

单离子各向异性影响下的一维铁磁链中的孤子

翁紫梅 陈浩†

(华南师范大学物理与电信工程学院, 广州 510006)

(2006 年 7 月 6 日收到, 2006 年 11 月 24 日收到修改稿)

利用行波解法, 研究了考虑交换各向异性和单离子各向异性的一维铁磁链, 得出椭圆函数波解和孤子解, 并讨论了单离子各向异性对椭圆函数波和孤子的影响. 研究表明: 单离子各向异性对一维铁磁链中椭圆函数波和孤子的激发及其稳定性有显著影响. 单离子各向异性不利于易轴铁磁链中椭圆函数波和孤子解的激发, 但有利于它们的稳定, 而在易平面铁磁链中, 单离子各向异性使椭圆函数波和孤子激发变得容易, 但不利于它们的稳定. 此外, 还讨论了单离子各向异性对一维各向同性铁磁链中的孤子激发具有的影响.

关键词: 各向异性, 单离子各向异性, 孤子, 铁磁链

PACC: 0365, 7510J, 7540G

1. 引言

1931 年 Bethe^[1]就对一维磁性系统进行了研究. 磁体由于具有许多不同的物理性质, 表现出不同的非线性局域激发, 例如畴壁、磁致旋转波、磁孤子等^[2]. 一维磁性系统的某些模型在理论上是完全可积的, 且得到的结果可以用于分析磁性材料的性质, 因此磁性材料中的非线性激发问题一直以来都使科学工作者极感兴趣. 特别是 20 世纪 70 年代后期准一维磁体的孤子激发在实验和理论研究上都取得了重大进展, 并且研究延伸到了具体的磁性材料中. 文献 [3, 4] 分别给出了各向同性 Heisenberg 铁磁链中的孤子解, 其中文献 [3] 采用施加了外磁场的实际铁磁链的唯象模型, 而文献 [4] 采用经典线性 Heisenberg 铁磁链的连续性模型. 文献 [5] 研究了在自旋 $s = 1/2$ 的 Ising 链中的畴壁动力学特性, 首次求出了畴壁的动力学因子. 文献 [6] 用中子散射实验证实了在易平面铁磁材料中有 sine-Gordon (SG) 孤子激发的存在, 文献 [7, 8] 用核磁共振和电子自旋共振以及光学方法和比热测定方法等也证实许多准一维铁磁和反铁磁材料中(如 CsNiF_3) 都存在 SG 孤子激发. 这使一维磁性材料的非线性孤子激发的研究呈现出重大的现实意义. 目前, 低维磁性材料中的孤子激发问题仍是凝聚态物理领域中理论和实验所关注的热

点之一^[9-15].

一维磁性系统的哈密顿量常描述为^[10-13]

$$H = J \sum_l S_l \cdot S_{l+1} - D \sum_l (S_l^z)^2 - \mu_B \sum_l S_l \cdot \vec{g} \cdot H,$$

等式右端第一项为各向同性的交换能 ($J < 0$ 为铁磁链, $J > 0$ 为反铁磁链), 第二项是单离子各向异性能, μ_B 为 Bohr 磁子, \vec{g} 是带有两个矩阵元的张量 (g_{\parallel} , g_{\perp}). 文献 [16, 17] 采用的哈密顿量仅考虑交换作用的各向异性, 而忽略单离子各向异性的影响, 且外加磁场采用 Aharonov-Bohm 磁通的形式. 而文献 [2, 18-20] 则同时考虑了多种各向异性的情况(如易轴、易平面、XYZ 型各向异性、双轴各向异性等), 并从 Landau-Lifshitz 方程出发, 得到了不少新颖而富有意义的结果(如 compacton, peakon 等新的孤子形式及双轴单孤子解、多孤子解等). 显然, 对于不同的各向异性情况, 系统将呈现出不同的非线性激发形式和物理性质. 本文在同时考虑交换作用的各向异性和单离子各向异性下, 应用行波解法研究在一维铁磁链中的孤子激发问题.

2. 哈密顿量和运动方程

无外磁场时铁磁链的哈密顿量为

$$H = - \frac{J}{2} \sum_l (S_l^+ S_{l+\delta}^- + S_l^- S_{l+\delta}^+)$$

† 通讯联系人. E-mail: chen hao@sclu.edu.cn

$$- \tilde{J} \sum_B S_l^z S_{l+\delta}^z - D \sum_l (S_l^z)^2, \quad (1)$$

式中 $l + \delta$ 表示 l 的最近邻格点, $\delta = \pm 1$, $S_l^+ = S_l^x \pm i S_l^y$ 及 S_l^z 为第 l 个格点上的自旋算符. J 和 \tilde{J} 为交换积分且 $\tilde{J} \geq J > 0$, D 是单离子各向异性常数, 且 $D > 0$ 表示具有易轴对称性的 Heisenberg 铁磁链, $D < 0$ 表示具有易平面对称性的铁磁链.

