

# 耦合混沌振子系统完全同步的动力学行为<sup>\*</sup>

包 刚 那仁满都拉 图布心 额尔顿仓

(内蒙古民族大学物理与机电学院, 通辽 028043)

(2006年6月16日收到 2006年10月27日收到修改稿)

以耦合 Duffing 振子为对象, 研究了混沌系统进入完全同步态时的一些动力学行为. 在对称耦合情况下, 随着耦合系数的变化系统达到各个混沌振子的相轨道完全相同的同步态——完全同步态. 通过计算 Lyapunov 指数表明, 此时系统的前两个横向 Lyapunov 指数相等, 同时系统之间的时间关联表现出明显的规律性.

关键词: Duffing 振子, 混沌同步, Lyapunov 指数

PACC: 0545

## 1. 引 言

振子间的同步现象作为耦合振子中一个重要的特征, 一直为研究者所重视<sup>[1-4]</sup>. 早期的研究主要集中在不同周期振子之间的同步行为. 最近, 在这方面研究已拓展到混沌振子之间的同步行为, 通过研究发现了不少新的特征和概念<sup>[5-11]</sup>. 同步类型大致分为两类, 一类为系统的输出变量与信号之间的同步, 另一类为振子之间的同步. 在输出变量与周期性输入信号的同步问题中, 当进入相同步状态时, 虽然系统的最大 Lyapunov 指数的变化很小, 但系统变量的相平面发生了显著的改变, 并且输出变量的时间关联表现出明显的规律性. 在混沌同步理论研究中, 另外一个有意义的方面是进入混沌同步态的途径以及处于同步态时的动力学行为.

混沌同步态的失稳以及失稳以后的行为可以用广义旋转数  $\omega$  表示,

$$\begin{aligned}\omega &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \dot{\theta}(t) dt, \\ \dot{\theta}(t) &= \frac{d\theta(t)}{dt},\end{aligned}\quad (1)$$

式中  $\theta(t)$  代表确定的角变量. 相同步现象里包含着丰富的动力学内容, 而耦合混沌系统处于最强的相同步——完全同步态时的一些动力学行为作者至今未见有详细的报道, 在这方面的研究有待更进一步的深入. 本文主要以混沌吸引子相平面图和长时间内的关联性质来研究耦合混沌振子处于完全同

步态时的一些行为.

## 2. 混沌振子处于完全同步态的相图分析

采用如下耦合 Duffing 振子为研究对象:

$$\begin{aligned}\dot{x}_j &= y_j, \\ \dot{y}_j &= y_j - vy_j - x^3 + g \cos(\omega t) \\ &\quad + \epsilon(x_{j-1} - x_j) + \epsilon(x_{j+1} - x_j) \quad (j = 1, 2, \dots, N),\end{aligned}\quad (2)$$

式中  $N$  表示振子数,  $v$  代表阻尼系数,  $\omega$  和  $g$  分别代表强迫力的频率和振幅,  $\epsilon$  为耦合系数. 取  $N = 5$ , 参数  $v = 0.25$ ,  $\omega = 1.0$ ,  $g = 0.3$ , 对单个振子, 在上述参数下具有混沌轨道.

图 1 所示为系统(2)的前三个 Lyapunov 指数  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  随耦合系数  $\epsilon$  变化的情况. 从图 1 中可以看出, 在  $\epsilon = 0.55$  处, 系统的前两个横向 Lyapunov 指数  $\lambda_2, \lambda_3$  取相等的值, 此时系统进入了完全的混沌同步状态. 当  $\epsilon < 0.55$  时, 各个振子的相轨道结构有明显的区别, 如图 2 所示. 而在  $\epsilon = 0.55$  处, 系统 5 个振子的相轨道图几乎完全一样. 图 3 为第一个振子( $j = 1$ )和第二个振子( $j = 2$ )的相轨道图. 从图 3 可以看出, 这时系统的动力学行为发生了显著的变化, 当  $\epsilon = 0.55$  时混沌系统处在最强的相同步——完全同步状态.

图 4 给出了  $\Delta x_{23}(t) = x_3(t) - x_2(t)$  随时间  $t$  的变化,  $x_3(t)$  和  $x_2(t)$  分别表示第三个振子和第二个振子的变量. 从图 4(a)可以看出, 当  $\epsilon \neq 0.55$  时,

\* 国家自然科学基金(批准号 40564001)资助的课题.

