

内禀退相干下 Tavis-Cummings 模型中原子的 纠缠演化与贝尔不等式破坏^{*}

郭德军¹⁾ 单传家²⁾ 夏云杰^{1)†}

1) 曲阜师范大学物理工程学院, 曲阜 273165)

2) 湖北师范学院物理系, 黄石 435002)

(2006 年 6 月 29 日收到, 2006 年 9 月 13 日收到修改稿)

通过求解系统的 Milburn 方程, 研究了两个二能级原子和单模场相互作用系统中原子间纠缠和贝尔不等式破坏随时间的演化特性, 讨论了偶极相互作用、场与原子的失谐量对纠缠度以及贝尔不等式破坏的影响. 结果表明: 原子间偶极-偶极相互作用对纠缠度和贝尔不等式破坏有显著影响, 失谐量增大会使两原子的纠缠度和贝尔不等式破坏变大, 并且两原子所能达到稳定的纠缠受偶极相互作用系数与失谐量两者之差的影响. 同时还发现两原子的纠缠与贝尔不等式破坏并不是单调的函数关系, 很小的纠缠也可以产生贝尔不等式破坏.

关键词: Milburn 理论, 偶极-偶极相互作用, 失谐量, 贝尔不等式破坏

PACC: 4250, 0365

1. 引言

自从量子纠缠首先被 Einstein-Podolsky-Rosen (EPR)^[1]和 Schrödinger^[2]提出以来, 它一直是物理学中一个引人注目的研究领域, 在量子通信和量子计算中意义重大, 是 Bell 基制备、量子隐形传态^[3]、量子密钥分配^[4]的基础. 同时, 量子力学的非定域性可以用 Bell 不等式的最大破坏来表征. 近年来, 人们提出了许多制备量子态纠缠的理论和实验方案^[5-7], 其中腔-量子电动力学(腔-QED)被公认是一种实现量子信息处理最有希望的技术之一, 并且两个原子的纠缠态^[8]已被实验所实现. 以上考虑的是理想情况的模型, 将所研究的系统看作是一个真正的封闭系统, 但是系统必定不可避免地、或强或弱地与周围环境发生相互作用, 导致系统中纯态量子相干性衰减, 这就是所谓的退相干过程. 因此, 怎样保持量子系统的相干性, 减少或消除量子退相干已成为研究的热点^[9,10]. 人们引入了多套方案来解决退相干问题, 如利用环境的影响来解释或者引进一些产生随机因素的新机制, 在量子力学原有基础的框架中^[11]或者对量子力学作某些修正^[12]来说明量子态的退

相干.

为了解释相干性在宏观尺度上的消失, Milburn^[13]提出了一个简单的内禀退相干模型, 认为系统达到宏观尺度的时候相干性会自动破坏, 这是系统本身的一个物理特征, 这个模型给出了对标准量子力学的简单修正, 很好地解释了宏观物体相干性消失的现象. 这是对量子力学运用于宏观尺度上的有益探索, 因此研究存在内禀退相干时纠缠态的演化和 Bell 不等式的破坏对深入认识量子相干性的特性有较大的物理意义.

利用这一理论, Zidan 等^[14]研究了二能级原子与场的单光子相互作用过程中内禀退相干对纠缠度的影响, 王成志等^[15]研究了双模压缩真空态与原子相互作用中的量子纠缠和退相干, 谭霞等^[16]研究了双模场与原子相互作用中的量子纠缠与内禀退相干. 以上研究的都是 Jaynes-Cummings (J-C) 模型的情况, 而对于 Tavis-Cummings (T-C) 模型的纠缠演化研究不多, 最近, 宋军等^[17]研究了两纠缠原子与二项式光场相互作用动力学, 单传家等^[18]研究了 T-C 模型中的两纠缠原子的纠缠演化特性, Wang 等^[19]研究了外辐射场对 T-C 模型中场和原子性质的影响, 但是他们没有考虑内禀退相干的影响. 而李上宾

^{*} 国家自然科学基金重点项目(批准号: 10534030)资助的课题.

[†] E-mail: yjxia@mail.qfnu.edu.cn

等^[20]研究了内禀退相干下两个原子在一个单模腔中的量子纠缠,但是在文献[20]中作者没有考虑场与原子之间的失谐以及原子间的偶极-偶极相互作用.为了进一步研究两原子纠缠的动力学演化特性以及纠缠与贝尔不等式破坏的关系,我们全面考虑了存在场与原子之间的失谐以及原子间的偶极-偶极相互作用存在时的情况.通过求解系统的 Milburn 方程,研究两个二能级原子与单模光场相互作用过程中,当存在内禀退相干时偶极-偶极相互作用和场与原子的失谐量对纠缠度和贝尔不等式破坏的影响.

2. Milburn 方程求解

Milburn 认为,在充分短暂的时间内,量子系统并非在么正变换下连续演化,而是以一随机序列演化.若量子系统的状态发生变化,则系统的密度算符 $\hat{\rho}(t)$ 满足如下方程:

$$\hat{\rho}(t + \tau) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{\mathcal{A}}(\tau)\hat{H}\right)\hat{\rho}(t)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\hat{\mathcal{A}}(\tau)\hat{H}\right), \quad (1)$$

式中 $\hat{\mathcal{A}}(\tau)$ 是时间 τ 的函数.在标准量子力学中,系统演化的概率 $P(\tau) = 1$ 及 $\hat{\mathcal{A}}(\tau) = \tau$,而 Milburn 理论仅假设在 τ 充分大时 $P(\tau) \rightarrow 1$ 及 $\hat{\mathcal{A}}(\tau) \rightarrow \tau$,并设 $\lim_{\tau \rightarrow 0} \hat{\mathcal{A}}(\tau) = \theta_0$,从而有效地引入了一个最小时间段,其倒数为 $\gamma = 1/\theta_0$.由此得出系统的动力学方程,即 Milburn 方程

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{\rho}] - \frac{1}{2\hbar^2\gamma}[\hat{H}, [\hat{H}, \hat{\rho}]]. \quad (2)$$

这一方程修正了 Von Neumann 方程,引入了内禀退相干因子 γ ,可以看出,在极限 $\gamma \rightarrow \infty$ 条件下,由(2)式可导出 Von Neumann 方程.