对 (1) 式作 Holstein-Primakoff 变换^[21],

$$\begin{aligned} S_l^+ &= (\sqrt{2S - a_l^+ a_l}) a_l \\ &\approx \sqrt{2S} \left(1 - \frac{a_l^+ a_l}{4S} \right) a_l, \\ S_l^- &= a_l^+ (\sqrt{2S - a_l^+ a_l}) \\ &\approx \sqrt{2S} a_l^+ \left(1 - \frac{a_l^+ a_l}{4S} \right), \\ S_l^z &= S - a_l^+ a_l. \end{aligned} \quad (2)$$

将 (2) 式代入 (1) 式并准确到 a_l 和 a_l^+ 的四次项得

$$\begin{aligned} H &= -2NS^2 \left(\tilde{J} + \frac{D}{2} \right) + S \sum_B [\tilde{J} (a_l^+ a_l + a_{l+\delta}^+ a_{l+\delta}) \\ &\quad - \mathcal{K} a_l a_{l+\delta}^+ + a_l^+ a_{l+\delta}] - \tilde{J} \sum_B a_l^+ a_l a_{l+\delta}^+ a_{l+\delta} \\ &\quad + D(2S - 1) \sum_l a_l^+ a_l - D \sum_l a_l^+ a_l^+ a_l a_l \\ &\quad + \frac{J}{4} \sum_B (a_l^+ a_{l+\delta}^+ a_{l+\delta} a_{l+\delta} + a_{l+\delta}^+ a_l^+ a_l a_l \\ &\quad + a_l^+ a_l^+ a_l a_{l+\delta} + a_{l+\delta}^+ a_{l+\delta}^+ a_{l+\delta} a_l), \end{aligned} \quad (3)$$

式中 N 是总的格点数, S 是每个格点上的自旋, a_l^+ 和 a_l 分别是第 l 个格点上的玻色子产生和湮没算符, 并满足对易关系

$$\begin{aligned} [a_l, a_l^+] &= \delta_{ll}, \\ [a_l, a_r] &= [a_l^+, a_r^+] = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

利用 $i\hbar \dot{a}_l = [a_l, H]$ 算符 a_l 的运动方程为

$$\begin{aligned} i\hbar \dot{a}_l &= -2Da_l^+ a_l a_l + [D(2S - 1) + 4\tilde{J}S] a_l \\ &\quad - 2JS(a_{l-1} + a_{l+1}) - 2\tilde{J}(a_{l+1}^+ a_{l+1} \\ &\quad + a_{l-1}^+ a_{l-1}) a_l + \frac{J}{2}(a_{l+1}^+ a_{l+1} a_{l+1} \\ &\quad + a_{l-1}^+ a_{l-1} a_{l-1} + a_{l+1}^+ a_l a_l \\ &\quad + 2a_l^+ a_l a_{l+1} + 2a_l^+ a_l a_{l-1}). \end{aligned} \quad (5)$$

引入满足 $a_l |\alpha_l\rangle = \alpha_l |\alpha_l\rangle$ 的相干态, 其中 α_l 为第 l 个格点上自旋的概率幅, 假定 $\alpha_l(t)$ 为空间缓变量, 采用连续近似可将 (5) 式变成

$$\begin{aligned} i\hbar \dot{\alpha}_l &= [D(2S - 1) + 4S(\tilde{J} - J)] \alpha_l - 2SJa^2 \alpha_{xx} \\ &\quad - 2\tilde{J} a^2 \alpha_l |\alpha_l|^2, \end{aligned}$$

$$- 4 \left(\tilde{J} - J + \frac{D}{2} \right) |\alpha_l|^2 \alpha_l. \quad (6)$$

若将所讨论的铁磁链闭合成一个环, 则 $\alpha(x, t)$ 满足周期边界条件

$$\alpha(x, t) = \alpha(x + l, t), \quad (7)$$

式中 $l = Na$ 为铁磁环的长度.

设方程 (6) 具有行波解

$$\alpha(x, t) = \phi(\eta) e^{i(kx - Et/\hbar)},$$

其中 $\phi(\eta)$ 是 $\eta = x - vt$ 的实函数, 则方程 (6) 可变为

$$k = \frac{\hbar v}{4JSa^2}, \quad (8)$$

$$(1 + \gamma\phi^2) \phi_{\eta\eta} + \gamma\phi\phi_{\eta}^2 + 2\mu\phi^3 - \lambda\phi = 0, \quad (9)$$

式中

$$\gamma = \frac{2\tilde{J}}{SJ},$$

$$\mu = \frac{\tilde{J} - J + \frac{D}{2}}{SJa^2}, \quad (10)$$

$$\lambda = \frac{D(2S - 1) + 4S(\tilde{J} - J) + 2SJk^2 a^2 - E}{2SJa^2}.$$

方程 (9) 为修正的非线性 Schrödinger 方程.