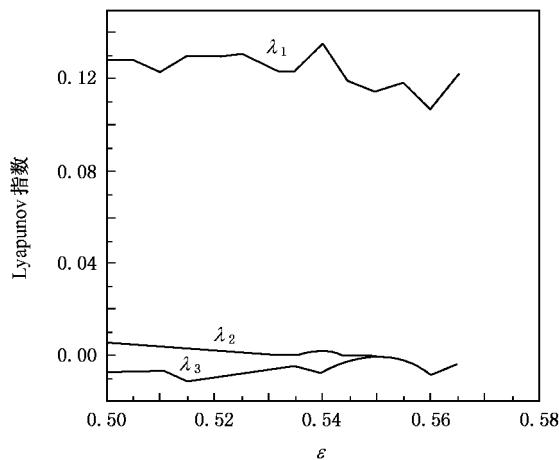


图 1 系统前三个 Lyapunov 指数  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  随耦合系数  $\varepsilon$  的变化情况

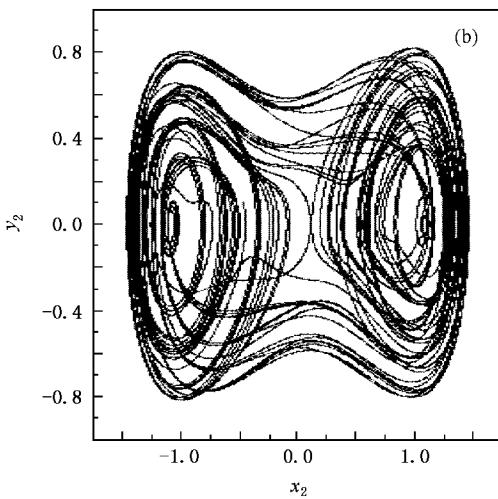
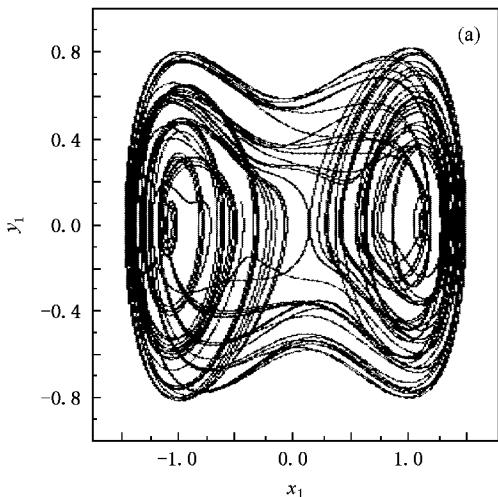


图 3  $\varepsilon = 0.55$  时不同振子的轨道图 (a) 振子 1 (b) 振子 2

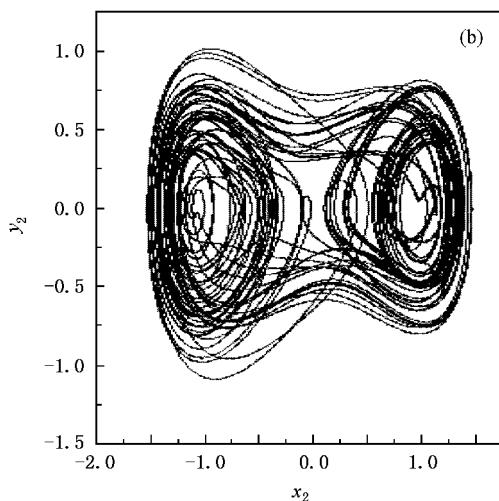
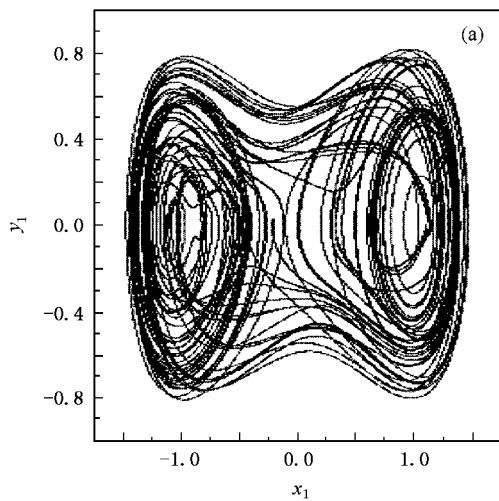


图 2  $\varepsilon = 0.54$  时不同振子的轨道图 (a) 振子 1 (b) 振子 2

$$\Delta x_{23}(t) = x_3(t) - x_2(t) \neq 0.$$

从图 4(a, b)可以看出,当  $\varepsilon = 0.55$  时,  
 $\Delta x_{23}(t) = x_3(t) - x_2(t) = 0$ .