在旋转波近似下,考虑两个二能级的原子和单模光场的相互作用,假设两原子间的距离小于光场的波长,使得原子之间的偶极相互作用不可以忽略,在这种情况下系统的哈密顿量可以表示为如下形式^[21]:

$$\begin{aligned} H = & \omega a^\dagger a + \frac{1}{2}\omega_0 \sum_{i=1}^2 \sigma_i^z \\ & + \sum_{i=1}^2 g(a^\dagger \sigma_i^- + a \sigma_i^+) \\ & + \Omega \sum_{i,j=1}^2 \sigma_i^- \sigma_j^- \quad (i \neq j), \end{aligned} \quad (3)$$

式中 ω_0 为原子的本征跃迁频率, ω 为光场的频率,

g 为原子与光场的耦合常数, Ω 为原子间偶极-偶极相互作用强度, σ_i^z, σ_i^\pm 为原子的自旋算符.

容易证明在哈密顿量(3)式中存在一个守恒量

$$N = a^\dagger a + 1 + \frac{\sigma_1^z + \sigma_2^z}{2},$$

在 $N = 1$ 的子空间里我们可以得到哈密顿量 H 的三个本征态和本征值^[18]

$$\begin{aligned} \Psi_0 &= a_0 |1\rangle + b_0 |2\rangle + c_0 |3\rangle, \\ E_0 &= \lambda_0, \\ \Psi_1 &= a_1 |1\rangle + b_1 |2\rangle + c_1 |3\rangle, \\ E_1 &= \lambda_1, \\ \Psi_2 &= a_2 |1\rangle + b_2 |2\rangle + c_2 |3\rangle, \\ E_2 &= \lambda_2, \end{aligned} \quad (4)$$

式中

$$\begin{aligned} |1\rangle &= |0\rangle \otimes |eg\rangle, \\ |2\rangle &= |0\rangle \otimes |ge\rangle, \\ |3\rangle &= |1\rangle \otimes |gg\rangle; \end{aligned}$$

且

$$x = \sqrt{8g^2 + (\Omega - \Delta)^2};$$

$$a_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$b_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$c_0 = 0;$$

$$a_1 = \frac{\sqrt{2}g}{x\sqrt{1 + \frac{\Delta - \Omega}{x}}},$$

$$b_1 = \frac{\sqrt{2}g}{x\sqrt{1 + \frac{\Delta - \Omega}{x}}},$$

$$c_1 = \frac{\sqrt{1 + \frac{\Delta - \Omega}{x}}}{\sqrt{2}};$$

$$a_2 = \frac{\sqrt{2}g}{x\sqrt{1 + \frac{\Omega - \Delta}{x}}},$$

$$b_2 = \frac{\sqrt{2}g}{x\sqrt{1 + \frac{\Omega - \Delta}{x}}},$$

$$c_2 = -\frac{\sqrt{1 + \frac{\Omega - \Delta}{x}}}{\sqrt{2}};$$

$$\lambda_0 = -\Omega,$$

$$\lambda_1 = \frac{x(4g^2 + \Delta(x + \Delta - \Omega))}{8g^2 - (\Omega - \Delta)x + \Delta - \Omega},$$

$$\lambda_2 = -\frac{x(4g^2 - \Delta(x - \Delta + \Omega))}{8g^2 + (\Omega - \Delta)x - \Delta + \Omega}. \quad (5)$$

我们可以得到 Milburn 方程有如下形式的解:

$$\rho(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t}{\gamma}\right)^k \frac{1}{k!} M^k(t) \rho(0) M^{*k}(t), \quad (6)$$

式中 $\rho(0)$ 为系统的初始时刻的密度算符, $M^k(t)$ 定义为

$$M^k(t) = H^k \exp(-iHt) \exp\left(-\frac{t}{2\gamma} H^2\right). \quad (7)$$

假定初始时刻的密度矩阵

$$\rho(0) = |0 \ 0\rangle \langle 0 \ 0| \otimes |eg \ eg\rangle \langle eg \ eg|,$$

将 $\rho(0)$ 代入方程 (6) 就可以得到密度矩阵 $\rho(t)$ 的精确表达式

$$\rho(t) = \sum_{i,j=0}^2 m_i m_j \exp(iE_i t - iE_j t) \times \exp\left(\frac{t}{\gamma} E_i E_j - \frac{t}{2\gamma} E_i^2 - \frac{t}{2\gamma} E_j^2\right) |\Psi_i \ \Psi_j\rangle \langle \Psi_i \ \Psi_j|$$

$$= \sum_{i,j=0}^2 \lambda_{ij} |\Psi_i \ \Psi_j\rangle \langle \Psi_i \ \Psi_j|, \quad (8)$$

式中

$$m_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$m_1 = \frac{\sqrt{1 + \frac{\Delta - \Omega}{x}} x(8g^2 - (x + \Omega - \Delta)x + \Delta - \Omega)}{4\sqrt{2}gx^2},$$

$$m_2 = \frac{(8g^2 + (x - \Omega + \Delta)x + \Delta - \Omega)\sqrt{1 + \frac{\Omega - \Delta}{x}}}{4\sqrt{2}gx^2}. \quad (9)$$