由于方程 (6) 的解具有行波解的形式, 周期性边界条件 (7) 式可变为

$$\phi(\eta) = \phi(\eta + l), \quad (11)$$

k 为波矢,

$$k = 2n\pi/l \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (12)$$

3. 椭圆函数波解及不同各向异性条件下的孤子解

方程 (9) 的解依赖于 μ 取正或取负, 故下面分 $\mu > 0$ 和 $\mu < 0$ 两种情况进行讨论.

3.1. $\mu > 0$ 的情况

由 (10) 式知, 当 $D > 0$ 或 $D < 0$ 且 $|D/2| <$

$\tilde{J} - J$ 时, $\mu > 0$. 对方程 (9) 积分一次得

$$(1 + \gamma\phi^2) \left(\frac{d\phi}{d\eta} \right)^2 = \mu(\phi_2^2 - \phi^2)(\phi^2 - \phi_1^2) \quad (13)$$

式中

$$\phi_1^2 \leq \phi^2 \leq \phi_2^2,$$

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 = \frac{\lambda}{\mu}, \quad (14)$$

$$\phi_1^2 \phi_2^2 = C,$$

其中 C 为积分常数. 类似文献 [22] 的作法, 我们对

C 分 $C > 0$ 和 $C < 0$ 两种情况讨论.

3.1.1. $C > 0$ 的情况

对方程(13)积分一次可得到方程(9)的椭圆函数波解为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{(1 + \gamma\phi_1^2)\phi_2^2}} \operatorname{dn}^{-1} \left(\sqrt{\frac{\phi_2^{-2} + \gamma}{\phi_2^{-2} + \gamma}}, q \right) \\ & + \frac{\gamma}{\sqrt{(1 + \gamma\phi_1^2)\phi_2^2}} \left[\left(\phi_2^2 + \frac{1}{\gamma} \right) \mathbb{K}(\tau, b, q) \right. \\ & \left. - \frac{1}{\gamma} \mathbb{K}(\tau, q) \right] = \sqrt{\mu}(\eta - \eta_0), \end{aligned} \quad (15)$$

式中 $\operatorname{dn}(x, q)$ 为第三类 Jacobi 椭圆函数 $\mathbb{K}(\tau, b, q)$ 和 $\mathbb{K}(\tau, q)$ 分别是第三类和第一类 Jacobi 椭圆积分,

$$\mathbb{K}(\tau, b, q) = \int_0^\tau \frac{d\theta}{(1 + b \sin^2 \theta) \sqrt{1 - q^2 \sin^2 \theta}} \quad (16)$$

$$\mathbb{K}(\tau, q) = \int_0^\tau \frac{d\theta}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 \theta}}, \quad (17)$$

式中

$$\begin{aligned} q^2 &= \frac{\phi_2^2 - \phi_1^2}{\phi_2^2(1 + \gamma\phi_1^2)}, \\ \tau &= \arcsin \sqrt{\frac{(1 + \gamma\phi_1^2)(\phi_2^2 - \phi^2)}{(1 + \gamma\phi^2)(\phi_2^2 - \phi_1^2)}}, \\ b &= -\frac{\gamma(\phi_2^2 - \phi_1^2)}{1 + \gamma\phi_1^2}. \end{aligned} \quad (18)$$

这里 $\eta_0 = x_0 - vt_0$ 为另一积分常数,它表示椭圆函数波在 t_0 时刻的极大值的位置在 x_0 . q 是上述给出的 Jacobi 椭圆函数和椭圆积分的模数,且 $0 < q^2 < 1$.

若所讨论的铁磁环是稀薄的,即每个格点上的粒子概率幅非常小,则有 $\phi^2 \ll 1$,以致 τ 可看作一常数,进而(15)式中的第二项亦可看作常数并入 η_0 中.因此,我们可以得到方程(9)的近似椭圆函数波解为

$$\begin{aligned} \phi(\eta) &= \left\{ \left(\frac{1}{\phi_2^2} + \gamma \right) \left[\operatorname{dn} \left(\frac{1}{q} \sqrt{\mu(\phi_2^2 - \phi_1^2)} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. \times (\eta - \eta_0), q \right] \right\}^{-2} - \gamma \quad (19) \end{aligned}$$

因为 Jacobi 椭圆函数 $\operatorname{dn}(x, q)$ 的周期为 $2\mathbb{K}(q)$,其中 $\mathbb{K}(q) = \mathbb{K}(\pi/2, q)$ 为第一类完全椭圆积分,则由周期边界条件(11)式可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{q} \sqrt{\mu(\phi_2^2 - \phi_1^2)} l &= 2n_1 \mathbb{K}(q) \\ (n_1 &= 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (20)$$

由(18)和(20)式可得

$$\phi_{1,2}^2 = \frac{1}{2\gamma} \left[-1 \pm \gamma B q^2 + \sqrt{(1 - \gamma B q^2)^2 + 4\gamma B} \right]. \quad (21)$$

式中

$$B = \frac{4n_1^2 \mathbb{K}^2(q)}{\mu l^2}.$$

将(21)式代入(14)式并结合(8)及(10)式,可得椭圆函数波激发的能量为

$$E = E_0 + \frac{1}{2} m v^2. \quad (22)$$

这里 $E_0 = E_g - E_b$ 为静止能量,

$$m = \frac{\hbar^2}{4SJa^2} \quad (23)$$

为有效质量,能隙为

$$E_g = D(2S - 1) + 4S(\tilde{J} - J), \quad (24)$$

而

$$E_b = \frac{SJ}{\tilde{J}} \left(\tilde{J} - J + \frac{D}{2} \right) \left[\sqrt{(1 - \gamma B q^2)^2 + 4\gamma B} - 1 \right] \quad (25)$$

为椭圆函数波的结合能, E_b 可看作由于非线性相互作用而降低的能量.

