

# 基于全矢量模式匹配法的三维弯曲波导本征模式计算<sup>\*</sup>

蔡鑫伦<sup>†</sup> 黄德修 张新亮

(华中科技大学光电子科学与工程学院, 武汉 430074)

(2006 年 7 月 13 日收到, 2006 年 11 月 16 日收到修改稿)

采用精确、严格的全矢量模式匹配法, 计算了三维脊型弯曲波导和条形弯曲波导的本征模式, 分析了模式折射率和辐射损耗随弯曲半径的变化关系. 计算结果与已报道的有限差分法的结果符合很好. 对文献中已报道但没有深入分析的现象给出了合理的解释. 半径为 50 和 12  $\mu\text{m}$  的条形波导的计算结果表明: 当波导的弯曲半径减小时, 发生在分界面处的 TE-TM 模耦合会显著增强, 这将导致弯曲波导中的模式不再是传统意义上的准 TE 模和准 TM 模, 而是混合模. 随着半径的减小, 混合模的横向分量之间的差异会减小, 当两个横向分量达到近似相等的强度时, 波导的偏振相关性将会大大减小.

关键词: 导波光学, 全矢量模式匹配法, 微环谐振腔, 光波导理论

PACC: 4280L, 0340K, 8760F

## 1. 引言

微环谐振腔(micro-ring resonator)凭借其强大的光信号处理能力, 广泛地应用于各种有源和无源光学系统中, 并且由于具有工艺简单、易于集成等优点, 微环被认为是未来大规模集成光子回路的基础性元件<sup>[1, 2]</sup>. 在减小微环的弯曲半径以提高光子集成回路集成度的同时, 波导的弯曲损耗也将增大, 为此采用高的芯-包层折射率差来制作微环的弯曲波导是必要的. 传统集成光路中的光波导折射率差一般都较小( $\Delta n < 0.5$ ), 其中的 TE-TM 模耦合(TE-TM coupling)可以忽略不计, 因此各种近似的半矢量光波导分析方法都是适用的, 但是对于微环中的这种小半径、高折射率差的弯曲波导, TE-TM 模耦合现象将会非常明显, 这将导致微环中的模式不再是 TE 模或 TM 模, 而是混合模(hybrid mode)<sup>[3, 4]</sup>. 为了能够对小半径、大折射率差的弯曲波导进行优化设计, 必须采用精确、严格的全矢量光波导分析方法.

目前用于求解三维(3D)弯曲波导本征模式的全矢量方法主要有有限差分法<sup>[5-8]</sup>和模式匹配法<sup>[9-12]</sup>. 前者需要将波导结构细分为大量的计算网

络, 它虽然可以求解任意截面的光波导本征模式, 但是求解速度较慢. 后者从本征模式的完备性和光波场连续性出发, 可以直接得到整个 3D 波导的本征模式, 不需要对横截面进行大量的分割, 从而有运算速度快、精度高的优点. 本文采用全矢量的模式匹配法求解了 3D 弯曲波导的本征模式, 取得与文献[7]完全相符的结果. 通过计算发现小半径弯曲波导中存在明显的模式混合现象, 并深入地分析了混合模的出现对模式折射率的影响, 合理地解释了偏振相关性随弯曲半径的减小而减小的现象.

## 2. 基本理论与计算方法

图 1 所示是一个典型的弯曲波导横截面. 弯曲波导具有旋转对称性, 故用柱坐标系对其进行分析. 实际中的弯曲波导的折射率大多呈阶跃型分布, 其横截面可以分解为多个折射率均匀分布的矩形. 沿径向将该横截面分解为若干小段, 从左到右依次记为第 1 段、第 2 段、...、第  $S$  段. 每一段都是一个多层介质光波导. 定义波导的弯曲半径  $R$  为从圆心到弯曲波导外径的距离<sup>[13]</sup>.

模式匹配法的基本过程如下: 将整个 3D 波导

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号: 60577007)、湖北省杰出青年基金(批准号: 2006ABB017)和教育部新世纪优秀人才支持计划(批准号: NCET-04-0715)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: caixinlun@163.com

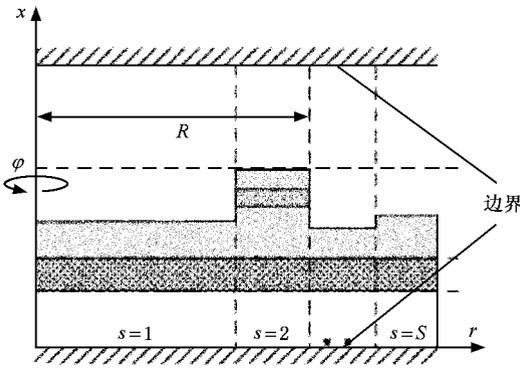


图1 弯曲波导的横截面示意图

导影响可以忽略. 加入边界条件之后, 用传输矩阵法<sup>[17]</sup>即可确定各段的本征模式.

