

非线性布拉格光栅双稳特性的理论研究*

田剑锋 吴正茂 夏光琼†

(西南大学物理科学与技术学院, 重庆 400715)
(2006 年 7 月 27 日收到 2006 年 12 月 19 日收到修改稿)

基于耦合模理论, 利用椭圆积分方法对非线性布拉格光栅(NLBG)的双稳特性进行了理论分析, 推导出较为普遍情形下表述 NLBG 输出强度与输入强度之间关系的解析表达式, 并采用数值模拟的方法研究了 NLBG 双稳态对光栅内部参数的依赖性. 结果表明: NLBG 双稳特性不仅对耦合系数与光栅长度的乘积具有整体依赖性, 而且对耦合系数和光栅长度具有单一依赖性.

关键词: 非线性布拉格光栅, 双稳态, 椭圆积分, 耦合系数

PACC: 4265P, 4270Q, 4281W

1. 引言

近年来, 非线性布拉格光栅(NLBG)在非线性光学领域的应用引起人们的广泛关注^[1-5]. 光栅的本质特征是光栅的透射率与入射波频率有关, 处于某一频率范围的光受到阻隔而形成光子带隙(PBG), 其值与耦合系数有关. NLBG 在 PBG 边缘处表现出丰富的非线性特性, 其非线性特性使光栅的 PBG 动态可调, 由此产生了 NLBG 大量的、有趣的应用, 如光压缩^[6-8]、光开关以及光双稳^[9-15]等. 文献[9-15]分别从不同的角度对 NLBG 的双稳特性进行了相关研究, 但是, 在研究过程中往往把光栅耦合系数与光栅长度当作一个整体来讨论. 事实上, 在文献[16]的结果中, 已隐含 NLBG 的输出双稳特性与光栅长度之间存在单一依赖关系. 基于此, 本文从耦合模方程出发, 采用椭圆积分方法对 NLBG 输出-输入强度依赖关系进行了解析研究. 在此基础上, 数值模拟了 NLBG 双稳态对光栅内部参数的依赖性. 结果表明: NLBG 输出双稳态不仅对耦合系数和光栅长度的乘积具有整体依赖性, 而且分别对耦合系数和光栅长度具有单一依赖性. 我们希望本文的研究能有助于加深人们对 NLBG 的认识, 并对 NLBG 的优化设计具有一定的参考价值.

2. 理论分析

考虑一光纤光栅, 其轴向为 z 方向, 折射率分布为 $n(z) = n_0 + n_1(z) \cos[2\beta_0 z + \phi] + n_2 |E(z)|^2$, (1)

式中 $E(z)$ 为光栅内部电场振幅, $\beta_0 = \pi/\Lambda$ 为布拉格波数, Λ 为光栅周期, $\Lambda = \lambda_0/2n_0$, λ_0 为布拉格波长, ϕ 为光栅中的常数相位, n_0 表示光栅的平均折射率, $n_1(z)$ 为折射率周期变化振幅, 也称调制深度, n_2 为非线性克尔系数. 稳态条件下, 光栅内传播的电场可以写作

$$E(z) = E_f \exp[i\beta z] + E_b \exp[-i\beta z], \quad (2)$$

式中 $\beta = n_0 \omega/c$, ω 为光载波的中心角频率, c 为真空中的光速, E_f 和 E_b 分别是光栅中前向和后向波的振幅慢变包络函数. 将(2)式代入波动方程

$$\nabla^2 E + n^2(z)k_0^2 E = 0,$$

可得到如下稳态非线性耦合模方程^[11]:

$$\frac{dE_f}{dz} = ikE_b \exp[-(2\delta z - \phi)] + i\Gamma(|E_f|^2 + 2|E_b|^2)E_f, \quad (3a)$$

$$\frac{dE_b}{dz} = -ikE_f \exp[(2\delta z - \phi)] - i\Gamma(2|E_f|^2 + |E_b|^2)E_b, \quad (3b)$$

这里 k_0 为真空中的波数, δ 为失谐量, Γ 为非线性

* 重庆市自然科学基金(批准号 2006BB2331)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: gqxia@swu.edu.cn