由 E_b 的表达式易得 $dE_b/dD > 0$, 即 $E_b(D > 0) > E_b(D = 0)$ 及 $E_b(D < 0) < E_b(D = 0)$. 同时,由于在本文中格点上的自旋 S 满足 Holstein-Primakoff 变换的适用条件即 $S \gg 1^{[21]}$, 因而,我们同样有 $dE_g/dD > 0$, 即 $E_g(D > 0) > E_g(D = 0)$ 及 $E_g(D < 0) < E_g(D = 0)$. 可见,当 $D > 0$ 时, D 的存在使椭圆函数波激发的结合能和能隙都增大,而当 $D < 0$ 时, D 的存在使椭圆函数波激发的结合能和能隙都减小. 因此,单离子各向异性 D 的存在不利于易轴铁磁环中的椭圆函数波激发态的产生,但有利于已激发的椭圆函数波激发态的稳定. 反之,对于易平面铁磁环,单离子各向异性的存在有利于椭圆函数波激发态的产生,但不利于椭圆函数波激发态的稳定存在.

对于椭圆函数波解(19)式,存在 $q \rightarrow 0$ 和 $q \rightarrow 1$ 这两种极限情况.

当 $q \rightarrow 0$ 时,是线性近似的情况.由 $\phi(\eta)$ 的归一化条件

$$\frac{1}{a} \int_0^l \phi^2(\eta) d\eta = 1,$$

解(19)式变为

$$\phi(\eta) = \sqrt{\frac{a}{l}},$$

这时的解为类自旋波激发.此时类自旋波激发的能量为

$$E_{sw} = E'_g + \frac{1}{2} m_{sw} v^2,$$

其中 m_{sw} 为类自旋波激发的有效质量,且 $m_{sw} = m$, m 是由(23)式所定义的椭圆函数波激发的有效质量.能隙为

$$E'_g = E_g - \frac{4a}{l} \left(\tilde{J} - J + \frac{D}{2} \right).$$

当 $q \rightarrow 1$ 时,即 $l \rightarrow \infty$,解(19)式变成孤子解

$$\phi(\eta) = \left(\gamma \csc^2 \frac{\sqrt{\mu\gamma a}}{2n_1} \cosh^2 \frac{\eta - \eta_0}{L_s} - \gamma \right)^{-1/2}, \quad (26)$$

式中

$$L_s = a \sqrt{\frac{2\tilde{J}}{\tilde{J} - J + D/2}} \cot \frac{\sqrt{2\tilde{J}(\tilde{J} - J + D/2)}}{2n_1 SJ}$$

为孤子的宽度.这是非线性最大时的极限情况,可见椭圆函数波为类自旋波与孤子的中间情况.孤子的峰值和能量分别为 P_s 和 E_s ,

$$P_s = \sqrt{\frac{SJ}{2\tilde{J}}} \tan \frac{\sqrt{2\tilde{J}(\tilde{J} - J + D/2)}}{2n_1 SJ},$$

$$E_s = E_0 + \frac{1}{2} m_s v^2.$$

这里 $E_0 = E_g - E_b$, E_g 为能隙(定义同上), E_b 为孤子的结合能, $m_s = m$ 为孤子的有效质量, m 是由(23)式所定义的椭圆函数波激发的有效质量,

$$E_b = \frac{SK(\tilde{J} - J + D/2)}{\tilde{J}} \tan^2 \frac{\sqrt{2\tilde{J}(\tilde{J} - J + D/2)}}{2n_1 SJ}.$$

图 1(a)和(b)分别给出 $D > 0$ 和 $D < 0$ 时(26)式所描述的孤子解.从图 1(a)可以看出,当 $D > 0$ 时,即对于易轴铁磁链,随着单离子各向异性 D 的增大,孤子的峰值逐渐增大,孤子宽度逐渐变窄,可见单离子各向异性 D 的存在使易轴铁磁链中的孤子激发更加稳定.而从图 1(b)可以看出,当 $D \leq 0$ 时,即对于易平面铁磁链,随着单离子各向异性 D 的增大,孤子的峰值逐渐减小,孤子宽度逐渐变宽,孤子激发变得很不稳定,可见单离子各向异性的存在不利于易平面铁磁链中孤子的稳定.从图 1(a)还可以看出, $D < 0$ 时的孤子峰值比 $D > 0$ 时明显减小,波形明显展宽.由此可知,易平面铁磁链中的孤子比易轴铁磁链中的孤子不稳定.

