

# 扭转对称光束的产生及其变换过程中的 轨道角动量传递<sup>\*</sup>

高明伟<sup>†</sup> 高春清 林志锋

(北京理工大学光电工程系, 北京 100081)

(2006 年 7 月 28 日收到, 2006 年 12 月 26 日收到修改稿)

研究了采用扭转柱面镜光学系统将厄米-高斯光束变换成为具有轨道角动量的拉盖尔-高斯扭转对称光束. 采用本征模式分解的方法分析了扭转柱面镜光学变换系统实现光束变换的原理. 利用光束传输矩阵和二阶矩理论分析计算了光束经过扭转柱面透镜变换过程中的轨道角动量传递过程, 证明光束与透镜系统的轨道角动量交换发生在第一个柱面透镜处, 光束经过第一个柱面透镜后, 具有的轨道角动量保持不变.

关键词: 轨道角动量, 光束变换, 扭转对称光束, 轨道角动量传递

PACC: 4250, 4260K

## 1. 引 言

人们很早就认识到光束具有线动量和角动量, Poynting 从理论上阐述了光束角动量的力学特性<sup>[1]</sup>. 1936 年 Beth<sup>[2]</sup>首先用实验证明了光束具有与其偏振态有关的自旋角动量, 但是近年来人们才逐渐认识到光束还具有与其横截面内相位分布有关的轨道角动量<sup>[3-6]</sup>. 1992 年 Allen 等<sup>[7]</sup>首先在实验中证实了拉盖尔-高斯光束具有轨道角动量. 对于角向模阶次  $l \neq 0$  的线偏振拉盖尔-高斯光束, 其每个光子的轨道角动量为  $lh$ <sup>[7]</sup>. 由于具有轨道角动量光束的一些特点, 使得它们在生物科学、材料科学以及量子通信领域具有重要的应用前景<sup>[8-15]</sup>. 本文推导了光束轨道角动量的一般表达式, 利用扭转柱面镜光学系统将半导体激光抽运固体激光器产生的厄米-高斯光束变换成为具有轨道角动量的扭转对称光束. 采用本征模式分解方法分析了扭转柱面透镜系统光束变换原理, 利用光束传输矩阵和二阶矩参数矩阵计算了光束经过扭转柱面透镜变换过程中的轨道角动量传递.

## 2. 光束的轨道角动量

光束的角动量密度定义为<sup>[1]</sup>

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times (\epsilon_0 \mathbf{E}_{\text{re}} \times \mathbf{B}_{\text{re}}), \quad (1)$$

式中  $\mathbf{r}$  为位置矢量,  $\mathbf{p}$  为光束的线动量密度,  $\mathbf{E}_{\text{re}}$  为电场强度矢量,  $\mathbf{B}_{\text{re}}$  为磁感应强度矢量. 一般情况下, 人们主要对由光束横截面内的线动量角向分量引起的沿光束传输方向角动量感兴趣<sup>[15]</sup>. 沿光束传播方向的角动量密度为

$$M_z = r p_\varphi, \quad (2)$$

其中  $p_\varphi$  为光束横截面内的线动量密度  $\mathbf{p}$  沿角向的分量. 沿光束传输方向的整体角动量可以通过对光束整个体积积分获得, 即

$$\mathbf{L} = \iiint \mathbf{M}_z \cdot \mathbf{r} dr d\varphi dz. \quad (3)$$

角动量通量定义为

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_z &= \frac{d}{dt} \mathbf{L} \\ &= \frac{1}{c} \iint \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}_T \\ &= \frac{1}{c} \iint r p_\varphi r dr d\varphi. \end{aligned} \quad (4)$$

光束的角动量通量为光束角动量相对于时间的倒数, 表示由角动量产生的光束的扭矩<sup>[16]</sup>. 单色平面波的电场强度可以表示为<sup>[1]</sup>

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_0 \mathbf{u}(x, y, z) \\ &\times \exp[i(\omega t - kz)] \end{aligned}$$

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号 69908001)和教育部博士点基金(批准号 20050007027)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: ghew@bit.edu.cn

$$= E_0 \begin{pmatrix} e\psi(x, y, z) \\ \psi_z(x, y, z) \end{pmatrix} \times \exp[i(\omega t - kz)], \quad (5)$$