3. 两原子的约化密度矩阵以及纠缠的度量

对于两个子系统构成的复合系统的混合态,我们用部分转置矩阵的负本征值来定义^[22],即

$$E = -2 \sum_i \mu_i^-, \quad (10)$$

式中 μ_i^- 是部分转置矩阵 ρ 的负本征值. 当 $E = 0$ 时两个系统分离; 当 $E = 1$ 时两个子系统处于最大纠缠态; 当 $0 < E < 1$ 时两子系统是纠缠的. 对 (8) 式中光场求迹得到两原子的约化密度矩阵

$$\rho_a(t) = n_1 |eg \ eg\rangle \langle eg \ eg| + n_2 |eg \ ge\rangle \langle eg \ ge| + n_3 |ge \ eg\rangle \langle ge \ eg| + n_4 |ge \ ge\rangle \langle ge \ ge| + n_5 |gg \ gg\rangle \langle gg \ gg|, \quad (11)$$

式中

$$n_1 = \lambda_{00} a_0^2 + \lambda_{11} a_1^2 + \lambda_{22} a_2^2$$

$$+ \lambda_{01} a_0 a_1 + \lambda_{02} a_0 a_2 + \lambda_{12} a_1 a_2$$

$$+ \lambda_{10} a_0 a_1 + \lambda_{21} a_1 a_2 + \lambda_{20} a_0 a_2,$$

$$n_2 = \lambda_{00} a_0 b_0 + \lambda_{11} a_1 b_1 + \lambda_{22} a_2 b_2$$

$$+ \lambda_{01} a_0 b_1 + \lambda_{02} a_0 b_2 + \lambda_{12} a_1 b_2$$

$$+ \lambda_{10} a_1 b_0 + \lambda_{21} a_2 b_1 + \lambda_{20} a_2 b_0,$$

$$n_3 = \lambda_{00} a_0 b_0 + \lambda_{11} a_1 b_1 + \lambda_{22} a_2 b_2$$

$$+ \lambda_{01} a_1 b_0 + \lambda_{02} a_2 b_0 + \lambda_{12} a_2 b_1$$

$$+ \lambda_{10} a_0 b_1 + \lambda_{21} a_1 b_2 + \lambda_{20} a_0 b_2,$$

$$n_4 = \lambda_{00} b_0^2 + \lambda_{11} b_1^2 + \lambda_{22} b_2^2$$

$$+ \lambda_{01} b_0 b_1 + \lambda_{02} b_0 b_2 + \lambda_{12} b_2 b_1$$

$$+ \lambda_{10} b_0 b_1 + \lambda_{21} b_2 b_1 + \lambda_{20} b_0 b_2,$$

$$n_5 = \lambda_{11} c_1^2 + \lambda_{22} c_2^2 + \lambda_{12} c_2 c_1 + \lambda_{21} c_2 c_1.$$

对 (11) 式中的第二个原子做转置可以求出部分转置矩阵 ρ_a^T 的本征值, 然后利用 (10) 式计算出两原子的纠缠度 E_a 的表达式

$$E_a = \sqrt{4n_2 n_3 + n_5^2} - n_5. \quad (13)$$

对 (13) 式作数值计算, 可以得到两原子的纠缠度 E_a 随时间 t 的演化规律.

3.1. 偶极相互作用对纠缠度的影响

1) 不考虑退相干的情况下, 偶极相互作用对纠缠度的影响如图 1 所示.

图 1 描述的是不考虑退相干的情况下, 改变两原子间的偶极-偶极相互作用对两原子纠缠的纠缠度随时间的演化曲线.

当两原子的耦合量与场与原子的耦合量相比不是很大时, 初始处于分离态的两原子进入腔中以后, 它们之间的纠缠出现周期性变化 (图 1(a)(b)). 当 $\Omega = 0$ 时, 两原子的纠缠度先变大达到一个最大值后再减小, 最后变为零, 且两原子能达到的最大的纠缠度不是很大; 当 $\Omega = 0.5$ 时, 两原子的纠缠度先变大再减小, 减小到一定值后再增大随后迅速达到最大纠缠态后减小, 减小到一定值后再增大, 最后再减小到零. 当 $\Omega = 1$ 时, 纠缠度先变大后变小, 减小到某一个值后继续增大, 然后再减小直到完全分离, 但是不能达到最大纠缠度.

当原子的耦合量远大于场与原子的耦合量时 (图 1(c)(d)), 随着偶极相互作用的增大, 两原子之间的纠缠演化周期明显变小, 初始分离的两原子演化幅度变大, 有时可以接近于最大纠缠度.