由孤子宽度、孤峰和孤子能量的表达式可知,当 $n_1 = 1$ 时孤子所处状态最为稳定,如图 1(c).从图 1(c)可以看出,孤子解随着 n_1 的增大发生了明显的变化,波峰降低,波形展宽,当 $n_1 = 4$ 时,孤子激发已经变得非常不明显.

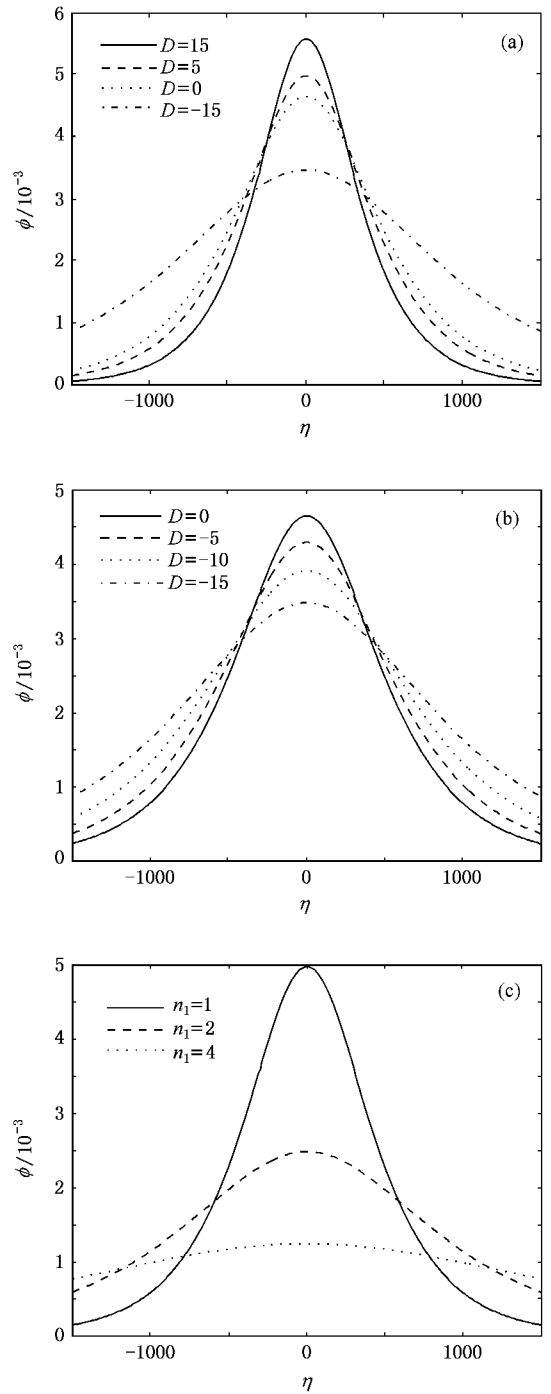


图 1 基于(26)式得到不同情况下的孤子解 (a) $D \geq 0$ 与 $D < 0$ 时的孤子解比较 (b) $D \leq 0$ 时的孤子解比较 (c) 当 $D = 5$, n_1 取不同值时的孤子解

做类似于前面对椭圆函数波的 E_g 和 E_b 的讨论,我们同样可以得到:在易轴铁磁链中,单离子各向异性的存在不利于孤子的产生,但有利于孤子的稳定存在,单离子各向异性越强,孤子越稳定.与此相反,在易平面铁磁链中,单离子各向异性的存在有

利于孤子的产生,但使产生的孤子变得很不稳定,单离子各向异性数值越大,孤子越不稳定,越容易消失.

3.1.2. $C < 0$ 的情况

在这种情况下,方程(9)的椭圆函数波解为

$$\frac{1}{\sqrt{\phi_2^2 - \phi_1^2}} \operatorname{cn}^{-1} \left(\sqrt{\frac{\phi_2^{-2} + \gamma}{\phi_2^{-2} + \gamma}} q' \right) + \frac{\gamma}{\sqrt{\phi_2^2 - \phi_1^2}} \times \left[\left(\phi_2^2 + \frac{1}{\gamma} \right) \operatorname{K}(\tau', b', q') - \frac{1}{\gamma} \operatorname{K}(\tau', q') \right] = \sqrt{\mu} (\eta - \eta_0), \quad (27)$$

式中 $\operatorname{cn}(x, q')$ 为第二类 Jacobi 椭圆函数, η_0 和 q' 的意义与上述 η_0 和 q 一样,且

$$q' = \frac{\phi_2^2(1 + \gamma\phi_1^2)}{\phi_2^2 - \phi_1^2}, \quad (28)$$

$$\tau' = \arcsin \sqrt{\frac{\phi_2^2 - \phi^2}{\phi_2^2(1 + \gamma\phi^2)}},$$

$$b' = -\gamma\phi_2^2.$$

类似 $C > 0$ 的做法可得方程(9)的另一个近似的椭圆函数波解

$$\phi(\eta) = \left\{ \left(\frac{1}{\phi_2^2} + \gamma \right) \left[\operatorname{cn}(\sqrt{\mu(\phi_2^2 - \phi_1^2)} \times (\eta - \eta_0), q') \right]^{-2} - \gamma \right\}^{-1/2}. \quad (29)$$

