第 56 卷 第 4 期 2007 年 4 月
1000-3290/2007/56(04)/2305-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.56, No.4, April, 2007

圆截面弹性螺旋杆的稳定性与振动*

刘延柱† 盛立伟

(上海交通大学工程力学系,上海 200030)

(2005 年 10 月 28 日收到;2005 年 11 月 18 日收到修改稿)

基于 Kirchhoff 理论讨论圆截面弹性螺旋杆的动力学问题. 以杆中心线的 Frenet 坐标系为参考系,建立用欧拉角描述的弹性杆动力学方程. 讨论其在端部轴向力和扭矩作用下保持的无扭转螺旋线平衡状态. 在静力学和动力学领域内讨论其平衡稳定性问题. 还讨论了弹性杆平衡的 Lyapunov 稳定性和欧拉稳定性两种不同稳定性概念之间的区别和联系. 在一次近似意义下证明了螺旋杆在空间域内的欧拉稳定性条件是时域内 Lyapunov 稳定性的必要条件. 导出了解析形式螺旋杆三维弯曲振动的固有频率,为螺旋线倾角和受扰挠性线波数的函数.

关键词:弹性螺旋杆, Kirchhoff 动力学比拟, Lyapunov 稳定性, 欧拉稳定性

PACC:4340, 4630C, 4630L

1. 引 言

自 20 世纪 70 年代以来,由于弹性细杆作为 DNA 力学模型在分子生物学领域内研究工作的兴起,弹性杆力学问题的研究重新引起重视[1]. 弹性杆静力学的非线性理论建立在 Kirchhoff 理论基础上[2]. 按照 Kirchhoff 动力学比拟原则,将 Lyapunov 运动稳定性理论中的时间变量 t 置换为弧坐标 s 可用于分析弹性杆的稳定性. 在静力学范畴用 Lyapunov 方法对弹性杆平衡稳定性的研究已有明确结论[3—5]. 弹性杆的动力学问题,即将弹性杆作为具有弧坐标 s 和时间 t 双重自变量的离散系统的研究也已见诸文献. Klapper[6] 导出了杆截面的运动学关系式, 以及用拓扑学参数描述杆几何形态的运动学方程;Goriely 等[7] 在线性化动力学方程的基础上,用数值方法研究了螺旋线平衡的稳定性. Bishop 等[8] 讨论了弹性杆弯扭波的传播. 作者在双自变量离散系统的 Lyapunov 稳定性概念的基础上,分析了螺旋杆的动态稳定性和黏性介质中的平面振动问题[9—11]. 本文利用欧拉角描述的圆截面弹性杆动力学方程,讨论无扭转螺旋线平衡状态的静态和动态稳定性. 在一次近似意义下证明螺旋杆平衡恒满足静态 Lyapunov 稳定性条件,导出能使受扰挠性线满足端部约束条件的欧拉载荷. 证明了螺旋杆在空间域内的欧拉稳定性条件是时域内 Lyapunov 稳定性的必要条件,从而进一步认识弹性杆平衡的 Lyapunov 稳定性和欧拉稳定性两种不同稳定性概念之间的区别和联系. 导出了解析形式螺旋杆三维弯曲振动的固有频率,为螺旋线倾角和受扰挠性线波数的函数. 分析了截面转动的惯性效应对固有频率的影响.

2. 圆截面杆的动力学方程

设长度为 L 的圆截面弹性细杆满足 Kirchhoff 理论的规定条件:截面刚性且与中心线正交、均匀各向同性,线弹性、无分布力、无原始曲率和扭率. 以固定点 O 为原点,建立固定参考坐标系(O-$\xi\eta\zeta$),杆的两端固定,松弛状态下为沿 ζ 轴的直杆. 将(O-$\xi\eta\zeta$)平移至杆中心线上任意点 P,令(P-$\xi\eta\zeta$)绕 ζ 轴转过 ψ 角后的位置为(P-$x_1y_1z_1$),绕 x_1 轴转过 ϑ 角后的位置为(P-$x_2y_2z_2$),绕 z_2 轴转过 φ 角后的位置与截面坐标系(P-xyz)重合,z_2 和 z 轴沿杆中心线的切线. (P-$x_2y_2z_2$)为圆截面的主轴坐标系,但不参与截面绕切线轴的扭转. ψ, ϑ, φ 为确定截面姿态的欧拉角(见图 1). 以端点 P_0 为原点沿中心线建立弧坐标 s, 以确定 P 点的位置. 杆端的作用力简化为沿 ζ 轴的力 $\boldsymbol{F}_0$ 和力偶 $\boldsymbol{M}_0$. 设 $\boldsymbol{\omega}_F$ 和 $\boldsymbol{\Omega}_F$ 分别为(P-