为求解各段振幅函数, 定义导纳矩阵函数<sup>s</sup> $U(\rho)$ <sup>[9]</sup>如下:

$$\frac{d^s \mathbf{P}}{d\rho} = {}^s \mathbf{U}(\rho) {}^s \mathbf{P}(\rho), \quad (1)$$

式中<sup>s</sup> $\mathbf{P}$ 是以各振幅函数为元素的列向量,

$${}^s \mathbf{P} = ({}^s p_1^{TE}, \dots, {}^s p_M^{TE}, {}^s p_1^{TM}, \dots, {}^s p_M^{TM})^T,$$

其中  $M$  是 TE/TM 模的阶数. 记第  $s$  段左、右端面的导纳矩阵分别为<sup>s</sup> $\mathbf{L}U$ 和<sup>s</sup> $\mathbf{R}U$ , 如图2所示.

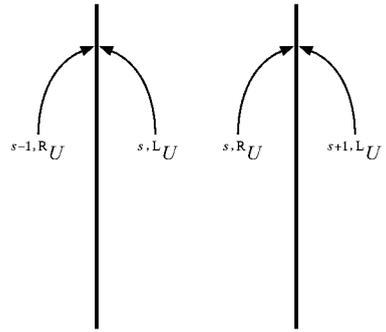


图2 第  $s$  段中的导纳矩阵

的本征模式在各段内表示成该段所对应的 2D 平板波导本征模式的线性叠加, 根据光波场连续性条件求解各个 2D 本征模式的振幅函数(线性叠加系数), 使波导场在各段的分界面处能够匹配, 最后得到 3D 波导的模场分布. 如此处理的前提是各段的 2D 本征模式构成一组完备的基函数. 因此在求解 2D 本征模式时, 除了导模外, 还必须考虑辐射模. 为了避免处理连续的辐射模, 采用“谱离散化”方法<sup>[14-16]</sup>, 即在远离光波导位置加入电壁或者磁壁边界条件, 边界条件的引入使得连续的辐射模谱被离散化, 同时由于离光波导足够远, 边界的存在对光波

由光波场连续性条件得到以下 4 个方程:

$${}^s \mathbf{R}U = {}^s \mathbf{G} - {}^s \mathbf{H} \cdot ({}^s \mathbf{L}U - {}^s \mathbf{F})^{-1} \cdot {}^s \mathbf{E}, \quad (2)$$

$${}^s \mathbf{L}U = {}^s \mathbf{H} \cdot ({}^s \mathbf{G} - {}^s \mathbf{R}U)^{-1} \cdot {}^s \mathbf{E} + {}^s \mathbf{F}, \quad (3)$$

$${}^{s+1} \mathbf{L}U = ({}^{s+1} \mathbf{O})^T \cdot ({}^s \mathbf{U} \cdot ({}^s \mathbf{N}_x^2)^{-1} \cdot {}^{s+1} \mathbf{O} \cdot {}^{s+1} \mathbf{N}_x^2 + {}^{s+1} \mathbf{X}), \quad (4)$$

$${}^s \mathbf{R}U = (({}^{s+1} \mathbf{O})^T \cdot {}^{s+1} \mathbf{L}U - {}^{s+1} \mathbf{X}) \cdot ({}^{s+1} \mathbf{N}_x^2)^{-1} \cdot {}^{s+1} \mathbf{O} \cdot {}^s \mathbf{N}_x^2. \quad (5)$$

(2)式给出了在第  $s$  段内部如何从左边界的<sup>s</sup> $\mathbf{L}U$ 推出右边界的<sup>s</sup> $\mathbf{R}U$ . (3)式则表示如何从<sup>s</sup> $\mathbf{R}U$ 计算<sup>s</sup> $\mathbf{L}U$ .  ${}^s \mathbf{G}, {}^s \mathbf{H}, {}^s \mathbf{F}$ 和 ${}^s \mathbf{E}$ 是各种贝塞尔函数的组合<sup>[9]</sup>.

