

Birkhoff 系统的时间积分定理*

葛伟宽¹⁾ 梅凤翔²⁾

1) 湖州师范学院物理系, 湖州 313000)

2) 北京理工大学力学系, 北京 100081)

(2006 年 9 月 2 日收到, 2006 年 9 月 13 日收到修改稿)

研究 Birkhoff 系统的时间积分定理. 建立 Birkhoff 系统的时间积分等式, 由此等式导出系统的类功率方程, Pfaff-Birkhoff 积分变分原理以及 Pfaff-Birkhoff-d' Alembert 微分变分原理.

关键词: Birkhoff 系统, 时间积分等式, 类功率方程, 变分原理

PACC: 0320

1. 引言

时间积分定理是分析力学中的一个重要问题. 这些定理不仅提供有效的理论工具, 而且作为直接方法在构造近似解析解时十分方便^[1]. 文献 [2] 用大量篇幅论述了时间积分定理和积分变分原理, 包括完整系统和非完整系统的时间积分定理及其应用. 文献 [3] 研究了可变质量非完整系统的时间积分定理. Birkhoff 系统是一类约束力学系统, 它是 Hamilton 系统经历非正则变换得到的, 是 Hamilton 系统的一个自然推广. 对 Birkhoff 系统动力学研究已取得重要进展^[4-12]. 本文研究 Birkhoff 系统的时间积分定理. 首先, 建立 Birkhoff 系统的时间积分等式; 其次, 由这个时间积分等式导出系统的类功率方程, Pfaff-Birkhoff 原理以及 Pfaff-Birkhoff-d' Alembert 原理.

2. Birkhoff 系统的时间积分等式

Birkhoff 方程有形式^[5, 13]

$$\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right) \dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial t} = 0, \quad (\mu, \nu = 1, \dots, 2n), \quad (1)$$

其中 $B = B(t, \mathbf{a})$ 称为 Birkhoff 函数, $R_\mu = R_\mu(t, \mathbf{a})$ 称为 Birkhoff 函数组. 将方程 (1) 两端乘以任意函数 $Z_\mu = Z_\mu(t)$ 并对 μ 求和, 得

$$\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right) \dot{a}^\nu Z_\mu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} Z_\mu - \frac{\partial R_\mu}{\partial t} Z_\mu = 0. \quad (2)$$

将 (2) 式在任意两个瞬时 t_1 和 t_2 之间积分, 得

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right) \dot{a}^\nu Z_\mu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} Z_\mu - \frac{\partial R_\mu}{\partial t} Z_\mu \right\} dt = 0, \quad (3)$$

称 (3) 式为 Birkhoff 系统的时间积分等式.

对时间积分等式 (3) 中任意函数 Z_μ 的特殊选取, 可得到 Birkhoff 系统动力学的一些重要结果.

3. 导出类功率方程

取

$$Z_\mu = \dot{a}^\mu \quad (\mu = 1, \dots, 2n), \quad (4)$$

此时 (3) 式给出

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right) \dot{a}^\nu \dot{a}^\mu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} \dot{a}^\mu - \frac{\partial R_\mu}{\partial t} \dot{a}^\mu \right\} dt = 0. \quad (5)$$

由于

$$\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right) \dot{a}^\nu \dot{a}^\mu = 0, \quad (6)$$

以及积分区间的任意性, 由 (5) 式得到

$$\frac{\partial B}{\partial a^\mu} \dot{a}^\mu + \frac{\partial R_\mu}{\partial t} \dot{a}^\mu = 0, \quad (7)$$

将 (7) 式改写为

$$\frac{d}{dt} B = \frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\partial R_\mu}{\partial t} \dot{a}^\mu, \quad (8)$$

(8) 式称为类功率方程. 因为 Birkhoff 函数 B 常常具有能量意义. 由类功率方程 (8), 我们有

* 国家自然科学基金(批准号: 10572021)资助的课题.

命题 1 如果 Birkhoff 函数 B 和 Birkhoff 函数组 R_μ 满足

$$\frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\partial R_\mu}{\partial t} \dot{a}^\mu = 0, \quad (9)$$

则 Birkhoff 函数 B 为系统的积分.

命题 1 具有普遍意义. 由命题 1 可得如下两个已知结果.

推论 1 对自治形式 Birkhoff 系统, Birkhoff 函数 B 是系统的积分.

取

$$a^\mu = \begin{cases} q_\mu & (\mu = 1 \dots n), \\ p_{\mu-n} & (\mu = n+1 \dots 2n), \end{cases}$$

$$R_\mu = \begin{cases} p_\mu & (\mu = 1 \dots n), \\ 0 & (\mu = n+1 \dots 2n), \end{cases} \quad (10)$$

则 Birkhoff 系统成为 Hamilton 系统. 此时(9)式给出

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0, \quad (11)$$

于是有

推论 2 对 Hamilton 系统, 如果 Hamilton 函数 H 不显含 t , 则 Hamilton 函数是系统的积分.

下面举例说明命题 1 的应用.