通过以上分析我们可以发现, 在不考虑退相干

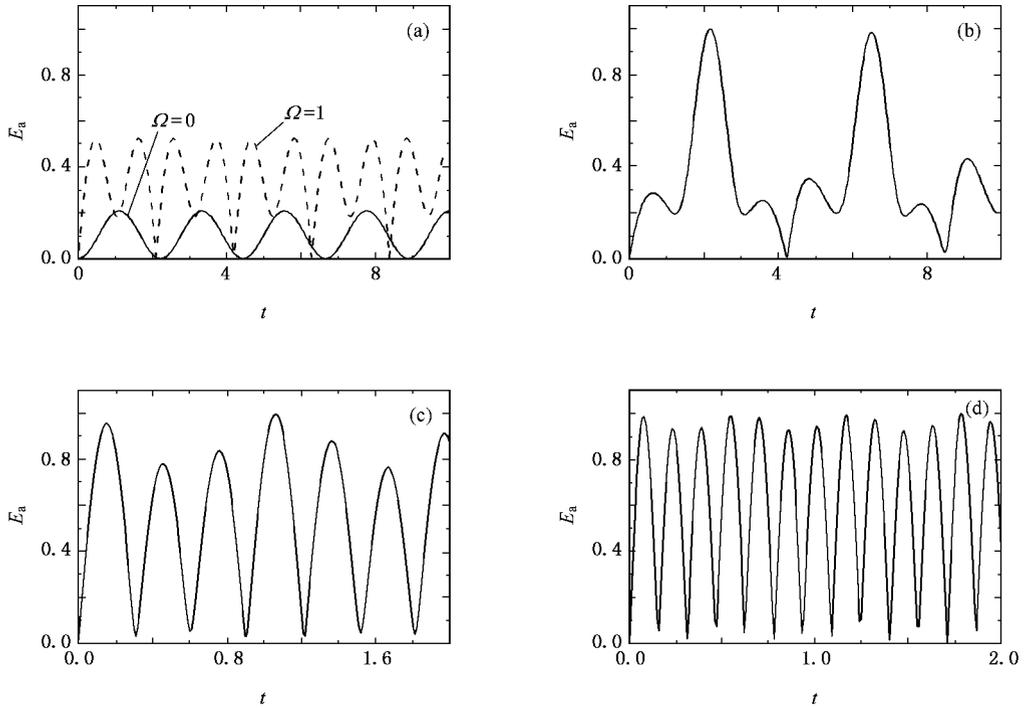


图 1 当 $\gamma = 10^5$, $\Delta = 0$, $g = 1$ 时, 两原子的纠缠度随时间的演化 (a) $\Omega = 0$, (b) $\Omega = 0.5$ (c) $\Omega = 5$ (d) $\Omega = 10$

的情况下随着偶极相互作用的增大, 两原子所能达到的最大纠缠度并不是一直增大的, 当偶极相互作用很大的时候, 增大偶极相互作用会减小场与原子的相互作用使纠缠度变小, 偶极相互作用对纠缠的

影响是先增大后减小的.

2) 考虑退相干的情况下, 偶极相互作用对纠缠度的影响如图 2 所示.

图 2 描述的是考虑退相干的情况下, 改变偶

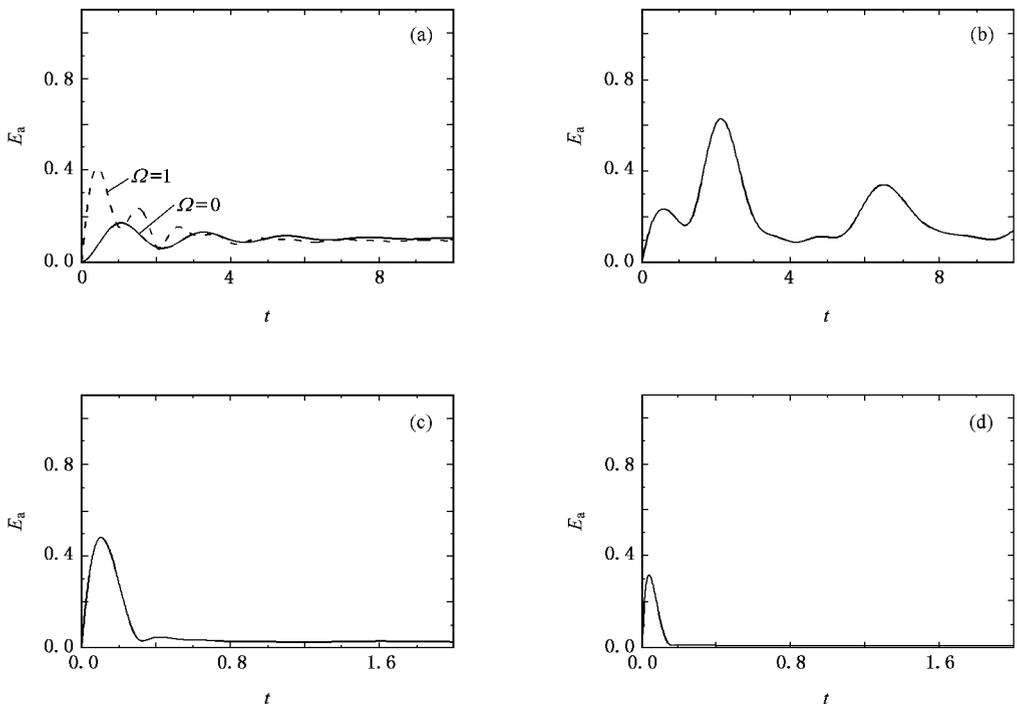


图 2 当 $\gamma = 10$, $\Delta = 0$, $g = 1$ 时, 两原子的纠缠度随时间的演化 (a) $\Omega = 0$, (b) $\Omega = 0.5$ (c) $\Omega = 5$ (d) $\Omega = 10$

极-偶极相互作用两原子间的纠缠度随时间的演化曲线.

当两原子的耦合量与场与原子的耦合量相比不是很大时(图 3(a)(b)),随着两原子的耦合量的增加,初始处于分离态的两原子进入腔中以后两原子所能达到的最大纠缠度是先增加后减小.最后在内禀因子的影响下,两者的纠缠度不断减小最后趋于一个稳定值.

当原子的耦合量远大于场与原子的耦合量时(图 3(c)(d)),随着两原子耦合量的增加,初始处于分离态的两原子进入腔中以后两原子开始所能达

到的最大纠缠度有缩小的趋势,最后在内禀因子的影响下逐渐趋于零,这是由于当偶极相互作用很大的时候,增大偶极相互作用会使纠缠度变小.可见在考虑退相干的情况下,偶极-偶极相互作用对纠缠度的影响也是先增大后减小.

