$ $(V_i\rangle, V_j\rangle, W_j\rangle, W_k\rangle, U_k\rangle)$ $(i \neq j \neq k \in \{1, 2, 3\})$	18

根据文献 [30], 当 LU 被限定在 $SU(2)$ 群下时, 三态 N 体系统的态空间为 $(C^3)^{\otimes N}$. 而局域变换可简化为 $U(1) \times (SU(2))^{\otimes N}$, 其中 $U(1)$ 表征了直积空间的整体相位因子. 态空间 $(C^3)^{\otimes N}$ 中的任意向量需要 2×3^N 个实参数来描述, 而 $SU(2)$ 群有三个实参数, $U(1)$ 群有一个实参数, 所以描述三态系统中 LU 等价类所需的独立参数为 $2 \times 3^N - (3N + 1)$ 个. 对于 $N = 2$ 的两体情形, 就需要用含有 11 个实参数的标准形式来描述该系统的任一量子态. 这样, 只需计算到六项组合的所有纠缠态就是充分的. 因为这样的纠缠态包含了 6 个复参数, 即 12 个实参数. 因此, 通过上述对两项到六项的所有组合分析所得到的结果就涵盖了三态两体纯态系统的所有纠缠

类型.

总之, 利用 (1) 式所定义的纠缠度和条件极值方法, 我们详细分析了三态两体纯态的纠缠. 在 SLOCC 等价的意义下证明了三态两体纯态具有三种不等价的纠缠类型, 可分别表示为

$$\begin{aligned}
 |I\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle + |00\rangle) \quad (\eta = 0.63093), \\
 |II\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}(|11\rangle + |00\rangle \\
 &\quad + |-1-1\rangle) \quad (\eta = 1), \\
 |III\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}}(|11\rangle + |-1-1\rangle + |10\rangle + |01\rangle \\
 &\quad + |-10\rangle + |0-1\rangle) \quad (\eta = 0.78969).
 \end{aligned} \tag{10}$$

表 4 六项组合所有纠缠态的分类

类型	线 性 组 合	纯态数
V_1	$(U_i , U_j , V_i , V_k , W_j , W_k)$ $(U_i , U_j , V_j , V_k , W_i , W_k)$ $(i \neq j \neq k \in \{1, 2, 3\})$	6
V_2	$(U_i , U_j , U_k , V_i , V_j , V_k)$ $(U_i , U_j , U_k , W_i , W_j , W_k)$ $(V_i , V_j , V_k , W_i , W_j , W_k)$ $(i \neq j \neq k \in \{1, 2, 3\})$ $(U_i , U_j , V_i , V_j , W_i , W_j)$ $(i \neq j \in \{1, 2, 3\})$	3
V_3	$(U_i , U_j , U_k , V_i , V_j , W_i)$ $(U_i , U_j , U_k , V_i , V_j , W_j)$ $(U_i , U_j , U_k , W_i , W_j , V_i)$ $(U_i , U_j , U_k , W_i , W_j , V_j)$ $(V_i , V_j , V_k , W_i , W_j , U_i)$ $(V_i , V_j , V_k , W_i , W_j , U_i)$ $(V_i , V_j , V_k , U_i , U_j , W_i)$ $(V_i , V_j , V_k , U_i , U_j , W_j)$ $(W_i , W_j , W_k , U_i , U_j , V_i)$ $(W_i , W_j , W_k , U_i , U_j , V_j)$ $(W_i , W_j , W_k , V_i , V_j , U_i)$ $(W_i , W_j , W_k , V_i , V_j , U_j)$ $(i \neq j \neq k \in \{1, 2, 3\})$	36
V_4	$(U_i , U_j , U_k , V_i , V_j , W_k)$ $(U_i , U_j , U_k , W_i , W_j , V_k)$ $(V_i , V_j , V_k , W_i , W_j , U_k)$ $(V_i , V_j , V_k , U_i , U_j , W_k)$ $(W_i , W_j , W_k , U_i , U_j , V_k)$ $(W_i , W_j , W_k , V_i , V_j , U_k)$ $(i \neq j \neq k \in \{1, 2, 3\})$ $(U_i , U_j , V_i , V_j , W_i , W_k)$ $(U_i , U_j , V_i , V_j , W_j , W_k)$ $(U_i , U_j , W_i , W_j , V_i , V_k)$ $(U_i , U_j , W_i , W_j , V_j , V_k)$ $(V_i , V_j , W_i , W_j , U_i , U_k)$ $(V_i , V_j , W_i , W_j , U_j , U_k)$ $(i \neq j \neq k \in \{1, 2, 3\})$	18