由于 $\operatorname{cn}^2(x, q')$ 的周期为 $2\operatorname{K}(q')$, 故周期边界条件(11)式变为

$$\frac{1}{q'} \sqrt{\mu(\phi_2^2 - \phi_1^2)} l = 2n_1' \operatorname{K}(q') \quad (n_1' = 1, 2, 3, \dots). \quad (30)$$

结合(8)(10)(14)和(30)式可得,椭圆函数波解的能量为

$$E' = E'_0 + \frac{1}{2} m v^2. \quad (31)$$

这里 $E'_0 = E_g - E'_b$ 为静止能量, m 和 E_g 分别为由(23)和(24)式定义的椭圆函数波的有效质量和能隙,

$$E'_b = \frac{S \operatorname{K}(\tilde{J} - J + D/2)}{\tilde{J}} \times \left[\sqrt{(1 - \gamma B')^2 + 4\gamma B' q'^2} - 1 \right]$$

为椭圆函数波激发的结合能,其中

$$B' = \frac{2n_1'^2 \operatorname{K}^2(q')}{\mu l^2}.$$

对于椭圆函数波解(29)式,也存在 $q' \rightarrow 0$ 和 $q' \rightarrow 1$ 这两种极限情况.

当 $q' \rightarrow 0$ 时, $\phi(\eta) = 0$, 这是方程(9)的一个平庸解,没有意义.事实上,当 $q'^2 < 1/2$ 时,结合能 E'_b 为负值,这种椭圆函数波激发态是不稳定的.

当 $q' \rightarrow 1$ 时, Jacobi 椭圆函数 $\operatorname{cn}(x, q') \rightarrow \operatorname{sech} x$. 显然,对这种极限情况的讨论与 $C > 0$ 时类似,所得出的结论也是类似的.

3.2. $\mu < 0$ 的情况

当 $D < 0$ 且 $|D/2| > \tilde{J} - J$ 时,由(10)式知, $\mu < 0$. 此时方程(9)可变为

$$(1 + \gamma\phi^2) \left(\frac{d\phi}{d\eta} \right)^2 = -\mu (\phi_2^2 - \phi^2) (\phi_1^2 - \phi^2), \quad (32)$$

式中

$$0 < \phi^2 < \phi_1^2 < \phi_2^2, \quad (33)$$

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 = \frac{\lambda}{\mu},$$

$$\phi_1^2 \phi_2^2 = d > 0,$$

其中 d 为积分常数.

对方程(32)积分一次可得方程(9)的椭圆函数波解为

$$\operatorname{K}(\tau'', b'', q'') = \sqrt{-\mu\phi_2^2(1 + \gamma\phi_1^2)} (\eta - \eta_0'), \quad (34)$$

式中

$$q''^2 = \frac{\phi_1^2(1 + \gamma\phi_2^2)}{\phi_2^2(1 + \gamma\phi_1^2)},$$

$$\tau'' = \arcsin \sqrt{\frac{\phi^2(1 + \gamma\phi_1^2)}{\phi_1^2(1 + \gamma\phi^2)}}, \quad (35)$$

$$b'' = \frac{\gamma\phi_1^2}{1 + \gamma\phi_1^2}.$$

用类似 $C > 0$ 的做法可得方程(9)的近似椭圆函数波解为

$$\phi(\eta) = \left\{ \left(\frac{1}{\phi_1^2} + \gamma \right) \left[\operatorname{sn}(\sqrt{-\mu\phi_2^2(1 + \gamma\phi_1^2)} \times (\eta - \eta_0''), q'') \right]^{-2} - \gamma \right\}^{-1/2}, \quad (36)$$

式中 $\operatorname{sn}(x, q'')$ 为第一类 Jacobi 椭圆函数. 由于 $\operatorname{sn}^2(x, q'')$ 的周期为 $2\operatorname{K}(q'')$, 故由周期边界条件(11)式可得

$$\sqrt{-\mu(\phi_2^2 - \phi_1^2)} l = 2n_1'' \operatorname{K}(q''). \quad (37)$$

结合(8)(10)(33)和(37)式,可得椭圆函数波的能量为

$$E'' = E'_0 + \frac{1}{2} m v^2. \quad (38)$$

这里 $E_0' = E_g - E_b'$ 为静止能量, m 和 E_g 分别为由 (23) 和 (24) 式所定义的椭圆函数波的有效质量和能隙,

$$E_b' = \frac{SJ\left(\tilde{J} - J + \frac{D}{2}\right)}{\tilde{J}} \times \left[\sqrt{[1 + \gamma B''(1 - q'^2)] + 4\gamma B''q'^2} - 1 \right]$$

为椭圆函数波激发的结合能, 其中

$$B'' = \frac{4n_1'^2 K^2(q'')}{-\mu l^2}.$$

容易证明 $E_b' < 0$, 故由 (36) 式所描述的是不稳定的椭圆函数波激发态.