3.2. 场与原子的失谐量对纠缠度的影响

图 3 描述的是改变场与原子的失谐量,腔中两原子的纠缠度随时间的演化规律.从图 3 可以看出,随着失谐量的增加,两原子所能达到的最大纠缠度变大,退相干的速度变小.

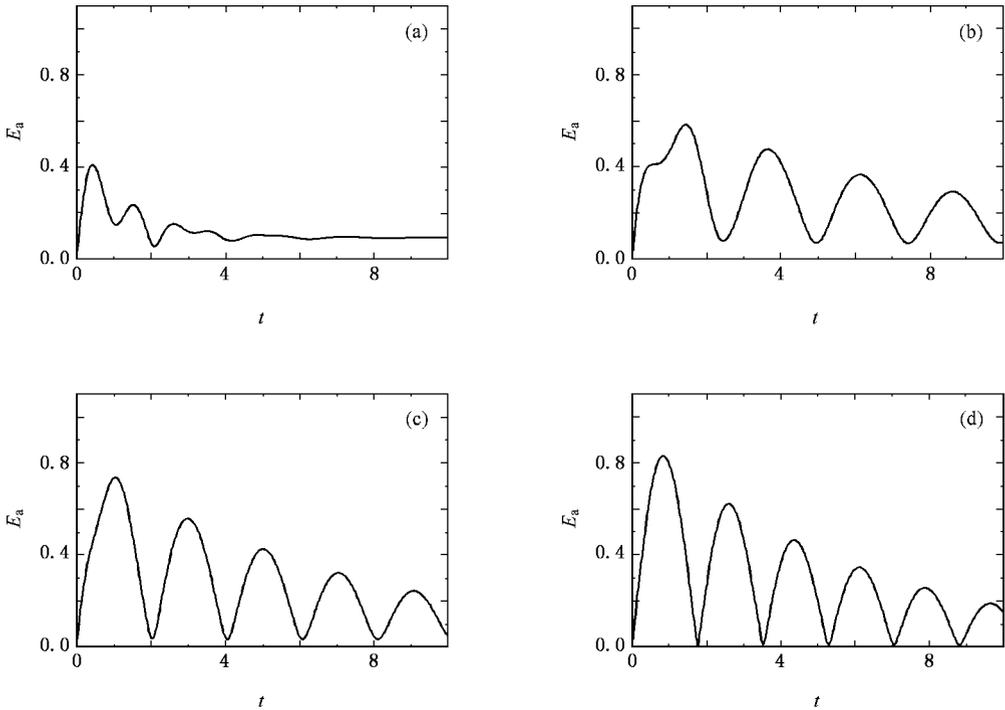


图 3 当 $g=1, \Omega=1, \gamma=10$ 时,两原子的纠缠度随时间的演化 (a) $\Delta=0$ (b) $\Delta=3$ (c) $\Delta=5$ (d) $\Delta=10$

当失谐量 $\Delta=0$ 时(图 3(a)),两原子开始处于分离态,当原子进入场以后,两原子的纠缠度迅速达到一个最大值,但是在内禀因子的影响下,经过很短的时间它就达到一个稳定的值.

当失谐量 $\Delta=2, 5, 10$ 时(图 3(b)(c)(d)),开始分离的两原子所能达到的最大纠缠度比 $\Delta=0$ 时明显变大,并且随着失谐量的变大两原子所能达到的最大纠缠量也越来越大,退相干的速度明显变慢,作周期变小振幅减小的振荡,经过很长时间纠缠才能达到稳定状态,退相干的时间明显变长.

对于(13)式在 $t \rightarrow \infty$ 的情况下,我们可以得到两原子纠缠度的稳定值

$$E_{t \rightarrow \infty} = \frac{\chi\sqrt{2}-1}{8g^2 + (\Delta - \Omega)^2} g^2. \quad (14)$$

通过(14)式我们可以清楚地看到在 $\Delta = \Omega$ 时,两原子纠缠度的稳定值达到最大,在 $\Delta \neq \Omega$ 时,随着两者差值的增大,两原子纠缠度的稳定值越来越小.可见,两原子所能达到的稳定的纠缠受偶极相互作用系数与失谐量两者之差的影响,与内禀因子无关.

4. 贝尔不等式的破坏以及与纠缠之间的关系

量子力学的非定域性可以用贝尔不等式的最大破坏来表征,Jeong 等^[23]定义了用贝尔不等式的最大

破坏量来度量量子力学的非定域性. 这里我们讨论最常见的贝尔不等式——CHSH 不等式. CHSH 算符定义如下:

$$\hat{B} = \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma} \otimes (\mathbf{b} + \mathbf{b}') \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{a}' \cdot \boldsymbol{\sigma} \otimes (\mathbf{b} - \mathbf{b}') \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (15)$$

式中 $\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}'$ 是单位矢量. 隐变量理论表明贝尔-CHSH 不等式 $|B| \leq 2$, 其中 $|B|$ 是对于一个给定量子态贝尔算符的平均值. 但是在量子理论中 $|B| \leq 2\sqrt{2}$. 这就表明贝尔-CHSH 不等式被破坏了. 对于一个给定的量子态 $\rho(t)$, 其最大贝尔不等式破坏程度表示为^[24]

$$B = 2\sqrt{\lambda + \lambda'}, \quad (16)$$

式中 λ, λ' 为矩阵 $T_\rho^+ T_\rho$ 两个最大的本征值. T_ρ 是一个 3×3 的矩阵, 其矩阵元为

$$(T_\rho)_{nm} = \text{tr}(\rho \sigma_n \otimes \sigma_m).$$

这里 $\sigma_1 = \sigma_x, \sigma_2 = \sigma_y, \sigma_3 = \sigma_z$ 代表泡利矩阵. 对于 (11) 式的两原子的态 $\rho(t)$, 其最大贝尔不等式破坏程度为

$$B = 2\sqrt{4n_2 n_3 + \max[4n_2 n_3 (n_5 - n_1 - n_4)]}. \quad (17)$$

通过数值计算, 我们可以得到贝尔不等式破坏随时间的演化图像.