(4)(5)式是光波场连续性条件, 它们给出了如

何从  $s$  段边界处的  $U$  矩阵计算相邻边界的  $U$  矩阵.  ${}^{s, s+1} \mathbf{O}$  描述了同一偏振方向的本征模式在边界的耦合, 而 ${}^{s, s+1} \mathbf{X}$ 描述了不同偏振方向的本征模式在边界的耦合, 即TE-TM模耦合. 各种近似的光波导分

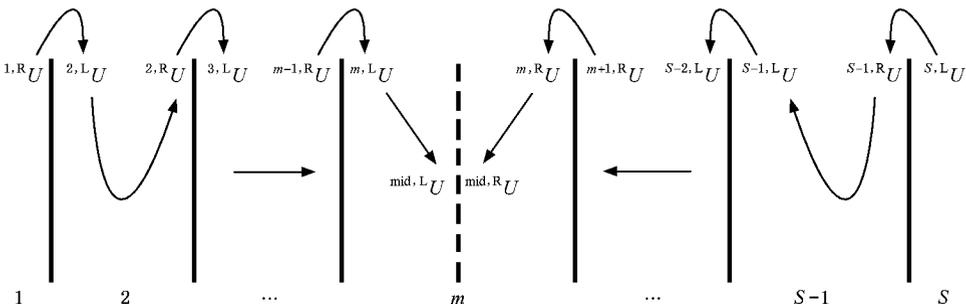


图3 计算过程示意图

析方法(如半矢量法)都忽视了 TE-TM 模耦合,若取  $s^{s+1}X = 0$ ,则全矢量模式匹配法就退化成半矢量法。

图 3 给出了求解角向传播常数  $\nu$  的过程。

选择一个合适的中央界面  $m$ ,使得该界面的光波场有较强的值,从  ${}^R U$  开始反复利用(2)(3)式,按自左向右的顺序可以推出该界面左侧的导纳矩阵  ${}^{mid L}U$ ,同理,从  ${}^S U$  开始反复利用(4)(5)式,按自右向左的顺序可得该界面右侧的导纳矩阵  ${}^{mid R}U$ 。根据该界面处模场失配为零的条件,得到  $\nu$  所满足的本征值方程

$$({}^{mid L}U - {}^{mid R}U) \cdot {}^m P = 0. \quad (6)$$

求解方程(6),即得角向传播常数  $\nu$ 、振幅函数  ${}^s P$  以及 3D 波导的本征模式。

### 3. 计算结果及讨论

参照文献[7]中的波导结构,我们用全矢量模式匹配法计算了该波导的模式折射率以及弯曲损耗,并与文献[7]中的全矢量有限差分法的计算结果进行了比较(图4)。两种算法的结果符合得非常好。下面用模式匹配法来研究两种常见的弯曲波导。

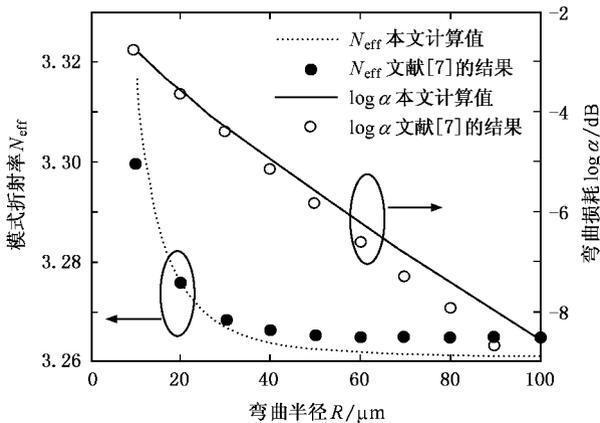


图 4 模式匹配法的计算结果与文献[7]所得结果的比较

#### 3.1. 脊型弯曲波导

考虑截面如图 5 所示的脊型波导,本文计算的结构参量如表 1 所列。我们计算了半径从 30 到 200  $\mu\text{m}$  的范围内,基 TE 模和基 TM 模的模式折射率(mode index)  $N_{\text{eff}}$  与弯曲损耗(bending loss)  $\alpha$  随弯曲半径的变化关系。模式折射率和弯曲损耗分别由角向传播常数  $\nu$  的实部和虚部给出:  $\nu(k_0 R) = N_{\text{eff}} +$