系数 k 为耦合系数,它们分别可表示为

$$\begin{aligned} k_0 &= \omega/c, \\ \delta &= \beta - \beta_0, \\ \Gamma &= \frac{\pi n_2}{\lambda_0}, \\ k(z) &= \frac{\pi n_1(z)}{\lambda_0}. \end{aligned} \quad (4)$$

为了求解方程(3a)和(3b),将电场强度表达式写作振幅相位分离的形式

$$\begin{aligned} E_f &= |E_f| \exp(i\phi_f), \\ E_b &= |E_b| \exp(i\phi_b). \end{aligned} \quad (5)$$

将(5)式代入方程组(3),可以得到对于一定的输入强度 NLBG 内部的两个恒量

$$\begin{aligned} E_T^2 &= E_f^2 - E_b^2, \\ G &= |E_f| |E_b| \cos\psi(z) \\ &\quad + (2\delta + 3\Gamma |E_b|^2) |E_f|^2 (2k). \end{aligned} \quad (6)$$

相位 $\psi(z)$ 可以表示为

$$\psi(z) = 2\delta z + \phi_f - \phi_b - \phi. \quad (7)$$

应用(6)式中的两个恒量,可以得到关于前向波 E_f 的方程

$$\begin{aligned} \left(\frac{L}{2} \frac{dy}{dz}\right)^2 &= (y - J) [(kL)^2 y - (y - J) (\delta L + 2y)^2] \\ &= Q(y), \end{aligned} \quad (8)$$

式中

$$\begin{aligned} y &= |E_f|^2 / |E_c|^2, \\ J &= |E_T|^2 / |E_c|^2, \\ |E_c|^2 &= \frac{4n_0\lambda_0}{3\pi n_2 L}. \end{aligned} \quad (9)$$

稳态条件下,慢变振幅在边界处满足下列边界条件:当 $z=0$ 时,

$$\begin{aligned} E_i(0) &= E_i, \\ E_r(0) &= E_b(0); \end{aligned} \quad (10a)$$

当 $z=L$ 时,

$$\begin{aligned} E_b(L) &= 0, \\ E_t &= E(L). \end{aligned} \quad (10b)$$

这里 E_i , E_r 及 E_t 分别为入射波、反射波及透射波的慢变振幅.结合(10a)(10b)式,方程(8)中存在如下关系:当 $z=0$ 时,

$$y(0) = I = E_i^2/E_c^2;$$

当 $z=L$ 时,

$$\begin{aligned} E_f^2(L) - E_b^2(L) &= E_t^2(L) \\ &= E_T^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(L) &= E_f^2(L)/E_c^2 \\ &= E_t^2/E_c^2 \\ &= E_T^2/E_c^2 = J. \end{aligned}$$

因此,对方程(8)左端积分以后可以得到关于输入强度与输出强度关系的表达式,方程的积分属于椭圆积分范畴,所得结果与积分限 $y(0)$, $y(L)$ 和方程右端 $Q(y)=0$ 所得 4 个根 y_1, y_2, y_3, y_4 有关.

$$\begin{aligned} y_1 &= J, \\ y_2 &= \sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3}} \\ &\quad + \sqrt[3]{-q/2 - \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3}} - \frac{s}{3}, \\ y_3 &= m \sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3}} \\ &\quad + m^2 \sqrt[3]{-q/2 - \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3}} - \frac{s}{3}, \\ y_4 &= m^2 \sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3}} \\ &\quad + m \sqrt[3]{-q/2 - \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3}} - \frac{s}{3}, \end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned} m &= \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \\ m^2 &= \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}, \\ p &= -(\delta L)^2/12 - (\delta L)J/3 \\ &\quad - (kL)^2/4 - J^2/3, \\ s &= \delta L - J, \\ q &= -(\delta L)^3/108 - (\delta L)^2 J/18 \\ &\quad - (\delta L)J^2/9 - 2J^3/27 \\ &\quad + (kL)(\delta L)/12 - (kL)^2 J/12. \end{aligned} \quad (11)$$

方程(8)积分计算结果如下:

$$\begin{aligned} \int_{y(0)}^{y(L)} \frac{dy}{\sqrt{Q(y)}} &= \int_I^J \frac{dy}{\sqrt{Q(y)}} \\ &= \frac{2}{L} \int_0^L dz. \end{aligned} \quad (12)$$

下面分三种情形进行讨论.