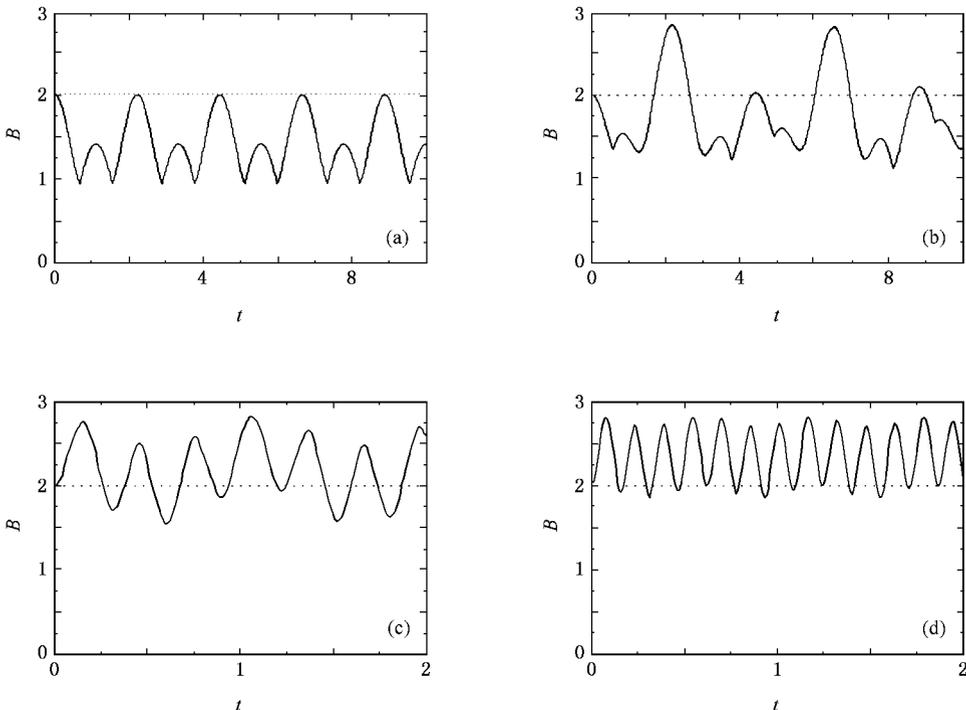


图 4 当 $\gamma = 10^5, \Delta = 0, g = 1$ 时, 两原子贝尔不等式破坏随时间的演化 (a) $\Omega = 0$ (b) $\Omega = 0.5$ (c) $\Omega = 5$ (d) $\Omega = 10$

4.1. 偶极-偶极相互作用对贝尔不等式破坏的影响

1) 不考虑内禀退相干的情况下, 偶极-偶极相互作用对贝尔不等式破坏的影响如图 4 所示.

图 4 描述的是不考虑内禀退相干的情况下 ($\gamma = 10^5$), 偶极-偶极相互作用对贝尔不等式破坏的影响. 当偶极-偶极作用较小时 (图 4(a)(b)), 贝尔不等式破坏曲线一开始都是下降的. 当 $\Omega = 0$ 时 (图 4(a)), 不会发生贝尔不等式破坏现象. 当 $\Omega = 0.5$ 时 (图 4(b)), 在某些时候会发生贝尔不等式破坏, 并且接近于最大贝尔不等式破坏. 当偶极-偶极作用比较大时 (图 4(c)(d)), 贝尔不等式破坏曲线一开始都是上升的, 并且随着偶极-偶极相互作用的增大, 贝尔不等式破坏曲线周期明显变短, 大部分时间都会发生贝尔不等式破坏.

2) 考虑内禀退相干的情况下, 偶极-偶极相互作用对贝尔不等式破坏的影响如图 5 所示.

图 5 描述的是考虑内禀退相干的情况下 ($\gamma = 10$), 偶极-偶极相互作用对贝尔不等式破坏的影响. 当偶极-偶极作用比较小时 (图 5(a)(b)), 贝尔不等式破坏曲线一开始都是下降的. 当 $\Omega = 0$ 时 (图 5(a)), 不会发生贝尔不等式破坏现象. 当 $\Omega = 0.5$ 时 (图 5(b)), 在某些时候会发生贝尔不等式破坏. 当偶极-偶极作用比较大时 (图 5(c)(d)), 贝尔不等