* 国家自然科学基金(批准号:10472067)资助的课题.

† E-mail:liuyzhc@online.sh.cn

$x_2y_2z_2$)坐标系的无限小角位移对弧坐标或时间的变化率，P 点相对固定点 O 的矢径为 $\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{v}=\partial\boldsymbol{r}/\partial t$ 为 P 点的速度，$\boldsymbol{e}_3=\partial\boldsymbol{r}/\partial s$ 为中心线的切线基矢量，则有以下运动学关系：

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial s}=\frac{\partial\boldsymbol{e}_3}{\partial t}=\boldsymbol{\Omega}_F\times\boldsymbol{e}_3. \tag{1}$$

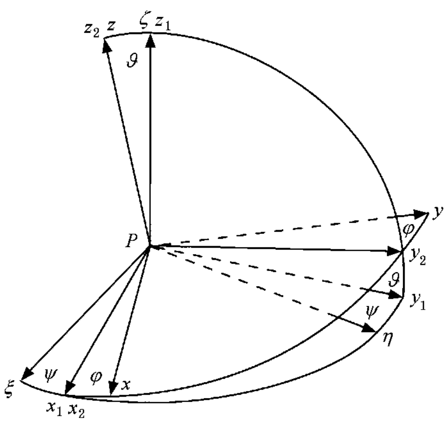

图 1 参考坐标系

设 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{\Omega}$ 为截面的弯扭度和角速度，即截面的无限小角位移对弧坐标或时间的变化率，利用动量定理和对截面中心的动量矩定理列出 P 点处微元体的动力学方程：

$$\frac{\tilde{\partial}\boldsymbol{F}}{\partial s}+\boldsymbol{\omega}_F\times\boldsymbol{F}-\rho S\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}=0, \tag{2}$$

$$\frac{\tilde{\partial}\boldsymbol{M}}{\partial s}+\boldsymbol{\omega}_F\times\boldsymbol{M}+\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{F}-\frac{\tilde{\partial}}{\partial t}(\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\Omega})-\boldsymbol{\Omega}_F\times(\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\Omega})=0, \tag{3}$$

式中波浪号表示相对(P-$x_2y_2z_2$)的局部导数，$\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{M}$ 为截面内力的主矢和主矩，ρ，S，$\boldsymbol{J}$ 分别为杆的密度、截面积和单位长度杆的惯量张量. 将方程(2)对 s 求偏导，(1)式对 t 求偏导后代入，化作

$$\frac{\tilde{\partial}^2\boldsymbol{F}}{\partial s^2}+\frac{\tilde{\partial}\boldsymbol{\omega}_F}{\partial s}\times\boldsymbol{F}+2\boldsymbol{\omega}_F\times\frac{\tilde{\partial}\boldsymbol{F}}{\partial s}+\boldsymbol{\omega}_F\times(\boldsymbol{\omega}_F\times\boldsymbol{F})-\rho S\left[\frac{\tilde{\partial}\boldsymbol{\Omega}_F}{\partial t}\times\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{\Omega}_F\times(\boldsymbol{\Omega}_F\times\boldsymbol{e}_3)\right]=0. \tag{4}$$