情形 1 当 $y_1 \geq I > J > y_2 > y_3 > y_4$ 时(12)式转化为

$$\int_I^J \frac{dy}{\sqrt{Q(y)}} = -\operatorname{sn}^{-1}(\sin\theta, v)u, \quad (13)$$

式中 $\operatorname{sn}(\sin\theta, v)$ 是 Jacobian 正弦椭圆函数,以及

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \left[\frac{(y_1 - y_3)(I - y_2)}{(y_1 - y_2)(I - y_3)} \right]^{1/2}, \\ u &= \mathfrak{A}(y_1 - y_3, y_2 - y_4)^{1/2}, \\ v &= \mathfrak{A}(y_1 - y_2, y_3 - y_4)^{1/2}/u. \end{aligned} \quad (14)$$

对 (13) 式求逆, 可得到

$$I = y_3 - \frac{y_3 - y_2}{1 - \frac{y_1 - y_2}{y_1 - y_3} \text{sn}^2(u, v)}, \quad (15)$$

情形 2 当 $y_1 \geq I, J > y_2$, 且 y_3 和 y_4 为共轭复数时 (12) 式转化为

$$\int_I^J \frac{dy}{\sqrt{Q(y)}} = -\text{cn}^{-1}(\cos\theta, v)u, \quad (16)$$

式中 $\text{cn}(\cos\theta, v)$ 是 Jacobian 余弦椭圆函数, 以及

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{(y_1 - I)B - (I - y_2)A}{(y_1 - I)B + (I - y_2)A}, \\ u &= 4\sqrt{AB}, \\ v^2 &= [(y_1 - y_2)^2 - (A - B)^2] / (4AB), \\ A &= |y_1 - y_3|, \\ B &= |y_2 - y_3|. \end{aligned} \quad (17)$$

对 (16) 式求逆, 可得

$$I = y_2 + \frac{y_1 - y_2}{1 + \frac{|y_1 - y_3| [1 + \text{cn}(u, v)]}{|y_2 - y_3| [1 - \text{cn}(u, v)]}}. \quad (18)$$

情形 3 当 $y_1 > y_2 > y_3 \geq I, J > y_4$ 时 (12) 式转化为

$$\int_I^J \frac{dy}{\sqrt{Q(y)}} = -\text{sn}^{-1}(\sin\theta, v)u, \quad (19)$$

式中 u 和 v 同 (14) 式, 以及

$$\sin\theta = \left[\frac{(y_1 - y_3)(I - y_4)}{(y_3 - y_4)(y_1 - I)} \right]^{1/2}.$$

对 (19) 式求逆, 可得

$$I = y_1 + \frac{y_1 - y_4}{1 - \frac{y_3 - y_4}{y_3 - y_1} \text{sn}^2(u, v)}. \quad (20)$$

(15) (18) 以及 (20) 式中 y_1, y_2, y_3, y_4 均为 δL 和 kL 的函数, 表明 NLBG 稳态条件下的输入-输出强度关系依赖于 kL 和 δL . 上述理论结果可作如下理解: 当 δL 确定, 而 kL 不确定时, 不同的 kL 得到的 NLBG 输入-输出强度关系不同; 另一方面, 当只有 δ 确定而 L 不确定时, 即使同样的 kL 而不同的 k 和 L 组合也会得到不同的结果. 因此, NLBG 双稳态特性不仅对耦合系数与光栅长度乘积具有整体依赖性, 而且对耦合系数和光栅长度具有单一依赖性.