式中  $e$  为偏振矢量,  $\psi(x, y, z)$  为光束的场分布. 将 (1)(5) 式代入 (4) 式, 在圆柱坐标系下, 其中与光场分布有关的角动量通量部分为<sup>[17]</sup>

$$J_{z, L} = -i \frac{c_0 \epsilon_0}{4\omega} |E_0|^2 \iint_C (x\psi \partial_y \psi^* - y\psi^* \partial_x \psi) dx dy + CC, \quad (6)$$

式中  $CC$  表示复共轭, 这部分角动量称为轨道角动量. 典型的具有轨道角动量的光束是拉盖尔-高斯光束, 其轨道角动量通量为

$$J_{z, L} = \frac{P}{\omega} l, \quad (7)$$

式中  $P$  为光束的总功率,  $l$  为拉盖尔-高斯光束的角向模阶次. 由 (7) 式可以看出, 角向模阶次  $l \neq 0$  的拉盖尔-高斯光束具有轨道角动量. 而厄米-高斯光束由于不具有与方位角有关的相位项, 因此不具有轨道角动量.

### 3. 扭转柱面透镜模式变换器

拉盖尔-高斯光束是圆形镜共焦腔的本征模<sup>[18]</sup>, 因为它要求谐振腔具有很好的圆对称性, 很难通过谐振腔直接产生. 厄米-高斯光束与拉盖尔-高斯光束相比, 较易由谐振腔直接产生, 因此人们一般采用光束变换的方法由厄米-高斯光束产生具有轨道角动量的拉盖尔-高斯光束<sup>[7, 19]</sup>. 由于厄米-高斯光束和拉盖尔-高斯光束都是稳定球面腔的本征解, 它们构成各自解空间的基础解系, 所以可以互相表示为另外一个基础解系的线性组合. 拉盖尔-高斯光束可以分解为一系列同阶次的厄米-高斯光束和的形式<sup>[17, 20]</sup>, 即

$$E_{m, n}^{LG}(x, y, z) = \sum_{k=0}^N i^k \alpha(n, m, k) E_{N-k, k}^{HG}(x, y, z), \quad (8)$$

式中

$$\alpha(n, m, k) = \left( \frac{(N-k)! k!}{2^N n! m!} \right) \frac{1}{k!} \times \frac{d^k}{dt^k} [(1-t)^n (1+t)^m]_{t=0} \\ (N = n + m).$$

一个主轴与  $x, y$  坐标轴成  $45^\circ$  角的厄米-高斯光束

同样也可以分解为一系列厄米-高斯光束和的形式, 即

$$E_{m, n}^{HG} \left( \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \frac{x-y}{\sqrt{2}}, z \right) = \sum_{k=0}^N \alpha(n, m, k) E_{N-k, k}^{HG}(x, y, z). \quad (9)$$

由 (8)(9) 式比较可以看出, 两个展开公式中各项具有相同的系数, 不同的是 (9) 式中相邻展开项之间相差常复数  $i$  的一次幂, 也就是相邻展开项之间存在  $\pi/2$  相位变化. 图 1 是厄米-高斯光束  $E_{2,0}^{HG}$  和拉盖尔-高斯光束  $E_{2,0}^{LG}$  的模式展开结果.

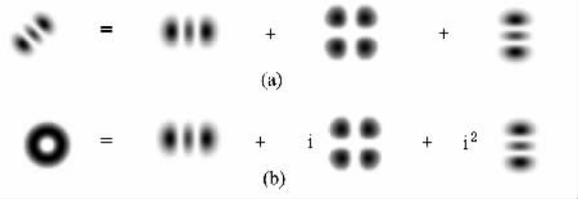


图 1 厄米-高斯光束  $E_{2,0}^{HG}$  和拉盖尔-高斯光束  $E_{2,0}^{LG}$  的模式展开 (a) 厄米-高斯光束  $E_{2,0}^{HG}$ , (b) 拉盖尔-高斯光束  $E_{2,0}^{LG}$

从以上分析可以知道, 当一束厄米-高斯光束的相邻展开项通过一个光束变换系统后, 彼此之间引入了一个  $\pi/2$  的相位差, 那么输出光束为拉盖尔-高斯光束. 对于一般的对称高斯光束, 其 Gouy 相移可以表示为<sup>[17]</sup>

$$(n+m+1)\varphi(z) = (n+m+1) \arctan((z-z_0)/z_R), \quad (10)$$

式中  $z_0$  为光束的束腰位置,  $z_R$  为光束的瑞利长度. 光束总的 Gouy 相移可以表示为两个方向的 Gouy 相移的共同结果  $(n+1/2)\varphi_x(z) + (m+1/2)\varphi_y(z)$ . 这里

$$\varphi_x(z) = \arctan((z-z_{0x})/z_{Rx}), \quad (11) \\ \varphi_y(z) = \arctan((z-z_{0y})/z_{Ry}),$$