二阶 Birkhoff 系统为

$$R_1 = 0, R_2 = ta^1,$$

$$B = \frac{1}{2} \{ t^2 (a^1)^2 + (a^2)^2 \}, \quad (12)$$

它满足(9)式, 由命题 1 知, 系统有积分

$$B = \text{const}. \quad (13)$$

4. 导出积分变分原理和微分变分原理

取

$$Z_\mu = \delta a^\mu, \quad (14)$$

此时(3)式给出

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu} \right) \dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial t} \right\} \delta a^\mu dt = 0. \quad (15)$$

注意到

$$d\delta a^\mu = \delta da^\mu,$$

$$\delta a^\mu \Big|_{t=t_1} = \delta a^\mu \Big|_{t=t_2} = 0, \quad (16)$$

则(15)式可表为

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (R_\nu \dot{a}^\nu - B) dt = 0. \quad (17)$$

这就是利用时间积分等式导出的积分变分原理. 文献[13]称(17)式为 Hamilton 原理的推广, 文献[14]称之为 Pfaff-Birkhoff 原理. 我们有

命题 2 由 Birkhoff 系统时间积分等式(3)可导出 Pfaff-Birkhoff 原理.

当 a^μ, R_μ 和 B 按(10)式选取时, 原理(17)成为 Hamilton 原理

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (p_s \dot{q}_s - H) dt = 0 \quad (s = 1 \dots n). \quad (18)$$

由原理(15)中积分区间的任意性, 可得到如下微分变分原理:

$$\left\{ \left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu} \right) \dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial t} \right\} \delta a^\mu = 0. \quad (19)$$

文献[14]称原理(19)为 Pfaff-Birkhoff-d' Alembert 原理.

我们有

命题 3 由 Birkhoff 时间积分等式(3)可导出 Pfaff-Birkhoff-d' Alembert 原理.

利用 Pfaff-Birkhoff-d' Alembert 原理(19)可以研究受约束 Birkhoff 系统动力学^[14,15], 可以研究 Birkhoff 系统的对称性和守恒量^[15]等.

在(10)式选取下, 原理(19)成为

$$\left(-\dot{p}_s - \frac{\partial H}{\partial q_s} \right) \delta q_s + \left(\dot{q}_s - \frac{\partial H}{\partial p_s} \right) \delta p_s = 0, \quad (20)$$

由此可导出 Hamilton 方程.

5. 结 论

以 Birkhoff 系统的时间积分等式(3)为出发点, 导出了 Birkhoff 系统的类功率方程(8), Pfaff-Birkhoff 积分变分原理(17)以及 Pfaff-Birkhoff-d' Alembert 微分变分原理(19), 使 Birkhoff 力学的基本结果建立在它的时间积分等式上.

[1] Papastavridis, John G 1987 *Int. J. Engrg. Sci.* **25** 833
 [2] Papastavridis, John G 2002 *Analytical Mechanics* (New York: Oxford Univ Press)

[3] Mei F X 1989 *Proc of ICAM* 102
 [4] Zhang R C, Chen X W, Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 12
 [5] Mei F X 2001 *Int J. Non-Linear Mech* **36** 817

- [6] Mei F X , Chen X W 2001 *J. Beijing Institute of Technology* **10** 138
- [7] Zhang H B 2002 *Chin. Phys.* **11** 765
- [8] Chen X W 2003 *Chin. Phys.* **12** 586
- [9] Zhang Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 461 (in Chinese) [张 毅 2002 物理学报 **51** 461]
- [10] Fu J L , Chen L Q , Xue Y 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 256 (in Chinese) [傅景礼、陈立群、薛 纭 2003 物理学报 **52** 256]
- [11] Zhang Y , Mei F X 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2419 (in Chinese) [张 毅、梅凤翔 2004 物理学报 **53** 2419]
- [12] Xu Z X 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4971 (in Chinese) [许志新 2005 物理学报 **54** 4971]
- [13] Santilli R M 1983 *Foundations of Theoretical Mechanics II* (New York : Springer-Verlag ,)
- [14] Mei F X , Shi R C , Zhang Y F *et al* 1996 *Dynamics of Birkhoffian Systems* (Beijing : Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔、史荣昌、张永发等 1996 Birkhoff 系统动力学 (北京 : 北京理工大学出版社)]
- [15] Mei F X 1999 *Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing : Science Press) (in Chinese) [梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用 (北京 : 科学出版社)]

Time-integral theorems for Birkhoff systems ^{*}

Ge Wei-Kuan¹⁾ Mei Feng-Xiang²⁾

¹⁾ Department of Physics , Huzhou Teachers College , Huzhou 313000 , China)

²⁾ Department of Mechanics , Beijing Institutes of Technology , Beijing 100081 , China)

(Received 2 September 2006 ; revised manuscript received 13 September 2006)

Abstract

The purpose of this paper is to study the time-integral theorems for the Birkhoff systems. A time-integral identity of the systems is presented. The power-like equation , the Pfaff-Birkhoff integral variational principle and the Pfaff-Birkhoff-d' Alembert differential variational principle of the systems are deduced by using the time-integral identity.

Keywords : Birkhoff system , time-integral identity , power-like equation , variational principle

PACC : 0320