第 56 卷 第 4 期 2007 年 4 月
1000-3290/2007/56(04)/1948-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.56,No.4,April,2007
©2007 Chin.Phys.Soc.

一种研究二元对称离散信道平均互信息的新方法*

肖海林　聂在平

(电子科技大学电子工程学院,成都　610054)

(2006 年 5 月 16 日收到;2006 年 11 月 27 日收到修改稿)

在有干扰(噪声)无记忆信道和有记忆信道两种情况下,运用协同学的方法研究如何分配输入概率获取二元对称离散信道最大的平均互信息. 研究结果表明:对于无记忆二元对称离散信道,最大平均互信息与信息论中相同输入概率使平均互信息最大化的结果是一致的;对于干扰(噪声)有记忆二元对称离散信道,考虑输入、输出符号满足不同程度的记忆度和干扰(噪声)因子情况下,得到符号最佳输入概率. 拓展了一种研究信息论的方法.

关键词:协同学,二元对称离散信道,互信息,转移概率

PACC:0540,0550,0560

1. 引　　言

协同学理论是建立在多学科联系(如动力系统理论和统计物理学之间的联系)的基础上,揭示了物态变化的普遍程式:"旧结构-不稳定性-新结构",即随机"力"和决定性"力"之间的相互作用把系统从它们的旧状态驱动到新组态,并且确定实现的那个新组态. 协同学具有广阔的应用范围,它在物理学、化学、生物学、天文学、经济学、社会学以及管理科学等许多方面都取得了重要的应用成果[1—6]. 然而,以前几乎没有涉及到应用协同学来研究信息论.

二元对称离散信道是一种最简单也很重要的信道,常用的某些实际信道,如微波、卫星、深空通信信道就可以用它来近似. 在通信系统中,信息的传递不只是决定于信息源所发出的平均信息量(信源的熵),而且与信道的干扰程度有关. 在信息传输中,接收端所得到的信息量就是剔除各种干扰的结果[7,8]. 若信道任一时刻输出符号只统计依赖于对应时刻的输入符号,而与非对应时刻的输入符号及其他任何时刻的输出符号无关,则这种信道称为无记忆信道. 若输出符号不但与对应时刻的输入符号有关,而且还与此前其他时刻信道的输入符号及输出符号有关,称为有记忆信道. 接收端所得到的平均信息量(也称平均互信息)还与输入概率有关.

关于如何分配输入概率才能使平均互信息最大化,目前还没有一个通用的解法[9]. 在本文中,我们采用协同学的方法解决二元对称离散信道输入概率在有干扰(噪声)无记忆信道和有记忆信道两种情况下怎样获取最大的平均互信息的问题.

2. 二元对称离散信道模型及理论分析

2.1. 二元对称离散无记忆信道

如图 1 所示,设信道具有离散的二元输入和输

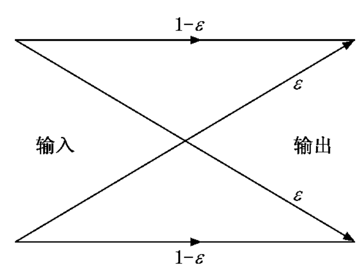

图 1　二元对称离散信道

出序列,输入值的集合 $X=\{0,1\}$和输出值的集合 $Y=\{0,1\}$,考虑信道噪声和其他干扰导致传输的二进制序列发生统计独立的差错,交叉概率 ε 满足

$$M(Y=0\mid X=1)=M(Y=1\mid X=0)=\varepsilon,\tag{1}$$

*国家高技术研究发展计划(批准号:2002AA123032)和电子科技大学创新团队支持计划资助的课题.

$$M(Y=1\mid X=1)=M(Y=0\mid X=0)=1-\varepsilon. \tag{2}$$

设集合 $X=\{0,1\}$ 的个数为 N, 0 的个数为 n, 则 1 的个数为 $N-n$. 假设信道传输过程中, 有一个元素判决发生错误, 集合构成的转移概率表示为

$$W[(n+1)\leftarrow n]\equiv W_0=n\varepsilon, \tag{3}$$

$$W[(n-1)\leftarrow n]\equiv W_1=(N-n)\varepsilon, \tag{4}$$

$$W[n'\leftarrow n]\equiv 0 \qquad (n'\neq n\pm 1). \tag{5}$$

概率变化的主方程为[10]

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}P(n,t)}{\mathrm{d}t}&=[W_1(n+1)P(n+1;t)\\&-W_1(n)P(n;t)\\&+W_0(n-1)P(n-1;t)\\&-W_0(n)P(n;t)],\end{aligned} \tag{6}$$