式中  $z_{0x}, z_{0y}, z_{Rx}, z_{Ry}$  分别为光束两个方向的束腰位置和瑞利长度. 在模式变换过程中, 我们采用扭转柱面透镜系统实现光束变换, 扭转柱面透镜系统由  $C_1, C_2, C_3$  三个柱面透镜构成<sup>[21, 22]</sup>, 焦距分别为  $f/2, f, f/2$ , 彼此间距为  $f/2$ , 其中  $f = z_R$ . 第二个柱面透镜  $C_2$  的主轴与  $C_1, C_3$  两个柱面透镜的主轴互相垂直, 入射光束的主轴与柱面透镜的主轴的夹角为  $\pi/4$ . 输入光束束腰位于第一个柱面透镜  $C_1$  的前焦面上, 变换系统的结构如图 2 所示.

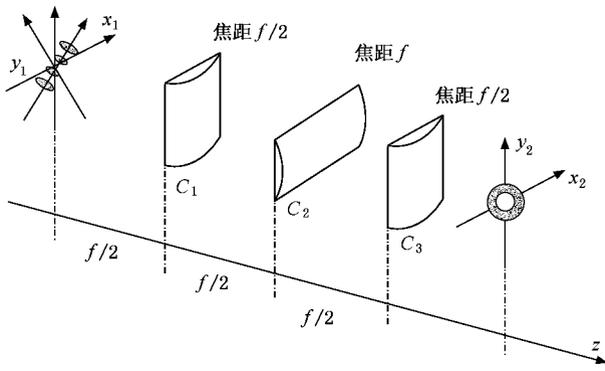


图 2 扭转柱面透镜变换系统结构示意图

变换的厄米-高斯光束经过扭转柱面透镜系统，入射厄米-高斯光束两个方向引入的 Gouy 相移不同，如图 3 所示。

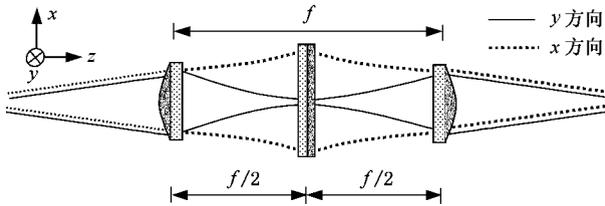


图 3 扭转柱面透镜系统中两个方向的光束传输

由 (11) 式可知 (8) 式中相邻项之间经过变换系统产生的 Gouy 相移差为

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= [(n + 1/2)\varphi_x(z) + (m + 1/2)\varphi_y(z)] \\ &\quad - [((n + 1) + 1/2)\varphi_x(z) \\ &\quad + ((m - 1) + 1/2)\varphi_y(z)] \\ &= \varphi_y(z) - \varphi_x(z). \end{aligned} \tag{12}$$

将 (10) 式代入 (12) 式可得

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= 2\arctan\left(\frac{f/2}{z'_{Ry}}\right) \\ &\quad - 2\left(\arctan\left(\frac{f}{z_{Rx}}\right) - \arctan\left(\frac{f/2}{z_{Rx}}\right)\right). \end{aligned} \tag{13}$$