6. 与熵积纠缠度的比较

最近,文献 [31] 基于文献 [17] 的分析提出了多态多体纯态纠缠度量的另一种形式,称为熵积纠缠度.利用该纠缠度,文献 [31] 分析了两态三体的所有纯态,该纠缠度定义为

$$S_1(\Psi) = \prod_{i=1}^N S_i. \tag{11}$$

该新定义的优点在于,在零值附近纠缠度连续,并且熵积纠缠度比(1)式所定义的纠缠度在某些情况下变化较迅速.下面就三态两体系统的 I 型、II 型、III 型态,将(1)式得到的纠缠度与熵积纠缠度的结果进行比较.首先,将(1)式的值用 $S_2(\Psi) = \eta(\Psi)$ 表示.需要强调指出的是,这两种方法对纯态的分类和求解过程完全相同,因此无论利用熵积纠缠度还是利用(1)式所得出的分类结论是完全一致的,主要区别仅在于连续性、取值和变化行为方面.

对于 I 型态,以

$$| \Psi \rangle = a | 11 \rangle + b e^{i\alpha} | 00 \rangle$$

为例,相应的熵积纠缠度为

$$S_1(\Psi) = (a^2 \log_3 a^2 + b^2 \log_3 b^2)^2. \tag{12}$$

可以证明,当 $a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时,纠缠度达到极大值

$S_{1(\max)}(\Psi) = S_{2(\max)}(\Psi) = 0.398072$, 这个结果与相对相位无关.图 1 展示了 $S_1(\Psi)$ 和 $S_2(\Psi)$ 在整个定义域的变化情况.

对于 II 型态,以

$$| \Psi \rangle = a | 11 \rangle + b e^{i\alpha} | 00 \rangle + c e^{i\beta} | -1 -1 \rangle$$

为例,相应的熵积纠缠度为

$$S_1(\Psi) = (a^2 \log_3 a^2 + b^2 \log_3 b^2 + c^2 \log_3 c^2)^2. \tag{13}$$

当参数 $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 时,纠缠度极值为 $S_{1(\max)}(\Psi) = S_{2(\max)}(\Psi) = 1$, 该结果也与相对相位无关.为了方

便,图 2 中的曲线是固定 $c = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 后作出的.

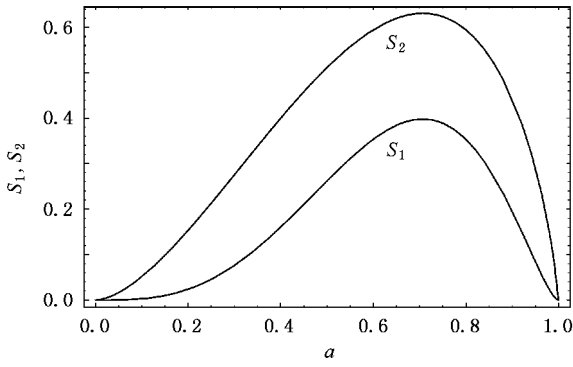


图 1 三态两体 I 型纠缠态所对应纠缠度 S_1 及 S_2 的变化规律

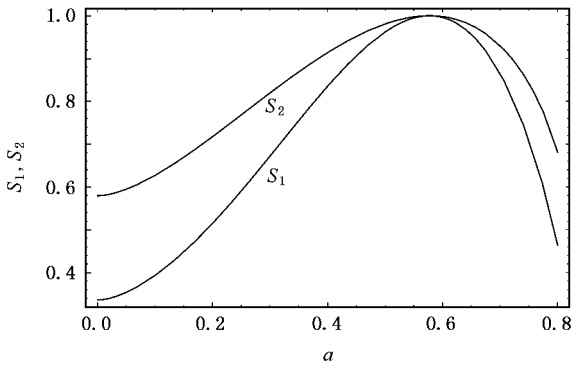


图 2 三态两体 II 型纠缠态所对应纠缠度 S_1 及 S_2 的变化规律

对于 III 型态, 以

$$|\Psi\rangle = a|11\rangle + be^{i\alpha}|10\rangle + ce^{i\beta}|01\rangle + de^{i\gamma}|0-1\rangle + fe^{i\xi}|-10\rangle + ge^{i\sigma}|-1-1\rangle$$

为例, 相应的熵积纠缠度为

$$S(\Psi) = \left\{ \left(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt[3]{2}v}{3u} - \frac{u}{3\sqrt[3]{2}} \right) \times \log_3 \left(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt[3]{2}v}{3u} - \frac{u}{3\sqrt[3]{2}} \right) + \left[\frac{1}{3} - \frac{(1+i\sqrt{3})v}{3\sqrt[3]{4}u} + \frac{1}{6\sqrt{2}}(1-i\sqrt{3})u \right] \times \log_3 \left[\frac{1}{3} - \frac{(1+i\sqrt{3})v}{3\sqrt[3]{4}u} + \frac{1}{6\sqrt{2}}(1-i\sqrt{3})u \right] + \left[\frac{1}{3} - \frac{(1-i\sqrt{3})v}{3\sqrt[3]{4}u} + \frac{1}{6\sqrt{2}}(1+i\sqrt{3})u \right] \times \log_3 \left[\frac{1}{3} - \frac{(1-i\sqrt{3})v}{3\sqrt[3]{4}u} + \frac{1}{6\sqrt{2}}(1+i\sqrt{3})u \right] \right\}^2. \quad (14)$$

