第 56 卷 第 4 期 2007 年 4 月
1000-3290/2007/56(04)/2115-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.56, No.4, April, 2007

基于辛 Runge-Kutta-Nystrom 方法的雷达散射截面计算*

李民权　陶小俊　赵　瑾　吴先良

(安徽大学计算智能与信号处理教育部重点实验室, 合肥　230039)

(安徽大学光电信息获取与控制教育部重点实验室, 合肥　230039)

(2006 年 8 月 8 日收到; 2006 年 11 月 24 日收到修改稿)

从基本的差分概念和 Maxwell 方程出发, 引入电磁场方程的 Hamilton 函数. 提出一种基于 Runge-Kutta-Nystrom 辛算法的高阶时域有限差分方法, 该方法保持了系统的相空间体积不变和总能量不变, 并导出了迭代公式. 在此基础上计算了一种金属圆柱的雷达散射截面. 计算结果表明该方法的正确性及快速、精确的特性.

关键词: 雷达散射截面, 高阶算法, 辛 Runge-Kutta-Nystrom 方法, 时域有限差分

PACC: 4110H, 9460S, 6114D

1. 引　　言

在电磁场数值计算中, 常用的一些高阶差分方法不能保证相空间体积不变和总能量不变, 所以在电磁场计算中会出现场量的耗散现象[1]. 近年来提出了一种基于辛几何理论的数值方法——辛算法, 该方法保持了 Hamilton 系统的基本特征, 能够保证系统随着时间的演化永远是辛变换演进, 从而确保了该数值方法的对称和守恒[2,3]. 理论上, 无论是线性还是非线性无耗散场方程都是 Hamilton 系统, Hamilton 系统的主要特征是保持系统随时间演变的相空间体积不变和总能量不变[4,5]. 本文从电磁场方程的 Hamilton 函数出发, 提出了一种基于 Runge-Kutta-Nystrom (RKN) 方法的高阶辛有限差分方法[6]——辛 Runge-Kutta-Nystrom (SYRKN) 方法. 计算了一种金属圆柱的雷达散射截面. 计算结果表明, 该方法与传统的高阶差分方法相比, 在计算速度和计算精度方面都有较大的提高.

2. 电磁场方程的辛算法描述

无耗媒质的参数不随时间变化且各向同性, 媒质中的 Maxwell 旋度方程为

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} &= -\frac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{E},\\
\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} &= \frac{1}{\varepsilon}\nabla\times\boldsymbol{H}-\frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{J},
\end{aligned}
\tag{1}
$$

式中 $\boldsymbol{H}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{J}$ 及 μ, ε 分别为磁场强度、电场强度、电流密度及磁导率、介电常数. 这里, 假设 μ, ε 为常数.

引入中间变量 $\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{A}$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{Y} &= -\boldsymbol{E},\\
\frac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{H},
\end{aligned}
\tag{2}
$$

则(1)式变成无穷维 Hamilton 系统, 其对应的 Hamilton 方程为

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} &= \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{Y}},\\
\frac{\partial \boldsymbol{Y}}{\partial t} &= -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{A}}.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

这里 $H(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{Y})$ 是定义在相空间 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{Y})$ 中的 Hamilton 函数,

$$
H(\boldsymbol{A},\boldsymbol{Y}) = \int\left(\frac{1}{2}|\boldsymbol{Y}|^2+\frac{1}{2\mu\varepsilon}|\nabla\times\boldsymbol{A}|^2 - \frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{A}\right)\mathrm{d}V.
\tag{4}
$$

假设波为沿 z 轴传播的 TM 波, 且 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 只有沿坐标轴 z 方向的分量 A_z, Y_z, 于是有

* 国家自然科学基金(批准号: 60371041)资助的课题.

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_z}{\partial t} &= Y_z,\\ \frac{\partial Y_z}{\partial t} &= \frac{1}{\mu\varepsilon}\nabla^2 A_z + \frac{1}{\varepsilon}J_z,\end{aligned} \tag{5}$$

式中∇^2为拉普拉斯算符. 场分量可由 A_z 和 Y_z 表示为

$$\begin{aligned}E_z &= -Y_z,\\ H_x &= \frac{1}{\mu}\frac{\partial A_z}{\partial y},\\ H_y &= -\frac{1}{\mu}\frac{\partial A_z}{\partial x}.\end{aligned} \tag{6}$$

3. 基于 RKN 算法的 Hamilton 系统的高阶辛算法

采用 RKN 高阶显式辛差分格式对方程(5)进行差分. 在空间上采用中心差分格式,在时间上采用 SYRKN 格式.