经过计算发现,当  $\varepsilon = 0.55$  时,  
 $\Delta x_{ij}(t) = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, 5)$ ,  
说明整个系统处于完全混沌同步状态.

### 3. 混沌振子处于完全同步态的关联行为

对于完全同步,值得研究的一个重要的方面是长时间内的关联行为.图 5 为  $C_{23}(\tau + 1)$  随  $C_{23}(\tau)$  的变化图.  $C_{ij}(\tau)$  由下式定义<sup>[11]</sup>:

$$C_{ij}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x_i(t) x_j(t + \tau) dt - \frac{1}{T^2} \int_0^T x_i(t) dt \int_0^T x_j(t + \tau) dt \quad (T \gg 1). \quad (3)$$

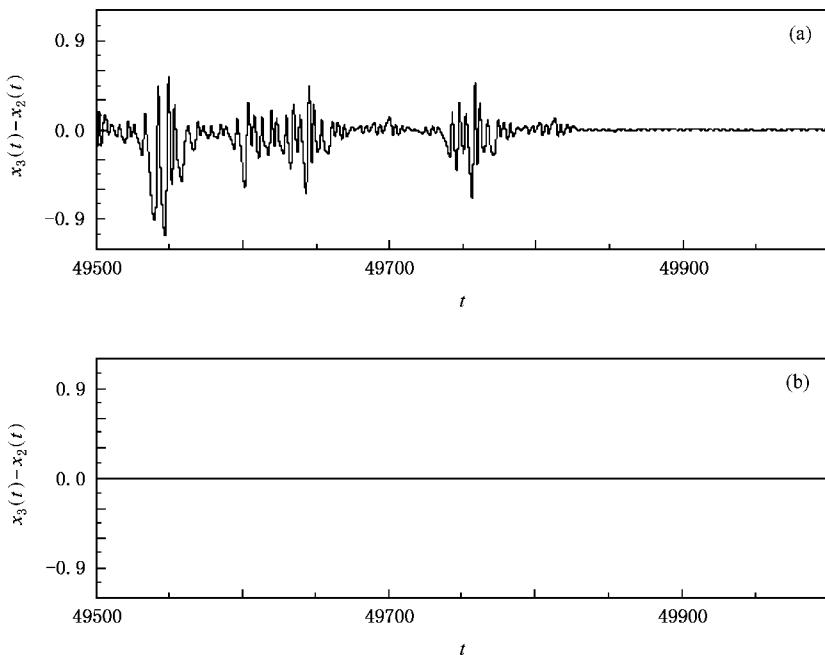


图 4  $x_3(t) - x_2(t)$  随  $t$  的变化情况 (a)  $\epsilon = 0.54$ , (b)  $\epsilon = 0.55$

这里  $x_i(t)$  和  $x_j(t + \tau)$  分别表示第  $i$  个和第  $j$  个振子不同时刻的  $x$  变量. 图 5(a) 为  $\epsilon = 0.54$  时的  $C_{23}(\tau + 1)$  随  $C_{23}(\tau)$  变化情况. 从图 5(a) 可以看出, 此时  $C_{23}(\tau + 1)$  随  $C_{23}(\tau)$  变化几乎是随机而无明显的规律性. 图 5(b) 给出了  $\epsilon = 0.55$  时的  $C_{23}(\tau + 1)$  随  $C_{23}(\tau)$  变化情况. 从图 5(b) 可以看出,  $C_{23}(\tau + 1)$

随  $C_{23}(\tau)$  的变化有明显的规律性, 其余各个振子之间的关联也具有相同的规律. 当  $\epsilon > 0.55$  时, 在相当大的范围内前两个横向指数  $\lambda_2, \lambda_3$  保持相等, 而且各个振子的相轨道结构基本保持相同, 说明整个系统的动力学行为进入了比较稳定的完全同步状态.