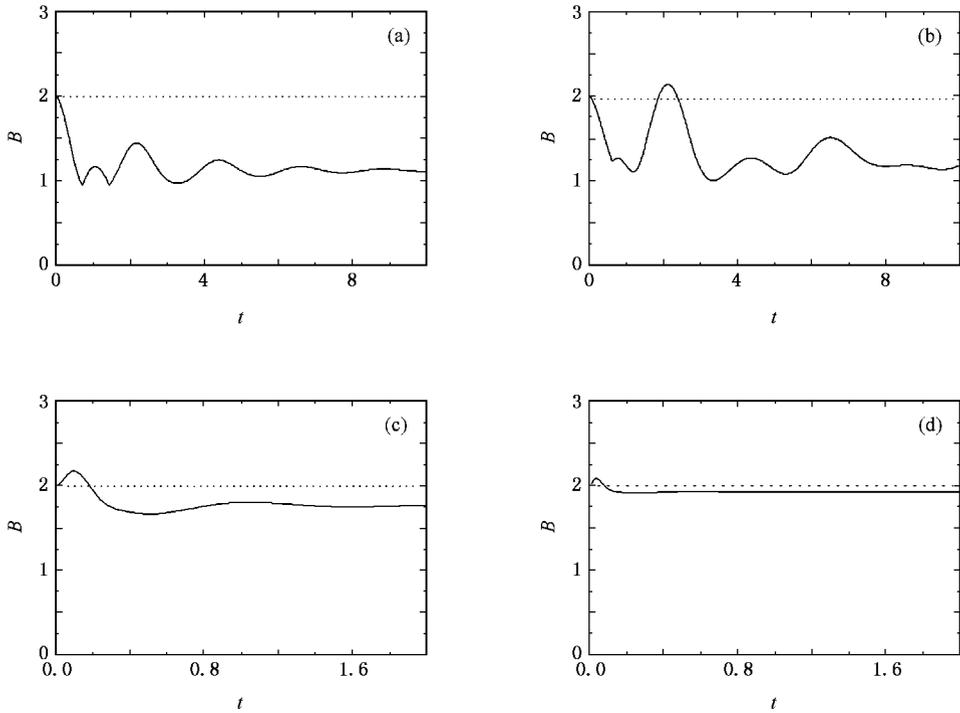


图 5 当 $\gamma = 10, \Delta = 0, g = 1$ 时, 两原子贝尔不等式破坏随时间的演化 (a) $\Omega = 0$ (b) $\Omega = 0.5$ (c) $\Omega = 5$ (d) $\Omega = 10$

式破坏曲线一开始都是上升的, 并且随着偶极-偶极相互作用的增大, 最大贝尔不等式破坏程度有减小的趋势, 最后趋于一个定值.

相互作用曲线一开始都是下降的, 但随着偶极相互作用的进一步增大曲线一开始都是上升的, 而且最大贝尔不等式破坏程度都有减小的趋势. 所以, 偶极相互作用对贝尔不等式破坏是一种非线性效应.

通过以上两种情况我们可以发现, 增大偶极相

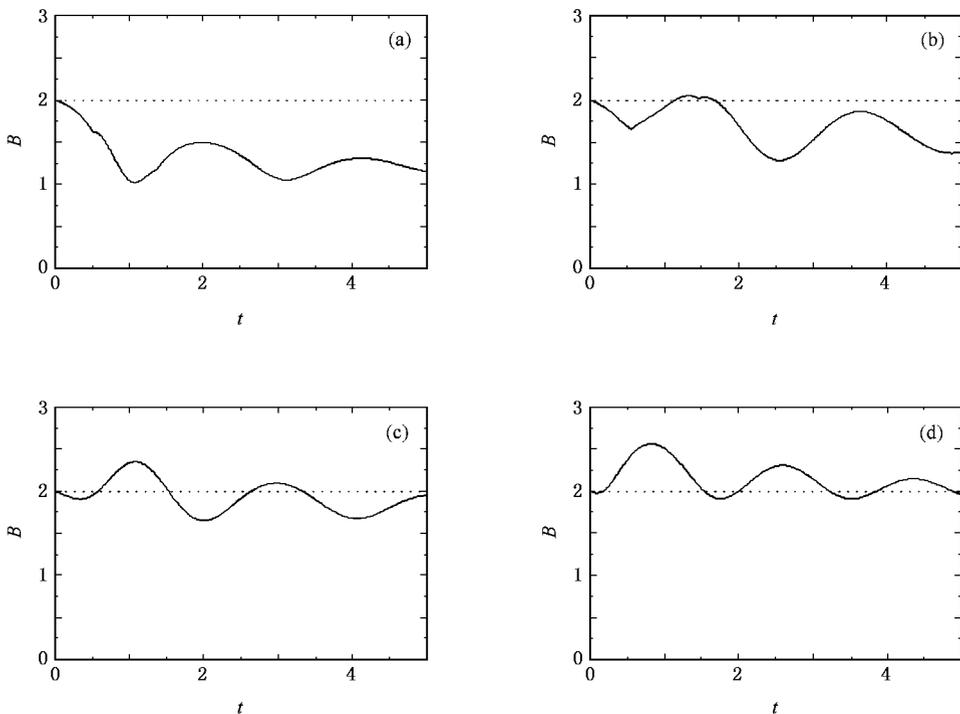


图 6 当 $g = 1, \Omega = 1, \gamma = 10$ 时, 两原子贝尔不等式破坏随时间的演化 (a) $\Delta = 0$ (b) $\Delta = 3$ (c) $\Delta = 5$ (d) $\Delta = 10$

4.2. 失谐量对贝尔不等式破坏的影响

图 6 描述的是存在内禀退相干的情况下, 改变场与原子的失谐量, 贝尔不等式破坏随时间的演化规律. 我们可以清楚发现, 随着场与原子失谐量 Δ 的增大, 贝尔不等式破坏程度明显变大, 有时可以接近于最大破坏(图 6(d)). 由此可见, 场与原子失谐量 Δ 有增大贝尔不等式破坏的作用.

4.3. 贝尔不等式破坏与纠缠(以负本征值度量)的关系

最近, Frank 等^[25]研究了对于两个比特的共生纠缠度 C 与 CHSH 不等式的关系, 对于纯态和一些贝尔对角态, 对给定的纠缠度 C 其最大贝尔不等式破坏程度为 $2\sqrt{1+C^2}$, 对于 $C \geq \sqrt{2}/2$, B 的最小值为 $2\sqrt{2}C$. 如果 $C \leq \sqrt{2}/2$, 就不会违背 CHSH 不等式, 除非对于贝尔对角态违背 CHSH 不等式. 在某些情况下纠缠越大贝尔不等式破坏越大(图 1、图 4), 但是有贝尔不等式破坏并不是纠缠的充分条件, 即贝尔不等式破坏很大不一定纠缠很大(图 2(c))(d)和图 3(c)(d)). 在图 1(b)和图 4(b)中, 偶极-偶极相

互作用增大纠缠但是减小贝尔不等式破坏. 一个有趣的现象就是很小的纠缠同样可以产生贝尔不等式破坏. 根据文献[24]我们可以知道在系统(1)中的贝尔对角态违反了 CHSH 不等式. 总之, 贝尔不等式破坏与纠缠度不满足单调的函数关系, 这和文献[26]相符.