$i\alpha$  如图 6 所示。图 7 是半径为 200  $\mu\text{m}$  的脊型弯曲波导的基 TE 模和基 TM 模的电场矢量的横向分量分布图。从图 6、图 7 可以发现,脊型弯曲波导的辐射损耗相当大,这是因为脊内的光场会通过两翼泄漏。因此脊型弯曲波导不适合制作开关和滤波器件,但是可以用于光学传感器件。

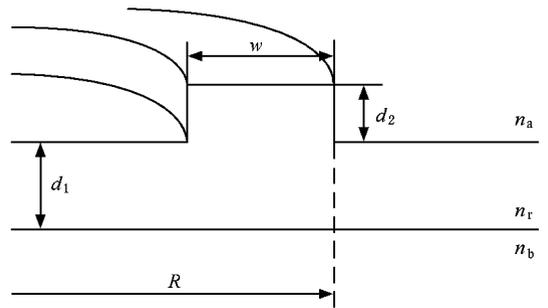


图 5 脊型弯曲波导的结构示意图

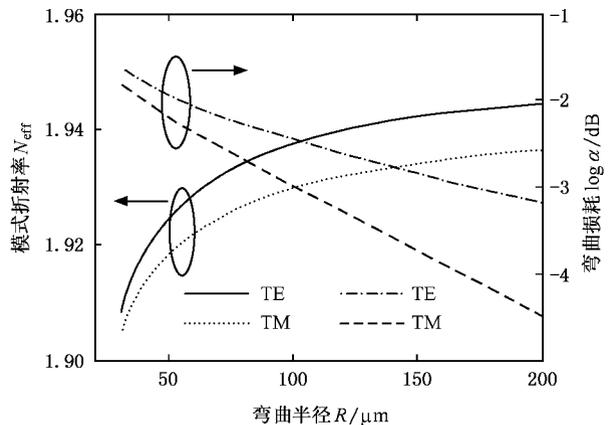


图 6 脊型弯曲波导的模式折射率、辐射损耗与弯曲半径之间的关系

表 1 脊型弯曲波导结构参量的取值

参 量	取 值
芯层 $\text{SiN}_3$ 折射率 $n_r$	2.0
衬底 $\text{SiO}_2$ 折射率 $n_b$	1.45
包层折射率 $n_a$	1.0
芯层宽度 $w/\mu\text{m}$	2.0
脊内芯层厚度 $d_2/\mu\text{m}$	1.0
脊外芯层厚度 $d_1/\mu\text{m}$	0.5
工作波长 $\lambda/\mu\text{m}$	1.3

值得注意的是,图 6 和图 4 的模式折射率随半径的变化趋势是不一致的,这是由于本文对波导的弯曲半径的定义不同于文献[7],但这并不对结果产生本质的影响。实际上,一个确定的弯曲波导对应唯一的角向传播常数  $\nu$ ,而模式折射率的取值则会因为弯曲半径的定义方式的差异而不同。