这里  $z_{Rx}$  为光束在  $x-z$  平面内的瑞利长度，

$$z_{Rx} = z_{Ry} = f.$$

$z'_{Ry}$  为经过柱面透镜  $C_1$  后， $y-z$  平面内光束的瑞利长度，

$$z'_{Ry} = \frac{z_{Ry}(f/2)^2}{z_{Ry}^2 + (z - f/2)^2}. \tag{14}$$

这里  $z = f/2$ ，因此有  $z'_{Ry} = f/4$ 。将 (14) 式代入 (13) 式可得

$$\Delta\varphi = \varphi_y(z) - \varphi_x(z) = \pi/2. \tag{15}$$

与线偏振光通过四分之一波片变为圆偏振光相似，厄米-高斯光束经过扭转柱面透镜系统时相邻展开项之间由于 Gouy 相移引入  $\pi/2$  的相位差，因此这种系统也可以称为“ $\pi/2$  模式变换器”。由 (8) 式可知，束腰位置和瑞利长度满足变换要求的厄米-高斯光束经过该系统后变为拉盖尔-高斯光束。上述柱面透镜变换系统还可以简化为两个柱面组成的变换系统<sup>[17]</sup>，并可以进一步简化为一个厚柱面透镜。图 4 (a) 为模式发生器产生的高阶厄米-高斯光束，图 4 (b) 为经过扭转柱面透镜系统变换后输出的环形拉盖尔-高斯光束。

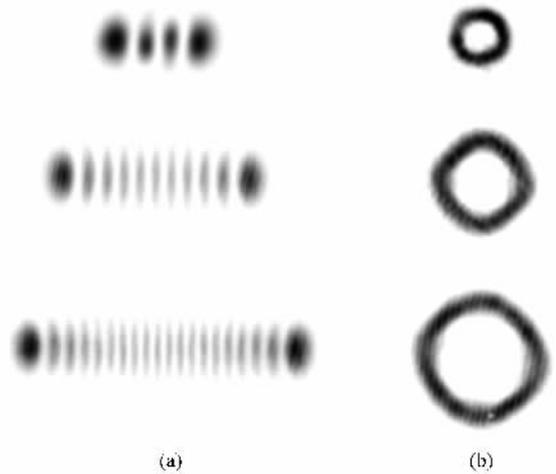


图 4 经过扭转柱面透镜系统变换前后的光斑图形 (a) 变换前 (b) 变换后

### 4. 光束变换过程中的轨道角动量转移

由上述分析可知，一束不具有轨道角动量的厄米-高斯光束经过扭转柱面透镜变换系统后变为具有轨道角动量的拉盖尔-高斯光束。根据动量守恒原理，光束与变换透镜相互作用过程中发生了轨道角动量转移，下面我们利用光束传输矩阵和光束二阶矩分别研究激光光束经过扭转柱面透镜变换系统的三个柱面透镜后的轨道角动量变化。光束的二阶矩定义为<sup>[23]</sup>。

$$x^m y^n u^p v^t = \frac{\iint x^m y^n u^p v^t h(\mathbf{r}, \boldsymbol{\theta}) \mathrm{d}\mathbf{r} \mathrm{d}\boldsymbol{\theta}}{\iint h(\mathbf{r}, \boldsymbol{\theta}) \mathrm{d}\mathbf{r} \mathrm{d}\boldsymbol{\theta}}, \tag{16}$$

式中  $h(\mathbf{r}, \boldsymbol{\theta})$  为光束的 Wigner 函数， $\mathbf{r} = (x, y)^T$ ， $\boldsymbol{\theta} = (u, v)^T$ ， $m, n, p, t$  为非负整数，满足

$$m + n + p + t = 2. \tag{17}$$

由(17)式可知, 光束具有 10 个不同的二阶矩, 为了方便, 把光束的二阶矩表示为一个  $4 \times 4$  的矩阵<sup>[24]</sup>

$$V = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xu & xv \\ xy & y^2 & yu & yv \\ xu & yu & u^2 & uv \\ xv & yv & uv & v^2 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

在(18)式中, 二阶矩  $xu$ ,  $yv$  与光束的扭转有关, 对于如(5)式所示光束更一般的表达式为<sup>[24]</sup>

$$xv = \frac{-i\lambda c_0 \epsilon_0 |E_0|^2}{2\pi P} \iint x\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial y} dx dy + \text{CC}, \quad (19)$$

$$yu = \frac{-i\lambda c_0 \epsilon_0 |E_0|^2}{2\pi P} \iint y\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} dx dy + \text{CC}. \quad (20)$$

$xv$  与  $yu$  的差为

$$xv - yu = -\frac{-i\lambda c_0 \epsilon_0 |E_0|^2}{2\pi P} \times \iint \left( x\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial y} - y\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right) dx dy + \text{CC}. \quad (21)$$

