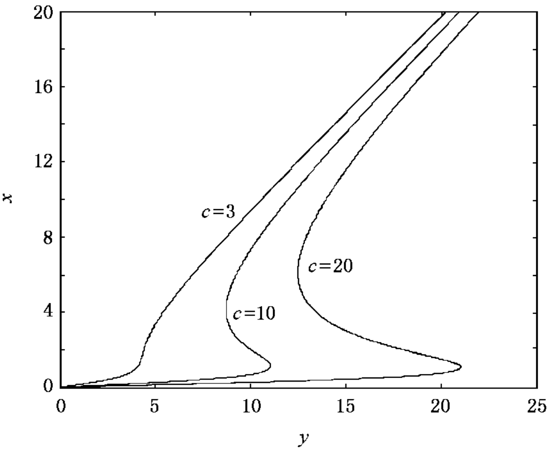

图 1　对于不同的 c，输出光模 x 的定态作为注入激光模 y 的函数曲线

我们在系统(1)的双稳态附近选择 $y=y_0$，以幅度 A、频率 Ω 对 y_0 进行周期调制，并且考虑由于原子瞬时的释放和碰撞而引起的注入激光模和控制参数的微小涨落．假定这些微小涨落可以用高斯噪声来模拟，对方程(1)可作如下替换：

$$y(t)\rightarrow y_0+A\cos\Omega t+\eta(t),\tag{4}$$

$$c\rightarrow c+\xi(t).\tag{5}$$

这里 $\xi(t)$和 $\eta(t)$是高斯白噪声，性质可由其均值和相关函数表示，

$$\begin{aligned}\langle\xi(t)\rangle&=\langle\eta(t)\rangle=0,\\ \langle\xi(t)\xi(s)\rangle&=2D_{\mathrm{m}}\delta(t-s),\\ \langle\xi(t)\eta(s)\rangle&=2D_{\mathrm{a}}\delta(t-s),\\ \langle\xi(t)\eta(s)\rangle&=\langle\eta(t)\xi(s)\rangle=0,\end{aligned}\tag{6}$$

其中 D_{m} 和 D_{a} 分别为 $\xi(t)$和 $\eta(t)$的噪声强度．方程(1)可用郎之万方程表示，

$$\begin{aligned}\dot{x}=y_0-x-\frac{2cx}{1+x^2}+A\cos\Omega t\\ +\frac{2x}{1+x^2}\xi(t)+\eta(t).\end{aligned}\tag{7}$$

方程(6)，(7)对应的福克-普朗克方程为

$$\begin{aligned}\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t}&=-\frac{\partial}{\partial x}f(x)\rho(x,t)\\ &\quad+\frac{\partial^2}{\partial x^2}G(x)\rho(x,t),\end{aligned}\tag{8}$$

其中

$$\begin{aligned}f(x)&=y_0-x-\frac{2cx}{1+x^2}\\ &\quad+\frac{1}{2}G'(x)+A\cos\Omega t,\\ G(x)&=\frac{D_{\mathrm{m}}x^2}{(1+x^2)^2}+D_{\mathrm{a}}.\end{aligned}\tag{9}$$

由方程(8)，(9)，可得系统的准稳态概率密度函数为

$$\rho_{\mathrm{st}}(x)=N[G(x)]^{-1/2}\exp\Big[-\frac{\widetilde{U}(x)}{D_{\mathrm{a}}}\Big],\tag{10}$$

其中 N 为归一化常数，$\widetilde{U}(x)$为广义势函数．

$$\begin{aligned}\widetilde{U}(x)&=\frac{1}{2}x^2-y_0x+\alpha_1\ln(2x^2+R+2-a)\\ &\quad+\alpha_2\ln(2x^2+R+2+a)\\ &\quad+\beta_1\arctan\Big(\frac{2x^2}{d}\Big)+\beta_2\arctan\Big(\frac{2x^2}{b}\Big)\\ &\quad+\Big\{-x+\frac{1}{ab}[R^2+2R+aR]\\ &\quad\times\arctan\Big(\frac{2x}{b}\Big)+\frac{1}{ad}[-R^2-2R+aR]\\ &\quad\times\arctan\Big(\frac{2x}{d}\Big)\Big\}A\cos\Omega t,\end{aligned}\tag{11}$$