3. 数值模拟结果

在计算过程中, 输入光强 I_i 、输出光强 I_t 分别对 I_c 进行归一化, 其中 I_c 为入射临界光强^[9],

$$I_c = \frac{4n_0\lambda_0}{3\pi n_2 L}.$$

3.1. NLBG 双稳态对 kL 的整体依赖性

图 1 给出了 kL 取不同值时 NLBG 稳态输入-输出曲线. 计算中取 $\delta L = 5$. 从图 1 可以看出当 δL 一定时, NLBG 输出双稳态对 kL 的依赖关系. 当 $kL = 4$ 时, 入射光接近透射态, 光栅内部反馈较弱, 不足以产生双稳态. 当 kL 增大到 6 时, 光栅内部反馈增强, 双稳现象发生. 当 kL 继续增大时, 双稳环宽度明显增大, 而且当 kL 为 6 和 8 时还可产生多个双稳区域. 多个双稳区域的产生可以作如下解释: 当入射强度较小时, 光栅内部非线性效应较弱, 入射波完全处于光子禁带 (PBG) 内部, 透射率很小. 随着入射强度的增大, 光栅内部能量增大, 非线性效应增强, PBG 相对于线性情形下向长波长方向移动. 当入射强度增大到使入射波靠近 PBG 边缘时, 输出端透射率将产生一个跳变, 即双稳开关效应. 当入射强度继续增大时, 非线性效应继续增强, PBG 继续向长波长方向移动. 当入射强度增大到使入射波完全落在 PBG 之外时, 输出端透射率将又产生一个跳变, 因而再次表现出双稳开关效应. 当入射强度继续增大到使入射波完全远离 PBG 时, 入射波将不再受光栅的作用而处于完全透射态.

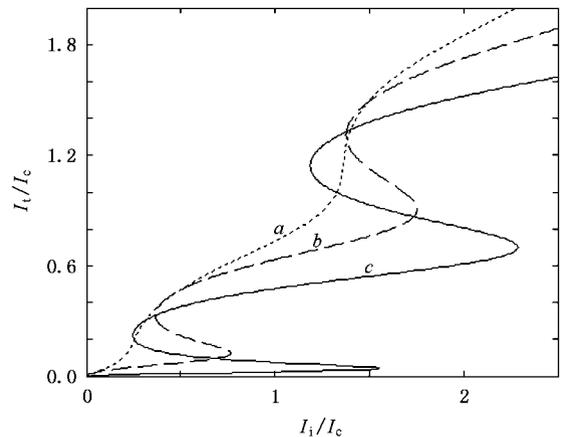


图 1 kL 取不同值时 NLBG 稳态输入-输出曲线. 曲线 a 为 $kL = 4$, 曲线 b 为 $kL = 6$, 曲线 c 为 $kL = 8$

3.2. NLBG 双稳态对 k 和 L 的单一依赖性

图 2 给出了 k 和 L 取不同值时 NLBG 稳态输入-输出曲线. 计算中取 $kL = 6, \delta = 300 \text{ m}^{-1}$. 从图 2 可以明显发现: NLBG 输出双稳态分别对 k 和 L 均具有一定的依赖性. 当 $k = 200 \text{ m}^{-1}, L = 0.03 \text{ m}$ 时, 输出无双稳现象. 当 $k = 300 \text{ m}^{-1}, L = 0.02 \text{ m}$ 时, 尽

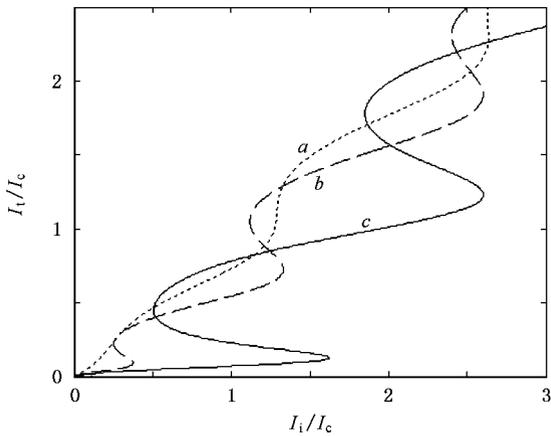


图2 k 和 L 取不同值时 NLBG 稳态输入-输出曲线. 曲线 a 为 $k = 200 \text{ m}^{-1}$, $L = 0.03 \text{ m}$; 曲线 b 为 $k = 300 \text{ m}^{-1}$, $L = 0.02 \text{ m}$; 曲线 c 为 $k = 600 \text{ m}^{-1}$, $L = 0.01 \text{ m}$

管有双稳现象, 但双稳环宽度较小. 当 k 增大到 600

m^{-1} , $L = 0.01 \text{ m}$ 时, 双稳环宽度增大, 而且在曲线 b 和曲线 c 中表现出多个双稳区域. 以上结果表明, 在实际应用中通过合理选择 k 和 L 可对光栅的双稳态性能进行进一步的优化.