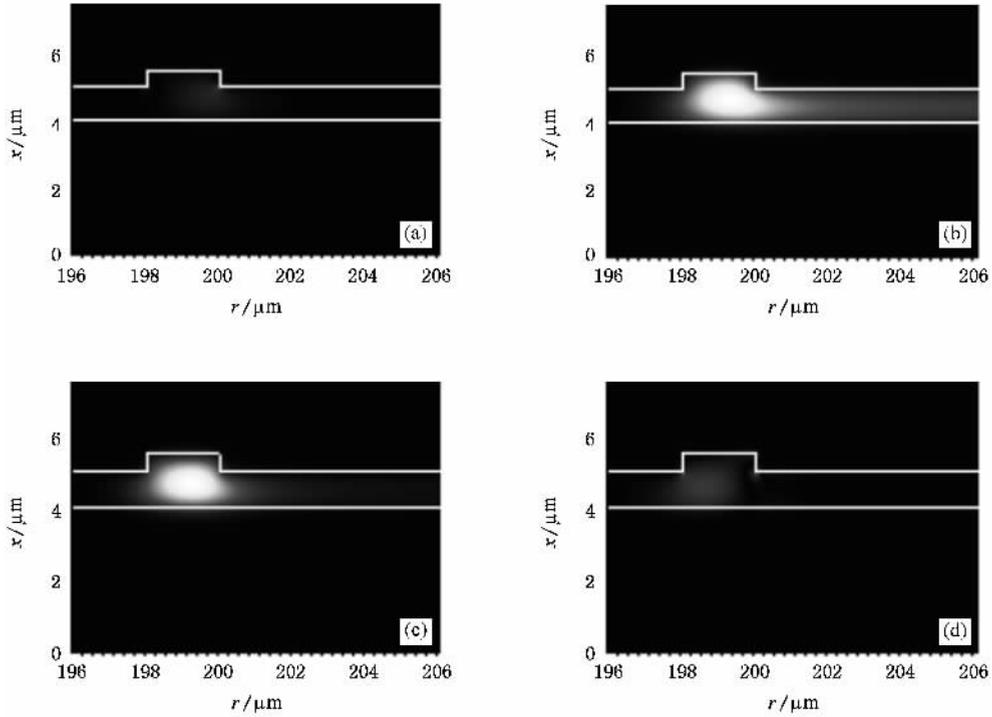


图 7 半径为  $200 \mu\text{m}$  的脊型弯曲波导中的基 TE 模、基 TM 模的横向电场强度分布 (a) TE 模的垂直分量 (b) TE 模的径向分量 (c) TM 模的垂直分量 (d) TM 模的径向分量

### 3.2. 条形弯曲波导

图 8 是一个典型的条形弯曲波导, 芯层采用了聚甲基丙烯酸甲酯 (PMMA). 计算结果如图 9—图 11 所示. 图 9 给出了条形波导的模式折射率、弯曲损耗随弯曲半径的变化关系. 对比图 9 和图 6 可以发现, 虽然该条形波导的折射率差小于以上讨论的脊型波导, 但是条形波导的弯曲损耗要小得多, 因此条形弯曲波导的半径可以做得非常小. 这种结构更适用于各种开关和滤波器件.

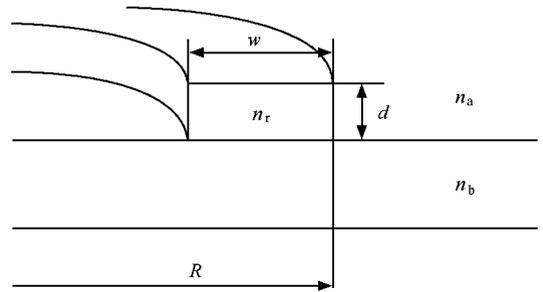


图 8 条形弯曲波导结构示意图

表 2 条形弯曲波导结构参数的取值

参 量	取值
芯层 PMMA 折射率 $n_r$	1.6
衬底 $\text{SiO}_2$ 折射率 $n_b$	1.45
包层折射率 $n_a$	1.0
芯层宽度 $w/\mu\text{m}$	2.0
芯层厚度 $d/\mu\text{m}$	1.0
工作波长 $\lambda/\mu\text{m}$	1.55

图 6 和图 9 有一个共同的特点: TE 模和 TM 模的模式折射率之间的差异随弯曲半径的减小而减小, 即波导的偏振相关性随半径的减小而减小. 由图 9 可以看出, 当条形波导的半径小到  $10 \mu\text{m}$  时, TE 模和 TM 模的模式折射率近似相等. 文献 [9] 中报道了