以下标 1，2，3 表示 $\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{M}$，$\boldsymbol{\omega}$，$\boldsymbol{\Omega}$，$\boldsymbol{\omega}_F$，$\boldsymbol{\Omega}_F$ 等矢量在(P-$x_2y_2z_2$)中的投影以及张量 $\boldsymbol{J}$ 的对角线元素，其中 $J_1=J_2=\rho I$，$J_3=\rho I_0$，I，$I_0=2I$ 为截面的惯性矩和极惯性矩. 主矩 M 与弯扭度之间满足下列线性本构关系：

$$\begin{aligned}M_1&=A\omega_1,\\ M_2&=A\omega_2,\\ M_3&=C\omega_3,\end{aligned} \tag{5}$$

式中 $A=EI$ 和 $C=GI_0$ 分别为杆的抗弯和抗扭刚度，E 和 G 分别为杆的杨氏模量和剪切模量. 将 ω_i，Ω_i，ω_{Fi}，Ω_{Fi}($i=1,2,3$)用欧拉角表示，以撇号和点号分别表示相对弧坐标 s 和时间 t 的偏导数，写出方程(3)，(4)相对(P-$x_2y_2z_2$)的投影式

$$A\vartheta''+(C-A)\psi'^2\cos\vartheta\sin\vartheta+C\psi'\varphi'\sin\vartheta-F_2-J_1(\ddot{\vartheta}+\dot{\psi}^2\cos\vartheta\sin\vartheta+2\dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\vartheta)=0, \tag{6a}$$

$$A\psi''\sin\vartheta+(2A-C)\psi'\vartheta'\cos\vartheta-C\vartheta'\varphi'+F_1-J(\ddot{\psi}\sin\vartheta-2\dot{\vartheta}\dot{\varphi})=0, \tag{6b}$$

$$C\frac{\partial}{\partial s}(\psi'\cos\vartheta+\varphi')-2J_1\frac{\partial}{\partial t}(\dot{\psi}\cos\vartheta+\dot{\varphi})=0, \tag{6c}$$

$$F_1''+2\psi'(F_3'\sin\vartheta-F_2'\cos\vartheta)-F_1\psi'^2-F_2(\psi''\cos\vartheta-2\psi'\vartheta'\sin\vartheta)+F_3(\psi''\sin\vartheta+2\psi'\vartheta'\cos\vartheta)-\rho S(\ddot{\psi}\sin\vartheta+2\dot{\psi}\dot{\vartheta}\cos\vartheta)=0, \tag{6d}$$

$$F_2''+2(F_1'\psi'\cos\vartheta-F_3'\vartheta')+F_1(\psi''\cos\vartheta)-F_2(\vartheta'^2+\psi'^2\cos^2\vartheta)-F_3(\vartheta''-\psi'^2\cos\vartheta\sin\vartheta)+\rho S(\ddot{\vartheta}-\dot{\psi}^2\cos\vartheta\sin\vartheta)=0, \tag{6e}$$

$$F_3''+2(F_2'\vartheta'-F_1'\psi'\sin\vartheta)-F_1\psi''\sin\vartheta+F_2(\vartheta''+\psi'^2\cos\vartheta\sin\vartheta)-F_3(\vartheta'^2+\psi'^2\sin^2\vartheta)+\rho S(\dot{\vartheta}^2+\dot{\psi}^2\sin^2\vartheta)=0. \tag{6f}$$

由 6 个偏微分方程组成的动力学方程组(6)确定 6 个未知变量 ψ，ϑ，φ，F_i($i=1,2,3$).

3. 螺旋线平衡及其扰动方程

动力学方程组(6)存在如下一组特解：

$$\begin{aligned}\vartheta&=\vartheta_0,\\ \psi&=\omega_0 s,\\ \varphi&=0,\\ F_1&=0,\\ F_2&=F_0\sin\vartheta_0,\\ F_3&=F_0\cos\vartheta_0,\end{aligned} \tag{7}$$

式中各常数 ω_0，ϑ，F_0 之间满足以下关系式：

$$F_0=-(A-C)\omega_0^2\cos\vartheta_0. \tag{8}$$

特解(7)对应于杆相对(P-$x_2y_2z_2$)无扭转变形的螺旋线平衡状态，以 $\alpha=\pi/2-\vartheta_0$ 为倾角，$R=\sin\vartheta_0/\omega_0$ 为半径. 一般情况下 $A>C$，F_0 为负值. 杆端作用的外力对 P 点的矩为

$$\begin{aligned} M_1 &= 0, \\ M_2 &= M_0\sin\vartheta_0 - F_0R\cos\vartheta_0, \\ M_3 &= M_0\cos\vartheta_0 + F_0R\sin\vartheta_0. \end{aligned} \tag{9}$$