4. 讨 论

4.1. 单离子各向异性对一维各向同性铁磁链的影响

仅考虑单离子各向异性的一维各向同性铁磁链的哈密顿量可表示为

$$H = -J \sum_{i\delta} \left[\frac{1}{2} (S_i^+ S_{i+\delta}^- + S_i^- S_{i+\delta}^+) + S_i^z S_{i+\delta}^z \right] - D \sum_i (S_i^z)^2. \quad (39)$$

类似上述做法, 我们可以得到与方程 (9) 形式完全一样的方程, 如

$$(1 + \gamma\phi^2)\phi_{\eta\eta} + \gamma\phi\phi_{\eta}^2 + 2\mu\phi^3 - \lambda\phi = 0,$$

只是相应的系数变为

$$\gamma = \frac{2}{S},$$

$$\mu = \frac{D}{2SJa^2},$$

$$\lambda = \frac{D(2S-1) + 2JSa^2 k^2 - E}{2JSa^2}.$$

当 $D > 0$ 时, 对于离子浓度较稀的易轴对称性 Ising 型铁磁链存在孤子解, 形如

$$\alpha(x, t) = \left(\gamma \operatorname{csc}^2 \frac{\sqrt{\mu\gamma} a}{2n_1} \cosh^2 \frac{\eta - \eta_0}{L_s} - \gamma \right)^{-1/2} \times e^{i(kx - Et/\hbar)}. \quad (40)$$

相应地, 孤子解的特征量——孤子宽度 L_s 、孤子峰值 P_s 及能量 E_s 分别为

$$L_s = 2al_0 \cot \frac{1}{2n_1 Sl_0},$$

$$P_s = \sqrt{\frac{S}{2}} \tan \frac{1}{2n_1 Sl_0},$$

$$E_s = E_0 + \frac{1}{2} m_s v^2,$$

其中在磁畴壁区域磁化空间不均匀性的特征尺度

$$l_0 = \sqrt{\frac{J}{D}},$$

静止能量

$$E_0 = D(2S-1) - \frac{SD}{2} \tan^2 \frac{1}{2n_1 Sl_0},$$

有效质量

$$m_s = \frac{\hbar^2}{4JSa^2}.$$

显然, 随着 D 的增大, l_0 越来越小, 孤子宽度逐渐变窄, 而孤子峰值却逐渐增大. 由此可见, 体系的各向异性越强, 孤子就越稳定. 当 $D \gg J$ 时, 孤子的宽度很窄, 而峰值很大, 此时铁磁链中有明显的孤子激发. 反之, 体系的各向异性越弱, 孤子就越不稳定, 当 $D \ll J$ 时, 孤子宽度变得很大, 而峰值很小, 此时铁磁链中的孤子激发很不明显. 对于 $D < 0$, 即易平面铁磁链的情况则无孤子解.

4.2. 外磁场对一维各向异性铁磁链的影响

对铁磁链施加一沿 z 轴的外磁场, 即哈密顿量表示为

$$H = -\frac{J}{2} \sum_{i\delta} (S_i^+ S_{i+\delta}^- + S_i^- S_{i+\delta}^+) - \tilde{J} \sum_{i\delta} S_i^z S_{i+\delta}^z - D \sum_i (S_i^z)^2 - g\mu_B B_z \sum_i S_i^z, \quad (41)$$

式中 g 为朗道因子, μ_B 为 Bohr 磁子, B_z 为 z 轴的磁场强度分量. 对应此哈密顿量仍可以得到与上述类似的结果, 体系的孤子解仍具有相同的形式,

$$\alpha(x, t) = \left(\gamma \operatorname{csc}^2 \frac{\sqrt{\mu\gamma} a}{2n_1} \cosh^2 \frac{\eta - \eta_0}{L_s} - \gamma \right)^{-1/2} e^{i(kx - Et/\hbar)},$$

$$\lambda = \frac{D(2S-1) + 4S(\tilde{J} - J) + 2SJk^2 a^2 + g\mu_B B_z - E}{2SJa^2},$$

$$\gamma = \frac{2\tilde{J}}{SJ},$$

$$\mu = \frac{\tilde{J} - J + \frac{D}{2}}{SJa^2}.$$

相应的孤子宽度 L_s 、峰值 P_s 及结合能 E_b 同样可以求出, 结果与第 3 节相同, 而能隙则变为

$$E_g = D(2S-1) + 4S(\tilde{J} - J) + g\mu_B B_z.$$

由此可见, 外磁场的存在只是使体系的能隙变大.

4.3. 实验验证设想

文献 [23] 利用中子散射实验观测了一维易平面反铁磁体 $(CD_3)_4NMnCl_3$ 中的孤子结构及孤子的峰值和宽度. 类似地, 我们可以利用中子散射实验观测一维易轴和易平面铁磁体中的孤子结构, 并通过改变单离子各向异性的符号和大小, 观测孤子的峰值和宽度的相应变化, 从而验证我们以上得到的结果.