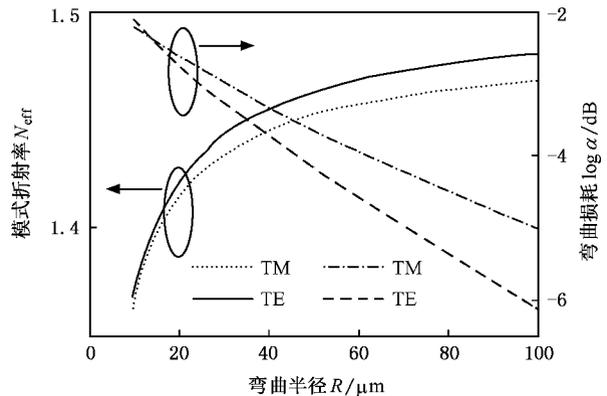


图 9 条形弯曲波导的模式折射率、弯曲损耗与弯曲半径之间的关系

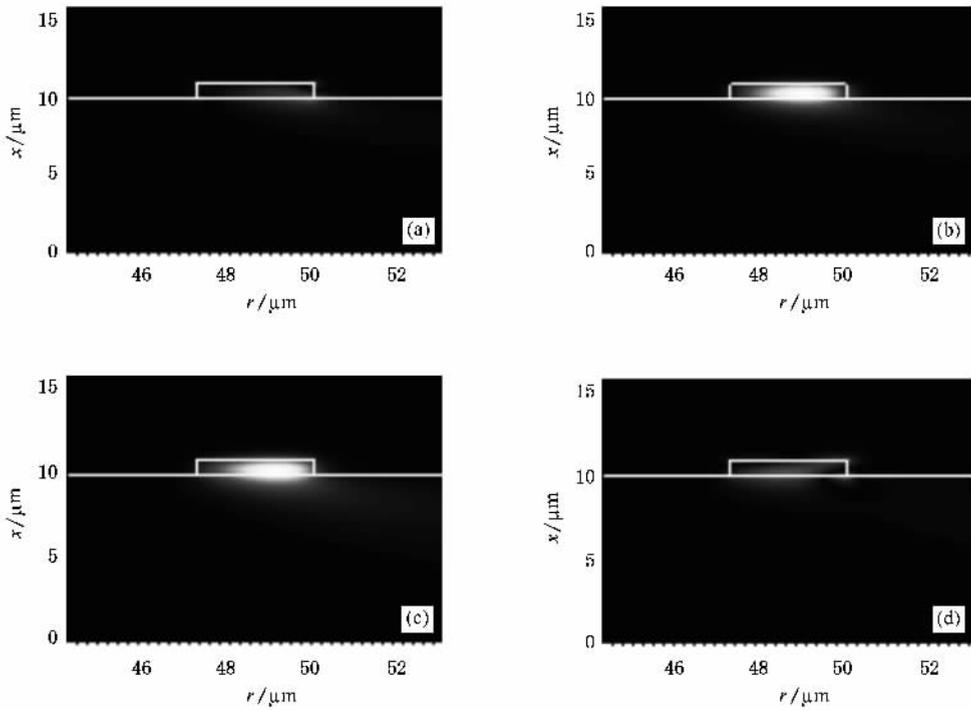


图 10 半径为  $50 \mu\text{m}$  的条形弯曲波导中的基 TE 模、基 TM 模的横向电场强度分布 (a) TE 模的垂直分量 (b) TE 模的径向分量 (c) TM 模的垂直分量 (d) TM 模的径向分量

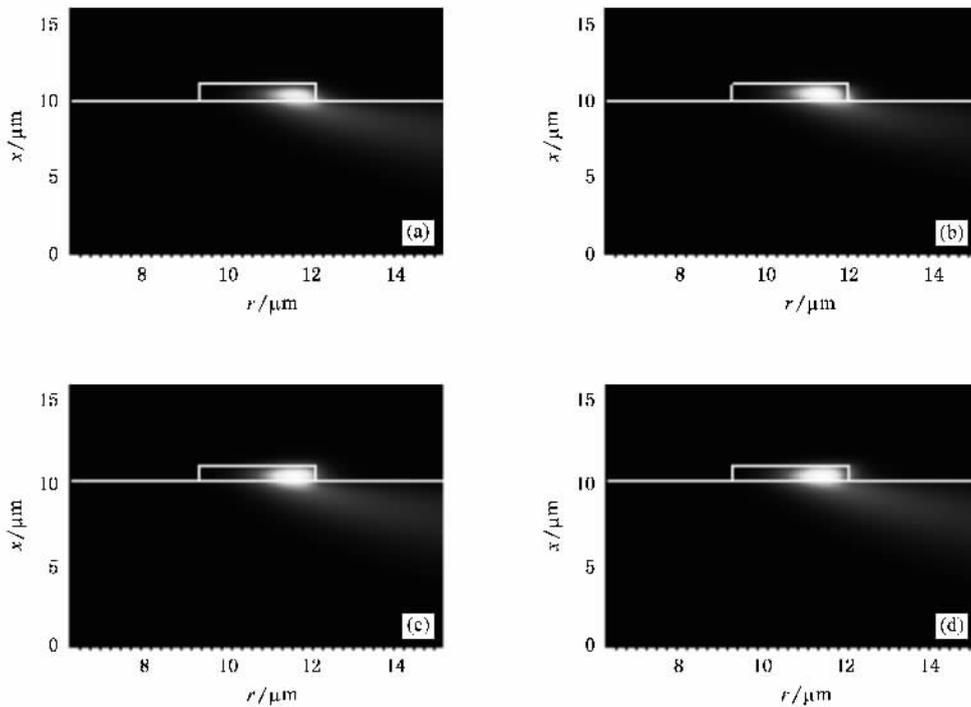


图 11 半径为  $12 \mu\text{m}$  的条形弯曲波导中的基 TE 模、基 TM 模的横向电场强度分布 (a) TE 模的垂直分量 (b) TE 模的径向分量 (c) TM 模的垂直分量 (d) TM 模的径向分量

类似的曲线,但是没有给出合理的解释.实际上,这种现象与下面要讨论的模式混合有着密切的联系.