各截面处杆的弯扭度为

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 0, \\ \omega_2 &= \omega_0\sin\vartheta_0, \\ \omega_3 &= \omega_0\cos\vartheta_0. \end{aligned} \tag{10}$$

令外力矩(9)式与内力矩(5)式相等，将(10)式代入后导出

$$M_0 = \omega_0\left[C + (A - C)\sin^2\vartheta_0\right]. \tag{11}$$

这表明松弛状态的直杆只有在轴向压力(8)式和扭矩(11)式共同作用下才能实现无扭转的螺旋线平衡.在螺旋线平衡状态，$(P\text{-}x_2y_2z_2)$为曲线的 Frenet 坐标系，x_2 轴和 y_2 轴分别为副法线轴和法线轴.

引入无量纲弧坐标 $\bar{s}$、时间坐标 $\bar{t}$ 及无量纲参数 ε，ν，

$$\begin{aligned} \bar{s} &= \omega_0 s, \\ \bar{t} &= \sqrt{\frac{C}{\rho S}}\omega_0^2 t, \\ \varepsilon &= \frac{I\omega_0^2}{S}, \\ \nu &= \frac{A}{C} - 1. \end{aligned} \tag{12}$$

对于各向同性的圆截面杆，参数 ν 等于杆的泊松比.引入无量纲扰动量 $x_i(i = 1,\cdots,6)$，均为 $\bar{s}$，$\bar{t}$ 的二元函数，

$$\begin{aligned} x_1 &= \vartheta - \vartheta_0, \\ x_2 &= \psi - \bar{s}, \\ x_3 &= \varphi, \\ x_4 &= \frac{F_1}{C\omega_0^2}, \\ x_5 &= \frac{F_2 - F_0\sin\vartheta}{C\omega_0^2}, \\ x_6 &= \frac{F_3 - F_0\cos\vartheta}{C\omega_0^2}. \end{aligned} \tag{13}$$

代入方程组(6)，略去扰动量的二次以上微量，以撇号和点号表示对 $\bar{s}$ 和 $\bar{t}$ 的偏导数，导出螺旋杆平衡的一次近似动态扰动方程

$$\begin{aligned} &(1 + \nu)x_1'' + \nu\sin^2\vartheta_0 x_1 - \varepsilon\ddot{x}_1 - \nu\sin2\vartheta_0 x_2' \\ &+ \sin\vartheta_0 x_3' - x_5 = 0, \end{aligned} \tag{14a}$$

$$\begin{aligned} &(1 + 2\nu)\cos\vartheta_0 x_1' + \left[(1 + \nu)x_2'' - \varepsilon\ddot{x}_2\right]\sin\vartheta_0 \\ &+ x_4 = 0, \end{aligned} \tag{14b}$$

$$\begin{aligned} &-\sin\vartheta_0 x_1' + (x_2'' - 2\varepsilon\ddot{x}_2)\cos\vartheta_0 + x_3'' \\ &- 2\varepsilon\ddot{x}_3 = 0, \end{aligned} \tag{14c}$$

$$\begin{aligned} &-\ddot{x}_2\sin\vartheta_0 + x_4'' - x_4 \\ &- 2x_5'\cos\vartheta_0 + 2x_6'\sin\vartheta_0 = 0, \end{aligned} \tag{14d}$$

$$\begin{aligned} &\ddot{x}_1 + 2x_4'\cos\vartheta_0 + x_5'' - x_5\cos^2\vartheta_0 \\ &+ x_6\cos\vartheta_0\sin\vartheta_0 = 0, \end{aligned} \tag{14e}$$

$$\begin{aligned} &-2x_4'\sin\vartheta_0 + x_5\cos\vartheta_0\sin\vartheta_0 + x_6'' \\ &- x_6\sin^2\vartheta_0 = 0. \end{aligned} \tag{14f}$$