式中

$$u = w + (-4 + 12\chi b^2c^2 + a^2d^2 + b^2d^2 + a^2f^2$$

$$+ c^2f^2 + d^2f^2 + a^2g^2 + b^2g^2 + c^2g^2) + w^2)^{1/6},$$

$$v = 3(b^2c^2 + a^2d^2 + b^2d^2 + a^2f^2 + c^2f^2 + d^2f^2 + a^2g^2 + b^2g^2 + c^2g^2) - 1,$$

$$w = -2a^6 - 2b^6 + 3b^4(c^2 + d^2 - 2f^2 + g^2) + 3a^4(-2b^2 - 2c^2 + d^2 + f^2 + g^2) + 3b^2(c^4 + d^4 - 2f^4 - f^2g^2 + g^4) + 2c^2(d^2 + f^2 - 2g^2) + 2d^2(f^2 + g^2) - (c^2 + d^2 + f^2 + g^2)(2c^4 + 2d^4 + \chi f^2 + g^2) + d^2(-5f^2 + 4g^2) + c^2(4d^2 - 5(f^2 + g^2)) + 3a^2(-2b^4 - 2c^4 + d^4 - 4d^2f^2 + f^4 + \chi d^2 + f^2)g^2 + g^4 - b^2(c^2 - 2d^2 + f^2 - 2g^2) + c^2(-d^2 + \chi f^2 + g^2)) - 54abcdfg \cos[\varphi].$$

当 $a = b = c = d = f = g = \frac{1}{\sqrt{6}}$, $\varphi = \alpha + \beta - \gamma - \xi + \sigma = 2k\pi$ 时, 纠缠度取极大值 $S_{K(\max)}(\Psi) = S_{\chi(\max)}(\Psi) = 0.62361$. 为了方便, 固定 $c = d = f = g = \frac{1}{\sqrt{6}}$ 时 $S_1(\Psi)$ 和 $S_2(\Psi)$ 的变化规律见图 3.

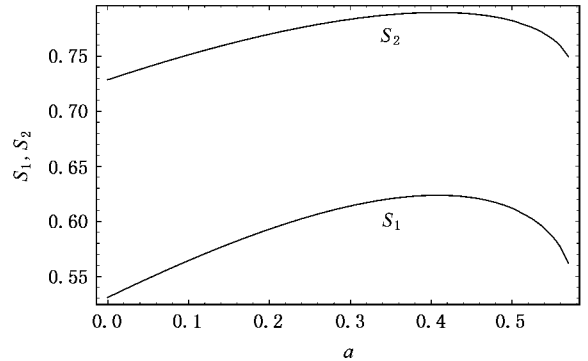


图 3 三态两体 III 型纠缠态所对应纠缠度 S_1 及 S_2 的变化规律

图 1—图 3 都显示了熵积纠缠度 $S_1(\Psi)$ 和 (1) 式所定义的纠缠度 $S_2(\Psi)$ 的变化趋势一致, 但在某些区域熵积纠缠度 $S_1(\Psi)$ 的变化更为迅速明显一些, 而 $S_2(\Psi)$ 曲线相对较为平缓, 且它们的极值点位置完全重合, 但 $S_2(\Psi)$ 的取值明显要比 $S_1(\Psi)$ 大. 出现这些特点的原因是在三态两体纯态情况下, 两个单粒子约化密度矩阵所得到的 von Neumann 熵是相等的. 对两态三体纯态, 由于三个单粒子约化密度矩阵的 von Neumann 熵不再相等, 情况将变得较为复杂^[31]. 总之, 图 1—图 3 中的两条曲线都完全反映了系统从非纠缠到纠缠的量子相变规律.

7. 结 论

本文通过所定义的纠缠度详细研究了两态两体和三体以及三态两体纯态纠缠的分类和度量. 结果显示, 在 SLOCC 等价的意义下, 纯态的不同纠缠类型可利用所定义纠缠度不同的极大值来表征. 我们的计算和分析发现, 两态三体和三态两体纯态各有三种 SLOCC 不等价的基本纠缠方式. 通过与熵积纠缠度的比较可见 (1) 式定义的纠缠度和 (11) 式定义

的熵积纠缠度都是对多体纯态纠缠度量的有效方法. 本文的主要结论是两态两体和三体及三态两体纯态系统的基本纠缠类型与相应纯态系统纠缠度的极大值个数相等. 我们猜想, 任一多态多粒子纯态系统在 SLOCC 下的不同纠缠方式应能通过寻找相应纠缠度的极大值得到. 但随着单粒子状态数及系统粒子数的增加, 相应的计算量将迅速增加, 从而这种计算本身也是一个非多项式问题. 但至少对 $N \leq 5$ 的少体系统, 这样的分析在目前是能够实现的.