式中 $P(n;t)$ 为离散时间内集合 $Y\{0,1\}$ 中符号数的概率. 从状态 n 到 $(n+1)$ 和 $(n-1)$ 的概率流

$$\begin{aligned}J_0(n;t)&=W_0(n)P(n;t),\\J_1(n;t)&=W_1P(n;t).\end{aligned} \tag{7}$$

状态 n 与状态 $(n+1)$ 之间的净流

$$k(n;t)=J_0(n;t)-J_1(n+1;t). \tag{8}$$

主方程的连续形式

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}P(n;t)}{\mathrm{d}t}&=[k(n-1;t)-k(n;t)]\\&=-\Delta k(n,t).\end{aligned} \tag{9}$$

流的边界条件为

$$J_0(N;t)=J_1(N;t)=0, \tag{10}$$

$$k(N;t)=k(N-1;t)=0. \tag{11}$$

设交叉概率

$$\varepsilon=\nu e^{x},$$

其中 $x=n/N$, 它描述符号 0 的输入概率, ν 为归一化参数, 将 ε 它代入 (3), (4) 式中, 分别得到转移概率

$$\begin{aligned}W_0&=\nu n e^{x},\\W_1&=\nu(N-n)e^{x}.\end{aligned} \tag{12}$$

将 (12) 式代入 (6) 式, 得到主方程的解 $P(n;t)$, 再经过斯特林公式近似, 有

$$P_{\mathrm{St}}[\nu(x)]=P_{\mathrm{St}}(0)\exp[\nu(x)], \tag{13}$$

式中

$$\nu(x)=-[x\ln x+(1-x)\ln(1-x)].$$

$\nu(x)$ 分布的极值

$$\left.\frac{\partial\nu(x)}{\partial x}\right|_{x=x_0}=-[\ln x_0-\ln(1-x_0)]=0. \tag{14}$$

由 (14) 式得到 $x_0=1/2$. 当 $\nu(x)$ 取极值时, 达到无干扰(噪声)一一对应信道, 信道平均互信息达到最大. 用 $H(X)$ 代表接收到输出符号以前关于输入变量 X 的平均不确定性, 定义

$$H(X)=-\sum_X P(X)\log P(X).$$

用 $H(X\mid Y)$ 代表接收到输出符号后关于输入变量 X 的平均不确定性,

$$H(X\mid Y)=\sum_{XY}P(xy)\log\frac{1}{P(x\mid y)}.$$

通过信道传输消除了一些不确定性, 获得了一定的信息. 定义平均互信息

$$\begin{aligned}I(X;Y)&=H(X)-H(X\mid Y)\\&=\sum_{XY}P(x)P(y\mid x)\log\frac{P(y\mid x)}{P(y)},\end{aligned} \tag{15}$$

式中

$$P(y)=\sum_X P(x)P(y\mid x).$$

输入概率矩阵

$$\begin{bmatrix}X\\P(X)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}. \tag{16}$$

将 (16) 及 (1) 式代入 (15) 式, 得

$$I_{\max}=1-H(\varepsilon). \tag{17}$$

这与信息论中相同输入概率使平均互信息最大化的结果是一致的[9].

2.2. 二元对称离散有记忆信道

假设有干扰(噪声)记忆信道交叉概率

$$\varepsilon=\nu\exp(kx+\delta),$$

其中 k 描述符号记忆度, δ 为干扰(噪声)因子, 将交叉概率 ε 代入 (3), (4) 式中, 分别得

$$\begin{aligned}W_0&=\nu n\exp(kx+\delta),\\W_1&=\nu(N-n)\exp(kx+\delta).\end{aligned} \tag{18}$$

将 (18) 式代入 (6) 式, 得到主方程的解 $P(n;t)$, 经过斯特林公式近似, 有

$$P_{\mathrm{St}}[\nu(x)]=P_{\mathrm{St}}(0)\exp[\nu(x)], \tag{19}$$

式中

$$\nu(x)=2\delta x+kx^2-[x\ln x+(1-x)\ln(1-x)].$$

$\nu(x)$ 分布的极值为

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial\nu(x)}{\partial x}\right|_{x=x_m}&=2\delta+2kx_m-[\ln x_m-\ln(1-x_m)]\\&=0.\end{aligned} \tag{20}$$