将指数形式特解

$$x_i(\bar{s},\bar{t}) = x_{i0}\exp(\lambda\bar{s} + w\bar{t}) \quad (i = 1,\cdots,6) \tag{15}$$

代入扰动方程组(14).由于 $\omega_0 = \sin\vartheta_0/R$，且 $I \sim r^4$，$S \sim r^2$，其中 r 为截面的半径，对于极端细长的弹性杆，体现截面转动惯性效应的参数 $\varepsilon \sim (r/R)^2$ 为无限小量.近似地将 ε 略去计算特征方程，设 $\vartheta_0 \neq 0$，消去公因子 $\sin\vartheta_0$ 后导出

$$a(\lambda)w^4 + b(\lambda)w^2 + c(\lambda) = 0, \tag{16}$$

式中

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= \sin^2\vartheta_0 - \lambda^2, \\ b(\lambda) &= 2\lambda^4\left[2(2 + 3\nu)\cos^2\vartheta_0 - (1 + \nu)(\lambda^2 + 1)\right], \\ c(\lambda) &= \lambda^4(\lambda^2 + 1)^2\left[\nu(2 + 3\nu)\cos^2\vartheta_0 + (1 + \nu)^2(\lambda^2 + 1)\right]. \end{aligned} \tag{17}$$

特征方程(16)中包含空间域和时间域内两个待定的特征值 λ 和 w.

4. 螺旋杆的静态 Lyapunov 稳定性与欧拉稳定性

在静力学范畴内讨论杆的螺旋线平衡稳定性时，各变量均为弧坐标 s 的一元函数.令特解(15)式中 $w = 0$，则静力学分析对应的特征方程仅含空间域特征值 λ，简化为 $c(\lambda) = 0$，即

$$\lambda^4(\lambda^2 + 1)^2\left[\nu(2 + 3\nu)\cos^2\vartheta_0 + (1 + \nu)^2(\lambda^2 + 1)\right] = 0. \tag{18}$$

特征值 λ 除零根外为纯虚根，$\lambda = \pm \mathrm{i}k$，其中 k 为无量纲化的受扰挠性线沿弧坐标周期变化的角频率，$k = 1$ 或

$$k = \left[1 + \frac{\nu(2 + 3\nu)}{(1 + \nu)^2}\cos^2\vartheta_0\right]^{1/2}. \tag{19}$$

证明在一次近似意义下螺旋杆平衡恒满足静态 Lyapunov 稳定性条件.

Lyapunov 稳定性是微分方程的解相对初始扰动的稳定性.将 Lyapunov 稳定性概念应用于弹性杆时,必须附加条件使扰动解满足两端约束条件.设两端约束状态相同,受扰挠性线在杆的两端应有相同的几何形态,满足 $x_i(L)=x_i(0)\ (i=1,2,3)$.(19)式中的参数 k 为杆的受扰挠性线相对弧坐标变化的无量纲角频率,应满足

$$k=\frac{2n\pi}{\omega_0 L}\qquad (n=1,2,\cdots),\tag{20}$$

式中 n 为任意正整数.匝数为 N 的螺旋杆长度为 $L=2\pi N/\omega_0$,条件(20)式要求 k 等于每个螺距内受扰挠性线的波数,即

$$k=\frac{n}{N}\qquad (n=1,2,\cdots).\tag{21}$$

与(19)式对照,受扰挠性线在每个螺距内的波数大于或等于 1.从判断弹性杆屈曲的欧拉稳定性概念出发,扰动方程存在满足端部约束条件的非稳态解即认为平衡状态失稳[5,9].将(20)式与(8),(11)式联立后消去 ω_0,导出能使受扰状态满足端部约束条件的轴向力和扭矩的特殊值

$$\begin{aligned}F_0&=-\left(\frac{2n\pi}{kL}\right)^2 A\nu(1+\nu)\cos\vartheta_0,\\ M_0&=\left(\frac{2n\pi}{kL}\right)C(1+\nu\sin^2\vartheta_0).\end{aligned}\tag{22}$$