二阶显式 SYRKN 格式为

$$\begin{aligned}A_z^1 &= A_z^n + \mathrm{d}tc_1 Y_z^n,\\ Y_z^1 &= Y_z^n + \mathrm{d}tb_1\nabla^2 A_z^1,\\ A_z^2 &= A_z^1 + \mathrm{d}t(c_2 - c_1)Y_z^1,\\ Y_z^2 &= A_z^1 + \mathrm{d}tb_2\nabla^2 A_z^2,\\ A_z^{n+1} &= A_z^n + \mathrm{d}t(1-c_2)A_z^2,\\ Y_z^{n+1} &= Y_z^2,\end{aligned} \tag{7}$$

式中 $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $b_1 = 1/2$, $b_2 = 1/2$. 三阶显式 SYRKN 格式为

$$\begin{aligned}A_z^1 &= A_z^n + \mathrm{d}tc_1 Y_z^n,\\ Y_z^1 &= Y_z^n + \mathrm{d}tb_1\nabla^2 A_z^1,\\ A_z^2 &= A_z^1 + \mathrm{d}t(c_2 - c_1)Y_z^1,\\ Y_z^2 &= Y_z^1 + \mathrm{d}tb_2\nabla^2 A_z^2,\\ A_z^3 &= A_z^2 + \mathrm{d}t(c_3 - c_2)Y_z^2,\\ Y_z^3 &= Y_z^2 + \mathrm{d}tb_3\nabla^2 A_z^3,\\ A_z^{n+1} &= A_z^3 + \mathrm{d}t(1-c_3)Y_z^3,\\ Y_z^{n+1} &= Y_z^3,\end{aligned} \tag{8}$$

式中 $c_1 = 1/2 - \gamma$, $c_2 = 1/2$, $c_3 = 1/2 + \gamma$, $b_1 = 1/(24\gamma^2)$, $b_2 = 1 - 1/(12\gamma^2)$, $b_3 = b_1$, $\gamma = -0.1756$.

拉普拉斯算符∇^2的二阶近似式为

$$\nabla^2 f(i,j) = \frac{1}{\Delta^2}[f(i+1,j) + f(i-1,j) + f(i,j+1) + f(i,j-1) - 4f(i,j)] + O(\Delta^2),$$

拉普拉斯算符∇^2的四阶近似式为

$$\nabla^2 f(i,j) = \frac{13}{15}L_1 + \frac{8}{15}L_2 - \frac{1}{15}L_3 - \frac{1}{3}L_4 + O(\Delta^2),$$

其中

$$\begin{aligned}L_1 &= \frac{1}{\Delta^2}[f(i+1,j) + f(i-1,j) + f(i,j+1) + f(i,j-1) - 4f(i,j)],\\ L_2 &= \frac{1}{2*\Delta^2}[f(i+1,j+1) + f(i+1,j-1) + f(i-1,j+1) + f(i-1,j-1) - 4f(i,j)],\\ L_3 &= \frac{1}{4*\Delta^2}[f(i+2,j) + f(i-2,j) + f(i,j+2) + f(i,j-2) - 4f(i,j)],\\ L_4 &= \frac{1}{10*\Delta^2}[f(i+2,j+1) + f(i+1,j+2) + f(i+2,j-1) + f(i+1,j-2) + f(i-2,j+1) + f(i-1,j+2) + f(i-2,j-1) + f(i-1,j-2) - 8f(i,j)].\end{aligned}$$

二维雷达散射截面为

$$\sigma = 10\lg\left(2\pi r\frac{|\boldsymbol{E}^{\mathrm{s}}(f)|^2}{|\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(f)|^2}\right),$$

其中 r 为散射目标到源的距离,$\boldsymbol{E}^{\mathrm{s}}(f)$和 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(f)$为散射电场和入射电场频域值. 对波长归一化的雷达散射截面(单位为 dB)

$$\sigma = 10\lg\left(\frac{2\pi r}{\lambda}\frac{|\boldsymbol{E}^{\mathrm{s}}(f)|^2}{|\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(f)|^2}\right).$$

4. 计算实例

下面以无限长金属圆柱的散射问题为例计算雷达散射截面. 圆柱沿 z 方向放置,圆柱的半径为 0.01 m. TE 波沿 y 方向传播,入射波频率为30 GHz. 计算区域为 100×100 网格,总场区为 70×70 网格,网格间距 Δ 为 0.025 cm,Mur 吸收层数为 11,迭代时间步数为 1500 时,采用 SYRKN 方法计算无限长金属圆柱的双站雷达散射截面与矩量法及时域有限差分(FDTD)方法[7,8]得到的计算结果如图 1 所示.