5. 结 论

本文研究了同时考虑单离子各向异性及交换作用各向异性的一维铁磁链, 求出其椭圆函数波解和

孤子解, 并求出相应的特征量——有效质量、能隙、结合能、孤子宽度及孤子峰值. 结果表明, 对于易轴铁磁链, 单离子各向异性的存在不利于椭圆函数波和孤子解的激发, 但有利于它们的稳定. 单离子各向异性越强, 孤子变得越稳定. 而对于易平面铁磁链, 只有当 $|D/2| < \tilde{J} - J$ 时才有稳定的椭圆函数波解和孤子解, 且随着单离子各向异性数值的增大, 孤子较容易被激发, 但同时由于孤子的峰值降低, 波形展宽, 孤子激发却变得很不稳定. 单离子各向异性越强, 孤子越容易消失. 对于仅考虑单离子各向异性的一维各向同性铁磁链, 单离子各向异性对孤子的激发及稳定性的影响与各向异性铁磁链的情况完全相同. 本文中的结果对实验研究具有一定的指导意义.

- [1] Bethe H 1931 *Phys.* **71** 205
- [2] Kosevich A M, Ivanov B A, Kovalev A S 1990 *Phys. Rep.* **194** 117
- [3] Nakamura K, Sasada T 1974 *Phys. Lett. A* **48** 321
- [4] Tjon J, Wright J 1977 *Phys. Rev. B* **15** 3470
- [5] Villain 1975 *J. Phys. B-C* **79** 1
- [6] Mikeska H J 1978 *J. Phys. C* **11** L29
- [7] Kiems J K, Steiner M 1978 *Phys. Rev. Lett.* **41** 1137
- [8] Steiner M, Kiems J K 1978 *J. Phys. Lett.* **39** L493
- [9] Nguenang J P, Ayrekuen J K, Kofane T C 2004 *J. Phys. Condens. Matter* **16** 373
- [10] Huang C, Wang H Y, Wang E G 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 1593
- [11] Su G, Xing H Z, Xue D S *et al* 2000 *Int. J. Mod. Phys. B* **14** 2561
- [12] Zhu S H, Huang G X 2001 *Chin. Phys. Lett.* **18** 1316
- [13] Shi Y, Xing H Z, Zhang H W *et al* 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 280 (in Chinese)[石 玉、邢怀中、张怀武等 2005 物理学报 **54** 280]
- [14] Zhu S H, Huang G X, Xu Z X 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 2036 (in Chinese)[朱善华、黄国翔、徐在新 1997 物理学报 **46** 2036]
- [15] Li D J, Mi X W, Deng K *et al* 2006 *Chin. Phys.* **15** 39
- [16] Chen H, Chen Y 1996 *Acta Phys. Sin.* **45** 1249 (in Chinese)[陈浩、陈 渊 1996 物理学报 **45** 1249]
- [17] Chen H, Chen Y 1998 *Commun. Theor. Phys.* **30** 173
- [18] Kovalev A S, Gvozdkova M V 1999 *Low Temp. Phys.* **25** 184
- [19] Liu W M, Zhang W S, Pu F C *et al* 1999 *Phys. Rev. B* **60** 12893
- [20] Liu W M, Wu B, Zhou X *et al* 2002 *Phys. Rev. B* **65** 172416
- [21] Li Z Z 2002 *Solid State Theory* (2nd ed) (Beijing: Higher Education Press) (in Chinese)[李正中 2002 固体理论(第二版) (北京: 高等教育出版社)]
- [22] Chen H, Chen Y 2000 *Phys. Stat. Sol. (b)* **217** 847
- [23] Regnault L P, Boucher J P, Rossat-Mignod J *et al* 1982 *J. Phys. C* **15** 1261

Solitons in a one-dimensional ferromagnetic chain under the influence of single-ion anisotropy

Weng Zi-Mei Chen Hao[†]

(*School of Physics and Telecommunication Engineering, South China Normal University, Guangzhou 510006, China*)

(Received 6 July 2006; revised manuscript received 24 November 2006)

Abstract

Cnoidal wave solutions and soliton solutions in a one-dimensional ferromagnetic chain with anisotropy exchange interaction and single-ion anisotropy are obtained through travelling wave solution method and the influence of single-ion anisotropy on cnoidal waves and solitons is discussed. The results indicate that single-ion anisotropy makes the cnoidal waves and solitons easy to excite in an easy-plane ferromagnetic chain but difficult in an easy-axis one, and makes them more stable in the easy-axis ferromagnetic chain but less stable in the easy-plane one. The influence of single-ion anisotropy on soliton excitations in a one-dimensional isotropic ferromagnet is also discussed.

Keywords : anisotropy , single-ion anisotropy , soliton , ferromagnetic chain

PACC : 0365 , 7510J , 7540G

[†] Corresponding author. E-mail : chen hao@senu.edu.cn