将(22)式中的参数 k 以(19)式代入,导出无扭转螺旋杆的欧拉临界载荷

$$\begin{aligned}|F_0|_{\rm cr}&=\left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2\frac{EI\nu(1+\nu)^3}{(1+\nu)^2+\nu(2+3\nu)\cos^2\vartheta_0},\\ |M_0|_{\rm cr}&=\left(\frac{2n\pi}{L}\right)\frac{GI_0(1+\nu)(1+\nu\sin^2\vartheta_0)}{[(1+\nu)^2+\nu(2+3\nu)\cos^2\vartheta_0]^{1/2}}.\end{aligned}\tag{23}$$

5. 螺旋杆的动态稳定性与固有频率

由于静态稳定性已得到证明,且端部几何约束条件同样适用于动态情形,因此特征方程(16)中的弧坐标特征值 $\lambda=\pm \mathrm{i}k$ 的参数 $k=n/N$ 为已知,等于每个螺距内受扰挠性线的波数.特征方程(16)的系数仅含时域特征值 w 为未知变量,

$$\begin{aligned}a(\vartheta_0)&=k^2+\sin^2\vartheta_0,\\ b(\vartheta_0)&=2k^4[(1+\nu)(k^2-1)\\&\quad+2(2+3\nu)\cos^2\vartheta_0],\\ c(\vartheta_0)&=k^4(k^2-1)^2[(1+\nu)^2(k^2-1)\\&\quad-\nu(2+3\nu)\cos^2\vartheta_0].\end{aligned}\tag{24}$$

判断时域特征值 w 的纯虚根条件为

$$\begin{aligned}&a>0,\quad b>0,\ c>0,\\ &b^2-4ac>0,\end{aligned}\tag{25}$$

其中 $a>0$ 自然满足,$b>0$ 和 $c>0$ 的充分条件为

$$k>\left[1+\frac{\nu(2+3\nu)}{(1+\nu)^2}\cos^2\vartheta_0\right]^{1/2},\tag{26}$$

且可证明

$$\begin{aligned}b^2-4ac&=4k^4\{k^4[(1+\nu)(k^2-1)\\&\quad+2(2+3\nu)\cos^2\vartheta_0]^2-(k^2\\&\quad+\sin^2\vartheta_0)(k^2-1)^2[(1+\nu)^2(k^2-1)\\&\quad-\nu(2+3\nu)\cos^2\vartheta_0]\}\\&>4k^4(1+\nu)^2(k^2-1)^2\\&\quad\times[k^4-(k^2+1)(k^2-1)]\\&=4k^4(1+\nu)^2(k^2-1)^2>0,\end{aligned}\tag{27}$$

则(26)式为时域内螺旋杆的一次近似 Lyapunov 稳定性充分条件.此稳定性条件要求 $k>1$,即受扰挠性线在每个螺距内的波数超过 1.将(20)式代入不等式(26),与(8),(11)式联立后消去 ω_0,与(23)式对照,导出的动态稳定性条件为

$$\begin{aligned}|F_0|&<|F_0|_{\rm cr},\\ |M_0|&<|M_0|_{\rm cr}.\end{aligned}\tag{28}$$

这表明空间域内的静态欧拉稳定性条件是时域内一次近似动态 Lyapunov 稳定性的充分条件.根据一次近似稳定性理论,此条件为原非线性动力学方程特解稳定性的必要条件.从而将适用于直杆动态稳定性的分析结论扩大到螺旋杆[11].

上述稳定性条件满足时,令 $w=\pm \mathrm{i}\bar{\mu}$,可利用特征方程(16) 计算轴向受压螺旋杆弯扭振动的固有频率 $\mu=\bar{\mu}(\omega_0^2\sqrt{C/\rho S})$,导出

$$\mu=\left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2\sqrt{\frac{EI}{\rho S}}\Phi(k,\vartheta_0).\tag{29}$$

函数 $\Phi(k,\vartheta_0)$ 定义为

$$\Phi(k,\vartheta_0)=\sqrt{\frac{k^2-1+2\beta\cos^2\vartheta_0}{k^2+\sin^2\vartheta_0}}\left\{1\mp\sqrt{1-\frac{(k^2+\sin^2\vartheta_0)(k^2-1)^2[(1+\nu)(k^2-1)-\beta\nu\cos^2\vartheta_0]}{k^4(k^2-1-\beta\nu\cos^2\vartheta_0)^2}}\right\}^{1/2},\tag{30}$$