其中

$$\begin{aligned}R&=D_{\mathrm{m}}/D_{\mathrm{a}},\\ a&=\sqrt{R(R+4)},\\ b&=\sqrt{2R+4+2a},\\ d&=\sqrt{2R+4-2a},\\ \alpha_1&=(aR+2Rc-R^2+8c-2ac\\ &\quad-4R+2a)/(4R+16),\\ \alpha_2&=(-aR+2Rc-R^2+8c+2ac\\ &\quad-4R-2a)/(4R+16),\\ \beta_1&=(-y_0aR-2ay_0+y_0R^2\\ &\quad+4y_0R)/[d(R+4)],\\ \beta_2&=(y_0aR+2ay_0+y_0R^2\\ &\quad+4y_0R)/[b(R+4)].\end{aligned}\tag{12}$$

利用平均首次穿越时间的定义和最陡下降方法[3]，可得粒子分别由稳态 x_{s1} 和 x_{s2} 所在的势阱逃逸速率 $W_{\pm}$ 的表达式为

$$\begin{aligned}W_{+}&=\frac{|U''(x_{\mathrm{s1}})U''(x_{\mathrm{un}})|^{1/2}}{2\pi}\\ &\quad\times\exp\Big\{-\frac{1}{D_{\mathrm{a}}}[\widetilde{U}(x_{\mathrm{un}})-\widetilde{U}(x_{\mathrm{s1}})]\Big\},\end{aligned}\tag{13}$$

$$\begin{aligned}W_{-}&=\frac{|U''(x_{\mathrm{s2}})U''(x_{\mathrm{un}})|^{1/2}}{2\pi}\\ &\quad\times\exp\Big\{-\frac{1}{D_{\mathrm{a}}}[\widetilde{U}(x_{\mathrm{un}})-\widetilde{U}(x_{\mathrm{s2}})]\Big\},\end{aligned}\tag{14}$$

其中 x_{s1} 和 x_{s2} 为两个稳态($x_{\mathrm{s1}}<x_{\mathrm{s2}}$)，$x_{\mathrm{un}}$ 为不稳态，$\widetilde{U}(x)$的意义同(11)，(12)式．

根据两态模型理论，$W_{\pm}$ 关于小参数 $A\cos\Omega t$ 展开到 A 的一次项，

$$W_+ = \mu_1 - \beta_1 A\cos\Omega t,$$
$$W_- = \mu_2 + \beta_2 A\cos\Omega t, \tag{15}$$

其中

$$\bar{\beta} = A\cos\Omega t,$$
$$\mu_1 = W_+\big|_{\bar{\beta}=0},$$
$$\mu_2 = W_-\big|_{\bar{\beta}=0},$$
$$\beta_1 = -\frac{\mathrm{d}W_+}{\mathrm{d}\bar{\beta}}\bigg|_{\bar{\beta}=0},$$
$$\beta_2 = \frac{\mathrm{d}W_-}{\mathrm{d}\bar{\beta}}\bigg|_{\bar{\beta}=0}.$$

当输入的信号频率 $\Omega \ll 1$ 时,可以认为系统在各个吸引域到达局域平衡所需的时间远小于两个吸引域之间概率整体平衡所需的时间,也远小于系统跟随信号变化所需的时间. 在绝热近似条件下,两个势阱中的总概率量 $n_\pm$ 满足主方程

$$\dot{n}_+ = -\dot{n}_- = W_-(t)n_- - W_+(t)n_+. \tag{16}$$

将(16)式代入(15)式可计算出平均自相关函数[32],由于绝热近似要求信号幅度 $A \ll 1$,忽略 A 的二次项后得到信噪比

$$\tilde{R} = \frac{A\pi^2(\mu_1\beta_2 + \mu_2\beta_1)^2}{4\mu_1\mu_2(\mu_1 + \mu_2)}. \tag{17}$$

3. 结果及讨论

根据(17)式,我们在图 2、图 3 中给出了信噪比随不同的噪声参数变化曲线.