计算中,采用标准 FDTD 方法的最大相对误差为 0.0142,耗时 382.48 s. SYRKN (2,2) 最大相对误差为 1.417×10^{-5},耗时 133.70 s;SYRKN (3,4) 最大相对误差为 9.6×10^{-7},耗时 246.20 s. 随着时间

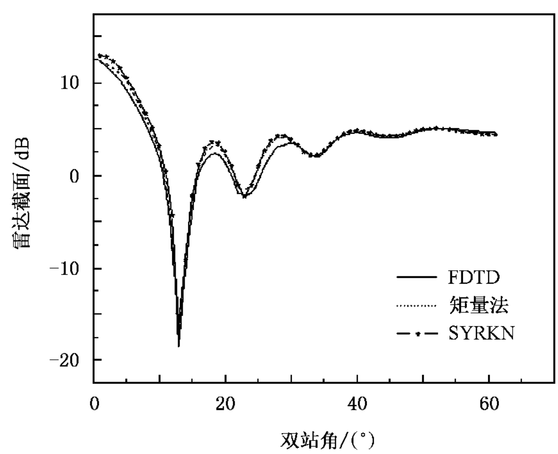

图 1　金属圆柱双站雷达散射截面

和空间阶数的增加，计算精度也在提高，但计算速度下降，所以应该根据实际要求来选取不同阶数的差分格式.

5. 结　　论

本文给出了 Maxwell 方程 SYRKN 差分格式，并采用高阶辛 FDTD 格式对简单目标体的雷达散射截面进行了计算. 由于 SYRKN 方法能够保证系统的相空间体积不变和总能量不变，避免了非 Hamilton 算法的影响，从而保证算法的高质量和逼真性. 由计算结果可知，SYRKN 方法无论在计算精度和计算速度方面都优于传统的 FDTD 方法. 下一步准备将完全匹配层应用于 SYRKN 方法中，同时将该方法运用到电大尺寸复杂目标的计算中.

[1] Luo M Q，Liu H，Li Y M 2001 *Acta Geophys*. *Sin*. **44** 120（in Chinese）[罗明秋、刘　洪、李幼铭 2001 地球物理学报 **44** 120]

[2] Hirono T，Lui W，Yokoyama K 1997 *IEEE Microwave Guided Wave Lett*. **7** 279

[3] Anderson N，Arthurs A M 1983 *Int*. *Elec*. **54** 861

[4] Li S X 2001 *High Frequency Approximate of Wave Equation and Sympletic Geometry*（Beijing：Science Press）p12（in Chinese）[李世雄 2001 波动方程的高频近似与辛几何（北京：科学出版社）第 12 页]

[5] Feng K 1986 *J*. *Comput*. **40** 279

[6] Daniel O，Robert D S 1992 *Math*. *Comput*. **59** 439

[7] Tang W，Yan Y B，Li Q L *et al* 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 4173（in Chinese）[汤　炜、闫玉波、李清亮等 2004 物理学报 **53** 4173]

[8] Ge D B，Yan Y B 2002 *The Finite Difference Time Domain Method of Electromagnetic Wave*（Xi′an：Xidian University Press）p8（in Chinese）[葛德彪、闫玉波 2002 电磁波时域有限差分方法（西安：西安电子科技大学出版社）第 8 页]

Radar cross section computation using symplectic Runge-Kutta-Nystrom method*

Li Min-Quan Tao Xiao-Jun Zhao Jin Wu Xian-Liang

(*Key Laboratory of Intelligent Compution and Signal Processing of Ministry of Education, Anhui University, Hefei* 230039, *China*)

(*Key Laboratory of Opto-electronic Information Acquisition and Manipulation of Ministry of Education, Anhui University, Hefei* 230039, *China*)

(Received 8 August 2006; revised manuscript received 24 November 2006)

Abstract

In this paper, a high-order symplectic finite difference time domain schemes is constructed for Hamilton system, using the symplectic Runge-Kutta-Nystrom (SYRKN) method. On the basis of fixed phase space and total energy in the Hamilton system, a formula of iterative algorithm is proposed which can be used to calculate the radar cross section of a metal cylinder. Calculation results have shown that the SYRKN method is accurate and fast.

Keywords: radar cross section, high-order algorithm, symplectic Runge-Kutta-Nystrom method, finite difference time domain

PACC: 4110H, 9460S, 6114D

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60371041).