式中 $\beta = (2 + 3\nu)/(1 + \nu)$. 圆环杆作为螺旋杆的特例，令 $\vartheta_0 = \pi/2, N = 1, k = n$，(30)式括号中取负号，得到的结果与已知的圆环杆弯曲振动频率一致[12]，

$$\mu = \frac{n(n^2 - 1)}{R^2\sqrt{n^2 + 1}}\sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \qquad (n = 1, 2, \cdots). \tag{31}$$

一般情况下，设 $\nu = 0.3$，不同波数 $k = n/N$ 对应的无量纲固有频率 μ 随螺旋角 $\alpha = \pi/2 - \vartheta_0$ 的变化曲线如图 2 所示，每个波数对应于高频和低频两个分支.

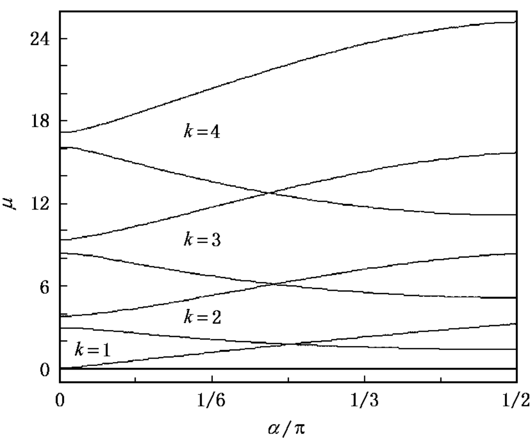

图 2　不同螺旋角对应的螺旋杆弯曲振动固有频率

6. 截面转动的惯性效应对固有频率的影响

为分析截面转动的惯性效应对固有频率的影响，将固有频率 μ 展成参数 ε 的幂级数

$$\mu = \mu_0 + \varepsilon\mu_1 + \varepsilon^2\mu_2 + \cdots \tag{32}$$

将(32)式代入特解(15)式中的 $w = \pm i\mu$，计算其特征方程. μ 的零次近似值 μ_0 与基于 $\varepsilon = 0$ 导出的(29)式相同. 利用一次近似值 μ_1 进行修正，得到的固有频率 μ 随螺旋角 α 和参数 ε 变化的曲线族在图 3 和图 4 中给出. 从图 3、图 4 可看出，在相同波数情况下高频受参数 ε 的影响明显大于低频，且随着螺旋角 α 的增大，低频影响逐渐减小，高频影响逐渐增大. 对于确定的参数 ε，波数 k 越小，螺旋杆弯曲振动固有频率受截面转动惯性效应的影响越不显著，影响仅发生于较大波数情形，且对高频的影响大于对低频的影响.