图 10 和图 11 分别给出了弯曲半径为 50 和 12  $\mu\text{m}$  的条形弯曲波导中电场矢量的垂直分量和水平分量的分布图.对比图 10 和图 11 可以明显地看出,在小半径弯曲波导中出现了强烈的模式混合现象.由图 10 可知,在半径为 50  $\mu\text{m}$  的条形波导中,TE(TM)模的  $E_r$ ( $E_x$ )分量远远大于  $E_x$ ( $E_r$ )分量, $E_r$ ( $E_x$ )可以忽略不计. TE(TM)模可以看成是沿水平(垂直)方向偏振的线偏振波,这与直波导中的情况基本符合.但是,从图 11 可以看到,在半径为 12  $\mu\text{m}$  的条形波导中,TE(TM)模的  $E_x$ ( $E_r$ )分量的强度达到了可以和  $E_r$ ( $E_x$ )分量相比拟的程度.此时波导中的模式不再是传统意义上的 TE/TM 模,而是混合模.这就是模式混合现象<sup>[6]</sup>.

为了方便定量比较,定义 TE 模和 TM 模的振幅比  $\Gamma_{\text{TE}}$  和  $\Gamma_{\text{TM}}$  如下:

$$\Gamma_{\text{TE}} = \frac{\max(|E_r|)}{\max(|E_x|)},$$

$$\Gamma_{\text{TM}} = \frac{\max(|E_x|)}{\max(|E_r|)}.$$

表 3 给出了两种弯曲半径的条形弯曲波导和直波导中 TE 模和 TM 模的振幅比.

表 3 不同弯曲半径的 TE 和 TM 模的振幅比

弯曲半径/ $\mu\text{m}$	$\infty$	50	12
$\Gamma_{\text{TE}}$	11.5052	5.1083	0.9588
$\Gamma_{\text{TM}}$	10.7993	6.1282	1.1216

从表 3 可知,对于直波导和大半径弯曲波导的本征模式,总是存在一个横向分量,其强度远大于另外一个横向分量,根据占优势的横向分量的偏振方向,可以把模式分为 TE 模和 TM 模.但是在小半径弯曲波导中,原先不占优势的横向分量可以达到与原先占优势的横向分量相差无几的程度,甚至可以更强.在半径为 12  $\mu\text{m}$  的条形波导中,TE 模的垂直分量就比水平分量强.

因此,小半径的弯曲波导中的本征模式是混合模,而不再是电矢量偏振方向近似水平(垂直)的 TE(TM)模了.混合模起源于发生在侧向分界面上的 TE-TM 模耦合<sup>[18]</sup>.当折射率差较小而且弯曲

半径较大时,光波导是弱导光波导(weakly guiding waveguide),TE-TM 耦合可以忽略,半矢量法就可以得到比较精确的结果.当折射率较大或者弯曲半径较小时,强烈的 TE-TM 耦合将导致波导中出现明显的混合模,在这种情况下,只有用严格的全矢量法才能准确地描述光波导中的模式.

模式混合现象导致一个直接的结果就是使弯曲半径对偏振相关性产生直接的影响.小半径弯曲波导中出现强烈的模式混合现象使得两个横向分量之间差异大大减小,这等效于减小 TE 模和 TM 模的差异(由图 11 可知,TE 模与 TM 模的模场分布极为相似).由此可以推测,这两种模式的模式折射率会随着半径的减小而逐渐接近甚至相等.图 6 和图 9 中的模式折射率与弯曲半径的变化关系曲线已经充分地验证了这一点.

需要说明的是,当模式混合现象非常严重时,TE/TM 模的名称已经失去了原本的物理意义,但是本文仍然用 TE/TM 来标识混合模,仅仅是因为该模式的模式传播常数在数学上与 TE(TM)模属于同一族解.