-
- [1] Riebe M , Häffner H , Roos C F *et al* 2004 *Nature* **429** 734
- [2] Pan J W , Bouwmeester D , Daniell M *et al* 2000 *Nature* **403** 515
- [3] Luo Y H , Chan K T 2004 *Phys. Rev. A* **704** 042302
- [4] Jing J T , Zhang J , Yan Y *et al* 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 167903
- [5] Chiaverini J , Leibfried D , Schaetz T *et al* 2004 *Nature* **432** 602
- [6] Zhu S L , Wang Z D , Zanardi P 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 100502
- [7] Vedral V , Plenio M B , Rippin M A *et al* 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 2275
- [8] Vedral V , Plenio M B 1998 *Phys. Rev. A* **57** 1619
- [9] Horodecki M , Horodecki P , Horodecki R 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 2014
- [10] Rudolph O 2001 *J. Math. Phys.* **42** 5306
- [11] Rajagopal A K , Rendell R W 2002 *Phys. Rev. A* **66** 022104
- [12] Yu S , Chen Z B , Pan J W *et al* 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 080401
- [13] Partovi M H 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 077904
- [14] Dür W , Vidal G , Cirac J I 2000 *Phys. Rev. A* **62** 062314
- [15] Ye L , Guo G C 2000 *Chin. Phys.* **9** 171
- [16] Shi M J , Du J F , Zhu D P *et al* 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1912 (in Chinese) [石名俊、杜江峰、朱栋培等 2000 物理学报 **49** 1912]
- [17] Pan F , Liu D , Lu G Y *et al* 2004 *Int. J. Theor. Phys.* **43** 1241
- [18] Pan F , Liu D , Lu G Y *et al* 2005 *Phys. Rev. Lett. A* **336** 384
- [19] Bennett C H , Popescu S , Rohrlich D *et al* 2001 *Phys. Rev. A* **63** 012307
- [20] Wootters W K 2001 *Quant. Inf. Comp.* **1** 27
- [21] Bell J S 1964 *Physics* **1** 195
- [22] Greenberger D M , Horne M A , Zeilinger A 1989 *Bell 's Theorem , Quantum Theory , and Conceptions of the Universe* (Dordrecht : Kluwer) p69
- [23] Heydari H , Björk G 2005 *Quant. Inf. Compt.* **5** 146
- [24] Bechmann-Pasquucci H , Peres A 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 3313
- [25] Durt T , Cerf N J , Gisin N *et al* 2001 *Phys. Rev. A* **63** 012306
- [26] Brukner Č , Zukowski M , Zeilinger A 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 197901
- [27] Langford N K , Dalton R B , Harvey M D *et al* 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 053601
- [28] Thew R T , Acín A , Zbinden H *et al* 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 010503
- [29] Thew R T , Acín A , Zbinden H *et al* 2004 *Quant. Inf. Compt.* **4** 93
- [30] Linden N , Popescu S 1998 *Fortsch. Phys.* **46** 567
- [31] Cao W C , Liu D , Pan F *et al* 2006 *Sci. China G* **49** 606

Classification and quantification of qubit and qutrit multipartite pure state entanglement^{*}

Lu Guo-Ying^{1,2)} Pan Feng^{1)†}

¹⁾ *Department of Physics, Liaoning Normal University, Dalian 116029, China*

²⁾ *Department of Physics, Liaoning University, Shenyang 110036, China*

(Received 15 March 2006 ; revised manuscript received 11 December 2006)

Abstract

Classification and quantification of bipartite qubit, tripartite qubit, and bipartite qutrit entanglement are studied in detail based on the entanglement measure of multipartite pure states. The results show that different ways of pure state entanglement can be characterized by extremal values of the corresponding entanglement measure under the stochastic local operation and classical communication (SLOCC). Detailed analysis shows that there are three different kinds of entanglement under the SLOCC in both tripartite qubit and bipartite qutrit pure state systems. Comparison of the measure with the recently proposed entropy-product measure is made and briefly discussed.

Keywords : pure state entanglement, extremal entanglement, stochastic local operations and classical communication

PACC : 0365, 0365B

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10175031), the Natural Science Foundation of Liaoning Province, China (Grant No. 2001101053) and the Joint Research Program of Louisiana State University, U. S. A. and Liaoning Normal University, China (Grant No. C192135).

[†] Corresponding author. E-mail : daipan@dlut.edu.cn