将(6)与(21)式进行比较有

$$J_{z,l} = \frac{P}{2c} (xv - yu), \quad (22)$$

式中  $c$  为光速. 当光束通过如图 2 所示的一阶光学系统后, 输出光束的二阶矩矩阵满足如下关系:

$$V_{\text{out}} = M V_{\text{in}} M^T, \quad (23)$$

式中  $M = M_n M_{n-1} \dots M_1$ , 其中  $M_i$  为单个一阶光学元件的矩阵表达式. 对于自由空间传输, 其矩阵表达式为

$$M_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & z & 0 \\ 0 & 1 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

对于主轴沿  $x$  方向的薄柱面透镜, 其矩阵表达式为

$$M_{\text{cyl}x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1/f_x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

对于主轴沿  $y$  方向的薄柱面透镜, 其矩阵表达式为

$$M_{\text{cyl}y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/f_y & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

由(22)式可知, 通过计算光束经过一阶光学系统后的二阶矩  $xv$  与  $yu$ , 就可以计算变换过程中光束轨道角动量的变化. 对于如图 2 所示的变换系统, 输入光束的二阶矩矩阵满足<sup>[25]</sup>

$$V_{\text{in}} = \begin{pmatrix} x_0^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_0^2 \end{pmatrix}, \quad (27)$$

式中

$$\frac{x_0^2}{u_0^2} = \frac{y_0^2}{v_0^2} = z_R = f.$$

光束两个方向具有相同的瑞利长度和束腰位置.

激光光束经过柱面透镜  $C_1, C_2, C_3$  后, 在柱面透镜出射面位置的变换矩阵表达式分别为

$$M_{C_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/f & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & f & 0 \\ 0 & 1 & 0 & f \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & f & 0 \\ 0 & 1 & 0 & f \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/f & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (28a)$$

$$M_{C_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2f & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & f & 0 \\ 0 & 1 & 0 & f \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/f & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & f & 0 \\ 0 & 1 & 0 & f \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2f} \\ -1/f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2/f & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (28b)$$

$$\begin{aligned}
 M_{C_3} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/f & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & f & 0 \\ 0 & 1 & 0 & f \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2f} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & f & 0 \\ 0 & 1 & 0 & f \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/f & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & f & 0 \\ 0 & 1 & 0 & f \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & f & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2f} \\ -1/f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{28c}
 \end{aligned}$$

将(27)(28)式代入(23)式中, 光束经过柱面透镜  $C_1, C_2, C_3$  后的矩阵表达式分别为

$$V_1 = \begin{pmatrix} \frac{x_0^2}{2} + \frac{y_0^2}{4} & 0 & \frac{y_0^2}{2f} & -\frac{(y_0^2 - x_0^2)}{2f} \\ 0 & \frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{2} & \frac{(y_0^2 - x_0^2)}{2f} & \frac{x_0^2}{2f} \\ \frac{y_0^2}{2f} & \frac{(y_0^2 - x_0^2)}{2f} & \frac{2x_0^2 + y_0^2}{f^2} & -\frac{(x_0^2 + y_0^2)}{f^2} \\ -\frac{(y_0^2 - x_0^2)}{2f} & \frac{x_0^2}{2f} & -\frac{(x_0^2 + y_0^2)}{f^2} & \frac{x_0^2 + 2y_0^2}{f^2} \end{pmatrix}, \tag{29a}$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} \frac{13x_0^2}{16} + \frac{5y_0^2}{16} & \frac{7x_0^2}{16} + \frac{7y_0^2}{16} & \frac{-3x_0^2 + y_0^2}{4f} & -\frac{(-x_0^2 + 3y_0^2)}{4f} \\ \frac{7x_0^2}{16} + \frac{7y_0^2}{16} & \frac{5x_0^2}{16} + \frac{13y_0^2}{16} & \frac{(-3x_0^2 + y_0^2)}{4f} & \frac{x_0^2 - 3y_0^2}{4f} \\ \frac{-3x_0^2 + y_0^2}{4f} & \frac{(-3x_0^2 + y_0^2)}{4f} & \frac{9x_0^2 + y_0^2}{4f^2} & \frac{-3(x_0^2 + y_0^2)}{4f^2} \\ -\frac{(-x_0^2 + 3y_0^2)}{4f} & \frac{x_0^2 - 3y_0^2}{4f} & \frac{-3(x_0^2 + y_0^2)}{4f^2} & \frac{x_0^2 + 9y_0^2}{4f^2} \end{pmatrix}, \tag{29b}$$