5. 结 论

本文利用部分转置矩阵的负本征值计算纠缠度的方法, 通过求解 Milburn 方程得到了两个二能级原子和场的相互作用系统中存在内禀退相干的情况下两原子的纠缠和贝尔不等式破坏随时间的演化. 对偶极-偶极相互作用和失谐量对纠缠演化和贝尔不等式破坏的影响进行了研究. 结果表明, 原子间偶极-偶极相互作用对纠缠度和贝尔不等式破坏有显著影响, 失谐量增大会使两原子的纠缠和贝尔不等式破坏变大, 并且我们还发现两原子的纠缠度与贝尔不等式破坏并不是单调的函数关系, 很小的纠缠也可以产生贝尔不等式破坏.

- [1] Einstein A, Podolsky B, Rosen N 1935 *Phys. Rev.* **47** 777
- [2] Schrödinger E 1935 *Naturwissenschaften* **23** 807
- [3] Bennett C H, Brassard G, Crépeau C *et al* 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 1895
- [4] Deutsch D, Ekert A, Jozsa R *et al* 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 2818
Deutsch D, Ekert A, Jozsa R *et al* 1996 *Phys. Rev. Lett.* **80** 2022
- [5] Song K H, Guo G C 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 661 (in Chinese)
[宋克慧、郭光灿 1999 物理学报 **48** 661]
- [6] Zheng S B, Guo G C 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 2392
- [7] Huang Y X, Zhan M S 2004 *Chin. Phys.* **13** 45
- [8] Osnaghi S, Bertet P, Auffeves A *et al* 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 037902
- [9] Hao S R, Wang L Y 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 610 (in Chinese)
[郝三如、王麓雅 2000 物理学报 **49** 610]
- [10] Hein M, Dur W, Briegel H J 2005 *Phys. Rev. A* **71** 032350
- [11] Santos E 1994 *Phys. Lett. A* **188** 198
- [12] Diósi L 1989 *Phys. Rev. A* **40** 1165
- [13] Milburn G J 1991 *Phys. Rev. A* **44** 5401
- [14] Zidan N A, Abdel-Aty M, Obada A S F 2002 *Chaos Solitons Fract.* **13** 1421
- [15] Wang C Z, Fang M F 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1989 (in Chinese)
[王成志、方卯发 2002 物理学报 **51** 1989]
- [16] Tan X, Zhang C Q, Xia Y J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 2263 (in Chinese)
[谭霞、张成强、夏云杰 2006 物理学报 **55** 2263]
- [17] Song J, Cao Z L 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 649 (in Chinese)
[宋军、曹卓良 2005 物理学报 **54** 649]
- [18] Shan C J, Xia Y J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1585 (in Chinese)
[单传家、夏云杰 2006 物理学报 **55** 1585]
- [19] Wang Z C, Wang Q, Zhang Y S *et al* 2005 *Chin. Phys.* **14** 137
- [20] Li S B, Xu J B 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 985
- [21] Peng J S, Li G X 1996 *Introduction of Modern Quantum Optics* (Beijing: Science Press) p410 (in Chinese)
[彭金生、李高翔 1996 近代量子光学导论(北京: 科学出版社)第410页]
- [22] Lee J Y, Kim M S 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 4236
- [23] Jeong H, Lee J, Kim M S 2000 *Phys. Rev. A* **61** 052101
- [24] Horodecki M, Horodecki P, Horodecki R 1995 *Phys. Lett. A* **200** 340
- [25] Frank V, Michael M W 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 170401
- [26] Li S B, Xu J B 2005 *Phys. Rev. A* **72** 022332

Entanglement evolution and Bell inequality violation of two atoms in Tavis-Cummings model with intrinsic decoherence *

Guo De-Jun¹⁾ Shan Chuan-Jia²⁾ Xia Yun-Jie^{1)†}

¹⁾ *College of Physics and Engineering, Qufu Normal University, Qufu 273165, China*

²⁾ *Department of Physics, Hubei Normal University, Huangshi 435002, China*

(Received 29 June 2006 ; revised manuscript received 13 September 2006)

Abstract

Considering the interaction between two two-level atoms and a single-mode field, we find an exact solution of the Milburn equation for the system. We investigate the time evolution of the entanglement between the two atoms and the maximal violation of Bell-CHSH inequality. The influence of dipole-dipole interaction and detuning between the cavity and the atom on the entanglement and Bell violation is discussed. The effect of dipole-dipole interaction between two atoms on the entanglement and Bell inequality violation is obvious; with the detuning increasing, the entanglement between two atoms and Bell inequality violation becomes larger and we find that the stationary value of the entanglement between two atoms only depends on the difference between the dipole-dipole coupling intensity and the detuning. The Bell inequality violation and the entanglement does not satisfy the monotonic relation, a large Bell inequality violation may correspond to a small amount of entanglement.

Keywords : Milburn theory, dipole-dipole interaction, detuning, Bell inequality violation

PACC : 4250, 0365

* Project supported by the Key Program of the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10534030).

† E-mail : yjxia@mail.qfnu.edu.cn