4. 结 论

基于耦合模理论, 利用椭圆积分方法对 NLBG 的双稳特性进行了解析研究并给出了相关数值仿真结果. 理论分析和数值计算的结果表明: NLBG 输出双稳态不仅对耦合系数 k 和光栅长度 L 的乘积 kL 具有整体依赖性, 而且分别对耦合系数 k 和光栅长度 L 具有单一依赖性. kL 太小, 无双稳或者双稳环宽度太小; 较大的 kL 不仅双稳环宽度明显增大而且产生多个双稳环. 在 kL 确定之后, 合理选择 k 和 L 可对光栅的双稳态性能进行进一步的优化.

- [1] Jia X H, Wu Z M, Xia G Q 2004 *Opt. Express* **12** 2945
- [2] Yosia, Ping S, Chao L 2005 *Opt. Express* **13** 5127
- [3] Johnson E, Sargent E H 2002 *J. Light. Technol.* **20** 1388
- [4] Wang H S, Sun D R, Zhang Z G et al 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2185 (in Chinese) 王淮生、孙大睿、张志刚等 2003 物理学报 **52** 2185]
- [5] Ye Q, Liu F, Cai H W et al 2005 *Chin. Phys.* **14** 969
- [6] Christodoulides D N, Joseph R I 1989 *Phys. Rev. Lett.* **62** 1746
- [7] Eggleton B J, Lenz G, Litchinitser N M 2000 *Fiber Integrated Opt.* **19** 383
- [8] Broderick N G R, Millar P, Richardson D J et al 2000 *Opt. Lett.* **25** 740
- [9] Winful H G, Marburger J H, Garmire E 1979 *Appl. Phys. Lett.*

35 379

- [10] Maywar D N, Agrawal G P 1998 *Opt. Express* **3** 440
- [11] Radic S, George N, Agrawal G P 1995 *J. Opt. Soc. Am. B* **12** 671
- [12] Yang C S, Chiang Y C, Chang H C 2004 *IEEE J. Quantum Electron.* **40** 1337
- [13] Radic S, George N, Agrawal G P 1994 *Opt. Lett.* **19** 1789
- [14] Logvin Y A, Volkov V M 1999 *J. Opt. Soc. Am. B* **16** 774
- [15] Radic S, George N, Agrawal G P 1995 *IEEE J. Quantum Electron.* **31** 1326
- [16] Tian J F, Wu Z M, Xia G Q 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 6419 (in Chinese) 田剑锋、吴正茂、夏光琼 2006 物理学报 **55** 6419]



Theoretical investigation on the bistability of nonlinear Bragg gratings^{*}

Tian Jian-Feng Wu Zheng-Mao Xia Guang-Qiong[†]

(*College of Physical Science and Technology, Southwest University, Chongqing 400715, China*)

(Received 27 July 2006 ; revised manuscript received 19 December 2006)

Abstract

Based on the coupled mode theory, the bistability performance of nonlinear Bragg gratings is analyzed theoretically in terms of elliptic integration. The analytical expression describing the relation between the input intensity and the output intensity is presented. Consequently, the dependence of the bistability on the gratings inner parameters is investigated numerically. The results show that, the bistability performance of the nonlinear Bragg gratings depends not only on the product of the couple coefficient and the grating length but also on the couple coefficient and the gratings length respectively.

Keywords : nonlinear Bragg gratings, bistable state, elliptic integration, couple coefficient

PACC : 4265P, 4270Q, 4281W

^{*} Project supported by the Natural Science Foundation of Chongqing, China (Grant No. 2006BB2331).

[†] Corresponding author. E-mail : gqxia@swu.edu.cn