$$V_3 = \begin{pmatrix} \frac{5x_0^2}{8} + \frac{5y_0^2}{8} & 0 & \frac{-(y_0^2 + x_0^2)}{4f} & \frac{-(y_0^2 - x_0^2)}{2f} \\ 0 & \frac{5x_0^2}{8} + \frac{5y_0^2}{8} & \frac{(y_0^2 - x_0^2)}{2f} & \frac{-(y_0^2 + x_0^2)}{4f} \\ \frac{-(y_0^2 + x_0^2)}{4f} & \frac{(y_0^2 - x_0^2)}{2f} & \frac{x_0^2 + y_0^2}{2f^2} & 0 \\ \frac{-(y_0^2 - x_0^2)}{2f} & \frac{-(y_0^2 + x_0^2)}{4f} & 0 & \frac{x_0^2 + y_0^2}{2f^2} \end{pmatrix}. \tag{29c}$$

将(29)式中的相应参量代入(22)式, 经过柱面透镜  $C_1, C_2, C_3$  后光束的轨道角动量通量为

$$J_{1z,l} = J_{2z,l} = J_{3z,l} = \frac{P}{c} \left( \frac{y_0^2 - x_0^2}{f} \right) \quad (30)$$

式中  $J_{1z,l}, J_{2z,l}, J_{3z,l}$  分别为光束经过柱面透镜  $C_1, C_2, C_3$  后的轨道角动量通量. 对于厄米-高斯光束  $E_{m,0}^{\text{HG}}$ , 由二阶矩光束半径公式有<sup>[25]</sup>

$$y_0^2 = \frac{2m+1}{4} \omega_0^2,$$

$$x_0^2 = \frac{1}{4} \omega_0^2. \tag{31}$$

将(29)式代入(30)式, 并考虑  $\frac{\pi\omega_0^2}{\lambda} = z_R = f$ , 有

$$J_{z,l} = \frac{P}{\omega} m. \tag{32}$$

由(7)(32)式比较可知, 光束的动量交换发生在第一个柱面透镜, 经过第一个柱面透镜后光束的轨道角动量保持不变, 其他两个柱面透镜的用处是

把像散的厄米-高斯光束变为旋转对称的拉盖尔-高斯光束. 利用数值模拟的方法分别计算光束经过三个柱面透镜后的光强和相位分布<sup>[26]</sup>, 结果如图 5 所示. 从图 5 可以看出, 光束经过柱面透镜后相位分布出现“畸点”, 由此引起光束的轨道角动量不为零.

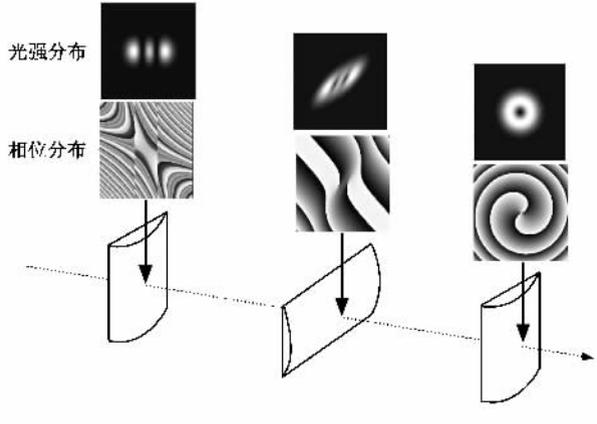


图 5 光束变换过程中三个柱面镜出射面处的光强分布和光束波前相位分布

## 5. 结 论

本文首先分析了光束的轨道角动量源于光束线动量的角向分量, 而线动量的角向分量是由于波前相位的“畸点”引起的. 具有螺旋型相位分布的拉盖尔-高斯光束是典型的具有轨道角动量的光束. 利用由扭转柱面透镜组成的“ $\pi/2$  模式变换器”实现了由无轨道角动量的厄米-高斯光束到具有轨道角动量的拉盖尔-高斯光束的变换. 利用二阶矩参数矩阵和光束传输矩阵计算了经过三个扭转柱面透镜后的轨道角动量, 证明光束与柱面透镜系统的动量交换发生在第一个柱面透镜  $C_1$  处, 经过第一个柱面透镜后, 光束具有的轨道角动量不再改变. 透镜  $C_2, C_3$  的作用是使输出光束为扭转对称光束.

感谢德国柏林工业大学对本文工作国际合作研究方面的支持.