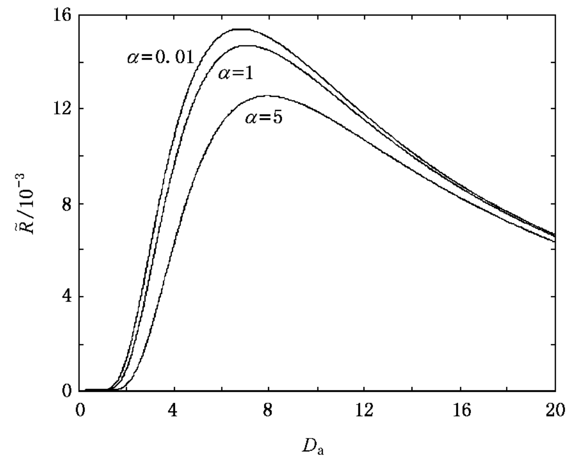

图 2 $\tilde{R}$ 作为加性噪声强度 D_a 的函数随乘性噪声强度 D_m 变化的曲线 $c = 20, y_0 = 15$

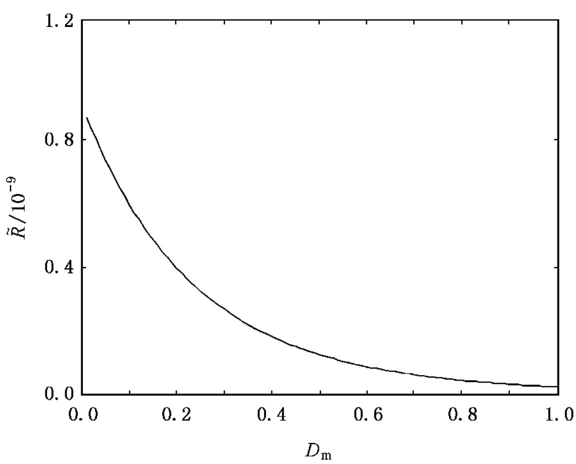

图 3 $\tilde{R}$ 随着乘性噪声强度 D_m 变化的曲线 $c = 20, y_0 = 15, D_a = 0.6$

图 2 为信噪比 $\tilde{R}$ 作为加性噪声强度 D_a 的函数随着不同的乘性噪声强度 D_m 变化的曲线. 从图 2 可以看出,随着加性噪声强度 D_a 的增加,信噪比曲线上有单峰出现,即出现了随机共振,并且随着乘性噪声强度 D_m 的增加峰的位置右移. 从图 2 还可以看出,$\tilde{R}$ 随着 D_m 的增加而单调减小,从而 $\tilde{R}$ 作为 D_m 的函数,其信噪比曲线上不会出现随机共振现象. 图 3 为信噪比 $\tilde{R}$ 作为乘性噪声强度 D_m 的函数变化曲线. 从图 3 中可以看出,$\tilde{R}$ 随着 D_m 的增加而单调减小,其信噪比曲线中确实没有出现共振现象,这和从图 2 中分析所得结果是一致的. 从图 3 还可以看到,$\tilde{R}$ 作为 D_m 的函数随着 D_a 的增加单调减小的速度在迅速变慢,以至于在一个图中我们只能看到 D_a 比较大时 $\tilde{R}$ 作为 D_m 的函数的信噪比曲线.

4. 结 论

通过研究噪声对光学双稳系统中信噪比的影响,发现加性噪声和乘性噪声对输出信噪比的影响是不同的. 信噪比 $\tilde{R}$ 随着加性噪声强度 D_a 的变化会出现随机共振现象,而随着乘性噪声强度 D_m 的变化却是单调减小的,没有出现随机共振现象.