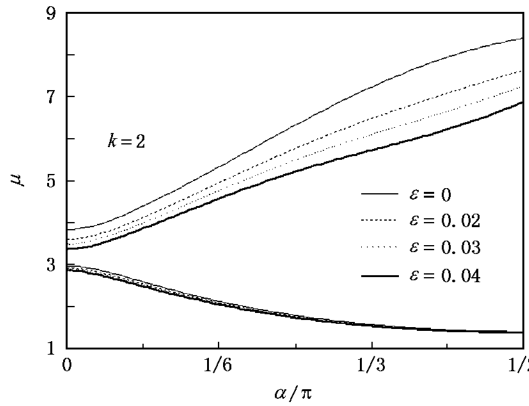

图 3　参数 ε 对波数为 2 的弯曲振动固有频率的影响

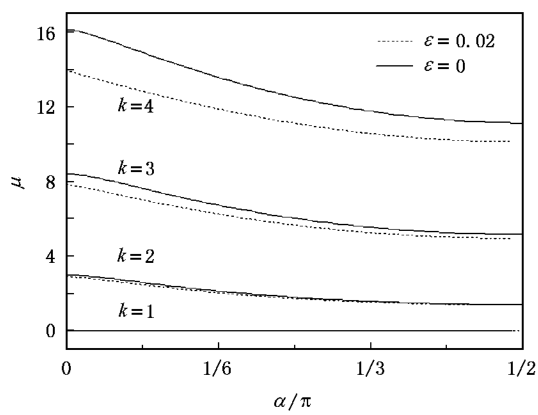

图 4　参数 ε 对不同波数的弯曲振动固有频率的影响

7. 结　　论

建立欧拉角描述的圆截面弹性杆动力学方程，讨论了无扭转螺旋线平衡状态的稳定性. 在一次近似意义下证明螺旋杆平衡恒满足静态 Lyapunov 稳定性条件，导出能使受扰挠性线满足端部约束条件的欧拉载荷. 证明螺旋杆在空间域内的欧拉稳定性条件是时域内 Lyapunov 稳定性的必要条件. 一般情况下，受扰挠性线在每个螺距内的波数必须超过 1 方可保证螺旋杆在时域内的稳定性. 从而进一步了解 Lyapunov 和欧拉两种不同稳定性概念之间的区别和联系. 满足动态稳定性条件时，受扰后的弹性杆在螺旋线状态附近以静态受扰挠性线为模态作弯曲振动. 导出了解析形式圆截面螺旋杆三维弯曲振动的固有频率，为螺旋线倾角和受扰挠性线波数的函数. 分析了截面转动的惯性效应对固有频率的影响.

[1] Bouchiat C, Mezard M M 2000 *Euro. Phys. J.* E **2** 377
[2] Love A E H 1944 *A Treatise on Mathematical Theory of Elasticity* (New York: Dover)
[3] van der Heijden G H M, Thomson J M T 2000 *Nonlin. Dyn.* **21** 71
[4] Liu Y Z, Zu J W 2004 *Acta Mech.* **167** 29
[5] Liu Y Z 2005 *Acta Mech. Sol. Sin.* **26** 256 (in Chinese) [刘延柱 2005 固体力学学报 **26** 256]
[6] Klapper I 1996 *J. Comput. Phys.* **125** 325
[7] Goriely A, Shipmam P 2000 *Phys. Rev.* E **61** 4508
[8] Bishop T C, Cortez R, Zhmudsky O O 2004 *J. Comput. Phys.* **193** 642
[9] Liu Y Z, Xue Y, Chen L Q 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2424 (in Chinese) [刘延柱、薛 纭、陈立群 2004 物理学报 **53** 2424]
[10] Liu Y Z, Xue Y 2005 *Chin. Quart. Mech.* **26** 1 (in Chinese) [刘延柱、薛 纭 2005 力学季刊 **26** 1]
[11] Liu Y Z 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4989 (in Chinese) [刘延柱 2005 物理学报 **54** 4989]
[12] Timoshenko S 1937 *Vibration Problems in Engineering* (2nd ed) (New York: Van Nostrand) p410

Stability and vibration of an elastic helical rod with circular cross section*

Liu Yan-Zhu† Sheng Li-Wei
(*Department of Engineering Mechanics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai* 200030, *China*)

(Received 28 October 2005; revised manuscript received 18 November 2005)

Abstract

The dynamical behavior of an elastic helical rod with circular cross section are discussed on the basis of Kirchhoff's theory. The dynamical equations of the rod described by the Euler's angles are established in the Frenet coordinates of the centerline. The helical state without twisting of the rod under the action of axial force and torque is discussed. The stability of the helical equilibrium is analyzed in the fields of statics and dynamics respectively. The difference and relationship between Lyapunov's and Euler's stability concepts of the rod equilibrium are discussed. We proved in the sense of first approximation that the Euler's stability conditions of the helical rod in the space domain are the necessary conditions of Lyapunov's stability in the time domain. The free frequency of three-dimensional flexural vibration of the helical rod is derived in analytical form as a function of the pitch angle of the helix and the wave number of the perturbed elastica.

Keywords: elastic helical rod, Kirchhoff's kinetic analogy, Lyapunov's stability, Euler's stability
PACC: 4340, 4630C, 4630L

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10472067).
† E-mail: liuyzhc@online.sh.cn