## 4. 结 论

全矢量模式匹配理论能够精确地计算 3D 弯曲波导的弯曲损耗、模式折射率和波导本征模式,为光子集成回路中的弯曲波导的设计提供了强有力的工具.本文利用这种方法求解了脊型波导和条形波导中的本征模式,重点分析了在小半径弯曲波导中出现的强烈的模式混合现象,这种现象将导致波导的本征模式不再是传统意义上的 TE/TM 模,而是混合模.随着半径的减小,混合模的横向分量之间的差异会减小,当两个横向分量达到近似相等的强度时,波导的偏振相关性将会大大减小.计算了脊型波导和条形波导的弯曲损耗和模式折射率随弯曲半径的变化关系.这两种波导的弯曲损耗决定了它们在不同器件中的用途,而它们的模式折射率随半径的变化趋势则反映了波导弯曲半径与偏振相关性之间的联系.

[1] Driessen A, Geuzebroek D, Hoekstra H et al 2003 *AIP Conf. Proc.* 709 1

[2] Little B, Chu S T, Haus H et al 1997 *J. Lightwave Technol.* 15 998

- [ 3 ] Peng S T , Oliner A 1981 *IEEE Trans. Microwave Theory Techn.* **29** 843
- [ 4 ] Peng S T , Oliner A 1981 *IEEE Trans. Microwave Theory Techn.* **29** 855
- [ 5 ] Xiao J B , Zhang M D , Sun X H 2006 *Chin. Phys.* **15** 1
- [ 6 ] Xia J S , Yu J Z 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 515 ( in Chinese ) [ 夏金松、余金中 2003 *物理学报* **52** 515 ]
- [ 7 ] Feng N N , Zhou G R , Xu C L *et al* 2002 *J. Lightwave Technol.* **20** 1976
- [ 8 ] Rivera M 1995 *J. Lightwave Technol.* **13** 233
- [ 9 ] Prkna L , Hubalek M , Ctyroky J 2005 *IEEE J. Select. Topics Quantum Electron.* **11** 217
- [ 10 ] Prkna L , Hubalek M , Ctyroky J 2004 *IEEE Photon. Technol. Lett.* **16** 2057
- [ 11 ] Aasmund S 1993 *Pure Appl. Opt.* **2** 211
- [ 12 ] Pascher W 2001 *Opt. Quantum Electron.* **33** 433
- [ 13 ] Hiremath K , Hammer M , Stoffer R *et al* 2005 *Opt. Quantum Electron.* **37** 37
- [ 14 ] Ogusu K , Kawakami S , Nishida S 1979 *Appl. Opt.* **18** 908
- [ 15 ] Mittra R , Hou Y L , Jamnejad V 1980 *IEEE Trans. Microwave Theory Techn.* **28** 36
- [ 16 ] Solbach K , Wolff I 1978 *IEEE Trans. Microwave Theory Techn.* **26** 266
- [ 17 ] Chilwell J , Hodgkinson I 1984 *J. Opt. Soc. Am. A* **1** 742
- [ 18 ] Aasmund S 1994 *Pure Appl. Opt.* **3** 381

## Application of full vectorial mode matching method to the calculation of eigenmodes of three-dimensional bent waveguide<sup>\*</sup>

Cai Xin-Lun<sup>†</sup> Huang De-Xiu Zhang Xin-Liang

( *Institute of Optoelectronics Science and Technology , Huazhong University of Science and Technology , Wuhan 430074 , China* )

( Received 13 July 2006 ; revised manuscript received 16 November 2006 )

### Abstract

The eigenmodes of bent rib and bent strip waveguides are calculated by accurate and rigorous full vectorial mode matching method. Mode index and bending loss are presented as functions of bending radius. The computation result shows an excellent agreement with that obtained by finite difference method. Comparison of the strip waveguides with radius of 12 and 50  $\mu\text{m}$  indicates that the phenomena of TE-TM coupling occurring on the side wall will become very strong when the bending radius is decreased , and this is the reason why the modes in the bend waveguide with small radius are hybrid mode instead of TE mode or TM mode in the traditional sense. The difference between transverse components of hybrid mode will be abated if the bending loss decreased , and when the two components are comparable , the polarization dependence of bent waveguide will decrease greatly.

**Keywords** : waveguide optics , full vectorial mode matching method , micro-ring resonator , optical waveguide theory

**PACC** : 4280L , 0340K , 8760F

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 60577007 ) , the Outstanding Youth Foundation of Hubei Province , China ( Grant No. 2006ABB017 ) and the Program for the New Century Excellent Talents in University of Ministry of Education , China ( Grant No. NCET-04-0715 ).

<sup>†</sup> E-mail : caixinlun@163.com