[1] Benzi R，Sutera A，Vulpiana A 1981 *Physica* A **14** L453
[2] Nicolis C，Nicolis G 1981 *Tellus* **33** 225
[3] Hu G 1994 *Stochastic Force and Nonliear Systems* (Shanghai: Shanghai Scientific and Technolotgical Education Publishing House) (in Chinese) [**胡 岗** 1994 **随机力与非线性系统（上海：上海科技教育出版社）**]
[4] Gammaltoni L，Hanggi P，Jung P *et al* 1988 *Rev*. *Mod*. *Phys*. **70** 223
[5] Hu G，Nicolis G，Nicolis C 1990 *Phys*. *Rev*. A **42** 2030
[6] McNamara B，Wiesenfeld K，Roy R 1988 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **60** 2626
[7] Zhang L Y，Cao L，Wu D J 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 1174 (in Chinese) [**张良英、曹 力、吴大进** 2003 **物理学报 52** 1174]
[8] Kang Y M，Xu J X，Xie Y 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 802 (in Chinese) [**康艳梅、徐健学、谢 勇** 2003 **物理学报 52** 802]
[9] Liang G Y 2003 *Chin*. *Phys*. **12** 0377
[10] Luo X Q，Zhu S Q 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 977 (in Chinese) [**罗晓琴、朱士群** 2002 **物理学报 51** 977]
[11] Wang J，Cao L，Wu D J 2004 *Chin*. *Phys*. **13** 1811
[12] Luo X Q，Zhu S Q 2004 *Chin*. *Phys*. **13** 1201
[13] Xu W，Jin Y F，Li W *et al* 2005 *Chin*. *Phys*. **14** 1077
[14] Luo X Q，Zhu S Q 2003 *Phys*. *Rev*. E **67** 21104
[15] Hanggi P，Talkner P，Borkovec M 1990 *Rev*. *Mod*. *Phys*. **62** 251
[16] Fox R F，Lu Y N 1993 *Phys*. *Rev*. E **48** 3390
[17] Alfonsi L，Gammaitoni L，Santucci S *et al* 2000 *Phys*. *Rev*. E **62** 299
[18] Hu G 1993 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **71** 807
[19] Guo F，Zhou Y R，Jiang S Q *et al* 2006 *Chin*. *Phys*. **15** 947
[20] Berdichevsky V，Gitterman M 1999 *Phys*. *Rev*. E **60** 1494
[21] Jin Y F，Xu W，Li W *et al* 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 2562 (in Chinese) [**靳艳飞、徐 伟、李 伟等** 2005 **物理学报 54** 2562]
[22] Porra J M 1997 *Phys*. *Rev*. E **55** 6533
[23] Dhara A K，Mukhopadhyay T 1999 *Phys*. *Rev*. E **60** 2727
[24] Mitaim S，Kosko B 1998 *Proj*. *IEEE* **86** 2152
[25] Jung P 1995 *Phys*. *Lett*. A **220** 219
[26] Xu B，Duan F，Bao R *et al* 2002 *Chaos Solitons Frac*. **13** 633
[27] Kapitaniak T 1993 *Chaos Solitons Frac*. **3** 405
[28] Ko J Y，Otsuka K，Kubota T 2001 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **86** 4025
[29] Matyjaskiewicz S，Krawiecki A，Holyst J A *et al* 2001 *Phys*. *Rev*. E **63** 026215
[30] Gibbs M，McCall S L，Venkatesan T N C 1976 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **36** 1135
[31] Bartussek R，Hanggi P，Jung P 1994 *Phys*. *Rev*. E **49** 3930
[32] Wio H S，Bouzat A R 1999 *Braz*. *J*. *Phys*. **29** 136

Stochastic resonance in optical bistable system*

Ning Li-Juan Xu Wei†
(*Department of Applied Mathematics*，*Northwestern Polytechnical University*，*Xi'an* 710072，*China*)
(Received 14 July 2006；revised manuscript received 9 November 2006)

Abstract

The stochastic resonance (SR) in an optical bistable system under the simultaneous action of multiplicative and additive noises and periodic signal is studied using the adiabatic approximation theory. The signal-to-noise ratio (SNR) is a non-monotonic function of intensity of additive noise，in which the SR phenomenon appears. The SNR decreased with the intensity of multiplicative noise，and SR phenomenon does not appear. So the effects of additive and multiplicative noise on the output SNR are different.

Keywords：stochastic resonance，signal-to-noise ratio，multiplicative noise，additive noise
PACC：0540，0250

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10472091，10332030) and the Natural Science Foundation of Shaanxi Province，China (Grant No. 2003A03).
† E-mail：weixu@nwpu.edu.cn