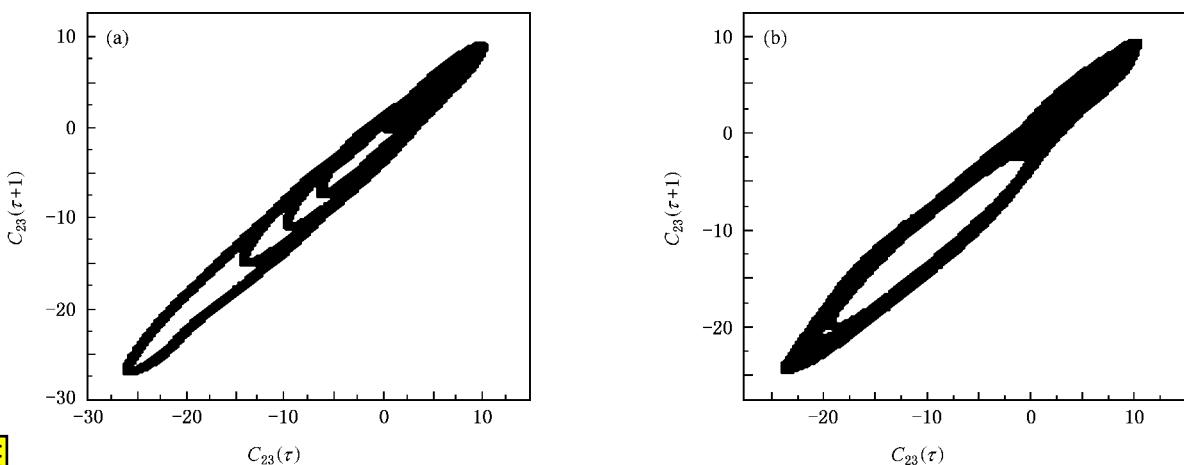


图 5  $C_{23}(\tau + 1)$  随  $C_{23}(\tau)$  的变化情况 (a)  $\epsilon = 0.54$ ; (b)  $\epsilon = 0.55$

## 4. 结 论

计算结果表明, 在对称耦合情况下, 随着耦合系

数的变化系统进入最强的混沌相同步状态——完全同步状态. 此时, 系统的两个横向 Lyapunov 指数  $\lambda_2, \lambda_3$  相等, 而最大 Lyapunov 指数  $\lambda_1$  仍然大于零. 系统的动力学行为进入完全混沌同步态以后, 在耦合系

数继续变化的一定范围内系统处于完全混沌同步状态。通过关联函数的计算,发现处于完全混沌同步

状态时振子之间存在着有规律的关联行为。

- [ 1 ] Pikovsky A S 1984 *Z. Phys. B* **55** 149
- [ 2 ] Pecora L , Carroll T 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- Pecora L , Carroll T 1991 *Phys. Rev. A* **44** 2374
- [ 3 ] Zheng Z , Hu G , Hu B 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 5318
- [ 4 ] Zhang T X , Zheng Z G 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3287 ( in Chinese )[ 张廷宪、郑志刚 2004 物理学报 **53** 3287 ]
- [ 5 ] Liao G H , Weng J Q , Chen L C et al 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 35 ( in Chinese )[ 廖高华、翁甲强、成立春等 2005 物理学报 **54** 35 ]
- [ 6 ] Zhang P W , Tang G N , Luo X S 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3497 ( in Chinese )[ 张平伟、唐国宁、罗晓曙 2005 物理学报 **54** 3497 ]
- [ 7 ] Hu G , Xie F G , Qu Z L et al 1999 *Commun. Theor. Phys.* **31** 99
- [ 8 ] Rosemblum M G , Pikovsky A S , Kurths J 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 1804
- Rosemblum M G , Pikovsky A S , Kurths J 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 4193
- [ 9 ] Osipov G V 1997 *Phys. Rev. E* **55** 2353
- [ 10 ] Stone E F 1992 *Phys. Lett. A* **163** 367
- [ 11 ] Zhan M , Hu G , Wang X G 2000 *Chin. Phys. Lett.* **17** 332
- [ 12 ] Ma W Q , Zhan M , He D H et al 2002 *Chin. Phys. Lett.* **19** 174

## Dynamic behavior of complete synchronization of coupled chaotic oscillators \*

Bao Gang Narenmandula Tubuxin Eredencang

( College of Physics and Electromechanics , Inner Mongolia Universities for Nationalities , Tongliao 028043 , China )

( Received 16 July 2006 ; revised manuscript received 27 October 2006 )

### Abstract

The dynamic behavior of phase synchronization in coupled oscillators is investigated using Lyapunov exponents and correlation function. A strongest chaotic phase synchronization—complete synchronization was observed, in which the first two transverse Lyapunov exponents are made equal and the projective structures of oscillators become exactly the same.

**Keywords :** Duffing oscillators , synchronized chaotic state , Lyapunov exponents

**PACC :** 0545

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 40564001 ).