化简 (20) 式, 得

$$\ln\frac{x_m}{1-x_m}=2\delta+2kx_m. \tag{21}$$

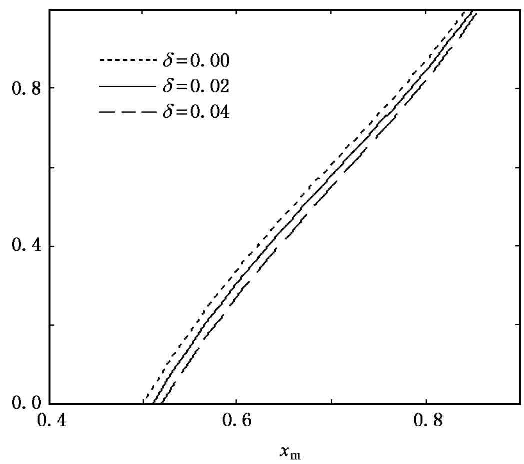

图 2 符号记忆度 k、干扰(噪声)因子 δ 以及最佳输入概率 x_m 的关系

(21)式是一个超越方程. 图 2 描述符号记忆度 k、干扰(噪声)因子 δ 以及最佳输入概率 x_m 的变化关系. 从图 2 中能够看到:在干扰(噪声)因子 δ 相同的情况下,最佳输入概率 x_m 随记忆度 k 的增加而增大. 这是因为有记忆信道某一瞬间输出符号不但与对应时刻的输入符号有关,而且还与此前其他时刻信道的输入符号以及输出符号有关,要获得最大的平均互信息,所涉及输入符号概率较大. 在记忆度 k 相同的情况下,最佳输入概率 x_m 随干扰(噪声)因子 δ 的增大而增大. 这是因为干扰(噪声)能够扭转信号极性的缘故. 对于有干扰(噪声)不同记忆程度的二元对称离散信道,都能找到最佳的输入概率,从而能够获取最大的信道平均互信息.

3. 结 论

本文采用协同学的方法研究了有干扰(噪声)在有、无记忆二元对称离散信道两种情况下的最大平均互信息,得到无记忆二元对称离散信道最大平均互信息. 这与信息论中相同输入概率使平均互信息最大化的结果是一致的. 研究有干扰(噪声)有记忆二元对称离散信道,考虑输入、输出符号满足不同程度的记忆度和干扰(噪声)因子情况下,得到符号最佳输入概率. 这也正好说明能够从另一个角度解决信息论中存在"关于如何分配输入概率才能使平均互信息最大化,目前还没有一个通用的解法[9]"的问题.

[1] Benaschi M, Succi S 2000 *Phys. Rev.* A **62** 1851
[2] Huang P H, Kong L J, Liu M R 2002 *Chin. Phys.* **11** 678
[3] Liu F, Ren Y, Shan X M 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1175 (in Chinese) [刘 峰、任 勇、山秀明 2002 物理学报 **51** 1175]
[4] Liu Q X, Jin Z 2005 *Chin. Phys.* **14** 1370
[5] Guo S L, Wei Y F, Xue Y 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3336 (in Chinese) [郭四玲、韦艳芳、薛 郁 2006 物理学报 **55** 3336]
[6] Haken H 1984 *Synergetic Application in Socioeconomic Systems* (Beijing: Higher Education Press) (in Chinese) [哈肯 H 1984 协同学在社会经济系统的应用(中译本)(北京:高等教育出版社)]
[7] Tallini L G 2005 *IEEE Comp. Trans.* **54** 232
[8] Bary A, Zemor G 2005 *IEEE Inf. Theory Trans.* **51** 1625
[9] Proakis J G 2004 *Digital Communications* (4th ed) (Beijing: Publishing House of Electronics Industry) Chap 7
[10] Gong S M 1986 *Non-Equilibrium Statistic Thermodynamics* (Shanghai: Fudan University Press) Chap **4** (in Chinese) [龚少明 1986 非平衡统计热力学 (上海:复旦大学出版社)第 4 章]

A new method for studying the average mutual information of binary symmetric discrete channel*

Xiao Hai-Lin Nie Zai-Ping

(*College of Electrical Engineering*, *University of Eelectronic Science and Technology of China*, *Chengdu* 610054, *China*)

(Received 16 May 2006; revised manuscript received 27 November 2006)

Abstract

We use the synergetics to study how to allocate input probability in the binary symmetric discrete channel in order to maximize average mutual information for memoryless and memory channels with interference. We obtained the result that for the memoryless channel, the maximal average mutual information is in accordance with that the equivalent input probability can give according to the information theory. Moreover, we also studied the binary discrete memory channel with interference (noise), taking into account the input and output symbols having different memory degree and interference factor, and finally obtained the symbol optimized input probability. This a new method for studying information theory is presented.

Keywords: synergetics, binary symmetric discrete channel, mutual information, transition probability

PACC: 0540, 0550, 0560

* Project supported by the National High Technology Development Program of China (Grant No. 2002AA123032) and the Innovative Research Team Program of University of Electronic Science and Technology of China.