- [ 1 ] Jackson J 1962 *Classical Electrodynamics* ( New York : Wiley )
- [ 2 ] Beth R 1936 *Phys. Rev.* **50** 115
- [ 3 ] He H, Friese M, Heckenberg N *et al* 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 115
- [ 4 ] Friese M, Enger J, Rubinsztein-Dunlop H *et al* 1996 *Phys. Rev. A* **54** 1593
- [ 5 ] Courtial J, Dholakia K, Allen L *et al* 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 4828
- [ 6 ] Courtial J, Dholakia K, Allen L *et al* 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 3217
- [ 7 ] Allen L, Beijersbergen M, Spreeuw R 1992 *Phys. Rev. A* **45** 8185
- [ 8 ] Macdonald M, Spalding G, Dholakia K 2003 *Nature* **426** 421
- [ 9 ] Heckenberg N, McDuff R, Smith C *et al* 1992 *Opt. Quantum Electron.* **24** 951
- [ 10 ] Mair 2001 *Nature* **412** 313
- [ 11 ] Simpson N, Dholakia K, Allen L *et al* 1997 *Opt. Lett.* **22** 52
- [ 12 ] Wei H, Xue X, Leach J *et al* 2003 *Opt. Commun.* **223** 117
- [ 13 ] Gao M W, Gao C Q, He X Y *et al* 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 413 ( in Chinese ) [ 高明伟、高春清、何晓燕等 2004 物理学报 **53** 413 ]
- [ 14 ] Courtial J, Dholakia K, Allen L *et al* 1997 *Phys. Rev. A* **56** 4193
- [ 15 ] O'Neil A, Padgett M 2000 *Opt. Commun.* **185** 139
- [ 16 ] Laab H, Gao C, Weber H 1998 *J. Mod. Opt.* **45** 25
- [ 17 ] Beijersbergen M, Allen L, Woerdman J 1993 *Opt. Commun.* **96** 123
- [ 18 ] Siegman A 1986 *Laser* ( New York : Mill Valley )
- [ 19 ] Ji Y, Zhang J J, Yao D C *et al* 1996 *Acta Phys. Sin.* **45** 2027 ( in Chinese ) [ 姬 扬、张静娟、姚德成等 1996 物理学报 **45** 2027 ]
- [ 20 ] Abramochkin E, Volostnikov V 1991 *Opt. Commun.* **83** 123
- [ 21 ] Friberg A, Tervonen E, Turunen J 1994 *J. Opt. Soc. Am. A* **11** 1818
- [ 22 ] Friberg A, Gao C, Eppich B *et al* 1996 *Proc. SPIE* **2870** 154
- [ 23 ] Siegman A 1990 *Proc. SPIE* **1224** 2
- [ 24 ] Hodgson N, Weber H 1997 *Optical Resonators: Fundamentals, Advanced Concepts and Applications* ( Berlin : Springer Verlag )
- [ 25 ] Gao C 1999 *Characterization and Transformation of Astigmatic Laser Beams* ( Berlin : Wissenschaft & Technik Verlag )
- [ 26 ] Wang D L, Gong Q H, Wang K G *et al* 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1484 ( in Chinese ) [ 王丹翎、龚旗煌、汪凯戈等 2000 物理学报 **49** 1484 ]

# Generation of twisted stigmatic beam and transfer of orbital angular momentum during the beam transformation \*

Gao Ming-Wei<sup>†</sup> Gao Chun-Qing Lin Zhi-Feng

( *Department of Opto-electronics Engineering , Beijing Institute of Technology , Beijing 100081 , China* )

( Received 28 July 2006 ; revised manuscript received 26 December 2006 )

## Abstract

The twisted stigmatic beam with orbital angular momentum generated by transforming the Hermite-Gaussian beam through a rotated cylindrical lens system was studied. By utilizing of method of mode decomposition , the theory of transformation was analyzed. The transfer of orbital angular momentum during beam transformation was analyzed using beam transforming matrix and Collins integral. It was found that the angular momentum transfer takes place at the first cylindrical lens and remains constant after that.

**Keywords** : orbital angular momentum , beam transformation , twisted stigmatic beam , transfer of orbital angular momentum

**PACC** : 4250 , 4260K

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 69908001 ) and the Doctoral Foundation of Ministry of Education , China ( Grant No. 20050007027 ).

<sup>†</sup> E-mail : ghew@bit.edu.cn