

基于线性分离的自治混沌系统的投影同步^{*}

王兴元[†] 王 勇

(大连理工大学电子与信息工程学院, 大连 116024)

(2006 年 8 月 11 日收到, 2006 年 9 月 17 日收到修改稿)

分析了自治混沌系统的投影同步问题. 基于线性系统的稳定判定准则, 提出一种新的线性分离的同步方法, 并采用该方法实现了 Lorenz 系统, Rössler 系统和超混沌 Chen 系统的投影同步. 数值模拟进一步验证了所提出方案的有效性.

关键词: 投影同步, 自治混沌系统, 线性分离

PACC: 0545, 0555

1. 引 言

1990 年, Pecora 和 Carroll 提出了“混沌同步”的概念^[1], 并在实验室中用电路实现了同一信号驱动下的两个相同耦合混沌系统的同步^[2]. 现如今, 人们对混沌同步已做了很多深入的研究^[3-7], 并在不同的混沌系统中实现了不同类型的混沌同步, 如完全同步, 广义同步, 相同步, 延迟同步等^[8-15]. 完全同步是指从不同初始点出发的两个混沌系统, 随时间的推移其轨道趋于一致, 这种现象已经在耦合, 无方向耦合或含噪声的混沌系统中观测到^[8-11]. 相同步是指两个混沌系统轨道的相位差锁定在 2π 以内, 而它们的振幅仍然保持混沌状态且互不相关^[12, 13]. 广义同步是指在主从混沌系统的轨道之间建立一个函数关系^[14]. 延迟同步是指具有固定时间延迟的两个混沌系统轨道是一致的^[15]. 在部分耦合线性系统中, Mainieri 和 Xu 等研究指出驱动-响应系统可以同步到一个比例因子上, 这种类型的同步被称为投影同步^[16, 17]. 尽管耦合系统间存在着线性关系, 但由于发生投影同步时相应系统的最大条件 Lyapunov 指数是非负的, 所以投影同步不能被归为广义同步. 在混沌保密通信中, 投影同步可以把二进制数扩展到 M 进制以实现更快的传输, 因此对投影同步的研究具有重要的理论意义和应用前景. 为此, 本文提出线性分离方法用以实现自治混沌系统的投影同步, 数

值仿真进一步证明了该方法的有效性.

2. 基于线性分离的投影同步方法

目前, 在有关投影同步的研究中, 要求被研究的混沌系统是部分线性的, 即混沌系统的状态矢量能够被分成两部分 (u, z) , 并且可严格地表示为

$$\dot{u} = M(z) \cdot u, \quad (1)$$

和

$$\dot{z} = f(u, z) \quad (2)$$

的形式. 这里 z 既是状态变量又是控制信号. 这种要求限制了大多数的混沌系统, 例如 Rössler 系统^[18]等. 早期的研究表明, 部分线性系统投影同步中的比例因子依靠于混沌的演变和初始条件, 所以投影同步的最终状态是不可预测的. 因此, 一些基于 Lyapunov 函数的控制方法被用来控制这种同步行为. 然而对于 Lyapunov 函数的设计迄今还没有非常有效的普适方法, 这已成为设计控制方法的难点. 本文基于线性系统的稳定判定准则, 通过对混沌系统进行适当的分离, 提出一种新的构造投影同步的方法.

2.1. 混沌系统的分解

自治混沌系统可以描述为

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t), \quad (3)$$

这里 $x(t) \in \mathbf{R}^n$ 是系统的 n 维状态矢量, $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 60573172)和辽宁省教育厅高等学校科学技术研究项目(批准号: 20040081)资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: wangxy@dlut.edu.cn

定义了一个 n 维向量空间的矢量域. 把函数 $f(x(t), t)$ 分解为

$$f(x(t), t) = g(x(t)) + h(x(t), t). \quad (4)$$

其中

$$g(x(t)) = Ax(t) \quad (5)$$

是 $f(x(t), t)$ 的线性部分, A 是常满秩矩阵, 并且它的所有特征值实部都为负. 所以 $h(x(t), t) = f(x(t), t) - g(x(t))$ 是 $f(x(t), t)$ 的非线性部分. 这样系统 (3) 可以被重写为

$$\dot{x}(t) = g(x(t)) + h(x(t), t). \quad (6)$$

2.2. 投影同步

在本文中, 投影同步指的是两个相关系统的状态矢量按照指定比例达到同步. 对于给定的系统 (6), 作者构造一个新的系统为

$$\dot{y}(t) = g(y(t)) + h(x(t), t)\alpha, \quad (7)$$

这里 $y(t) \in \mathbf{R}^n$ 是系统 (7) 的 n 维状态矢量, α 是指定的比例因子. 系统 (3) 与系统 (7) 的同步误差被定义为 $e(t) = x(t) - \alpha y(t)$, 它的解由下面的等式确定:

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{x}(t) - \alpha \dot{y}(t) \\ &= g(x(t)) - \alpha g(y(t)) \\ &= Ax(t) - \alpha Ay(t) \\ &= A(x(t) - \alpha y(t)) \\ &= Ae(t). \end{aligned} \quad (8)$$

由 (8) 式可知 $e(t)$ 的零点就是 $\dot{e}(t)$ 的平衡点. 因为矩阵 A 的所有特征值实部都为负, 根据线性系统的稳定判定准则知, 同步误差系统 (8) 在零点是渐进稳定的, 并且有 $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$, 即系统 (3) 的状态矢量 $x(t)$ 和系统 (7) 的状态矢量 $y(t)$ 达到同步.

3. 投影同步的实现

本文以 Lorenz 系统^[19]、Rössler 系统和超混沌 Chen 系统^[20]为例, 用线性分离方法分别实现了它们的投影同步.

3.1. Lorenz 系统

首先以部分线性的 Lorenz 系统为例, 实现其所有状态矢量的投影同步. Lorenz 系统描述为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 &= -x_1 x_3 + ux_1 - x_2, \\ \dot{x}_3 &= x_1 x_2 - vx_3, \end{aligned} \quad (9)$$

当参数 $u = 10$, $v = 8/3$ 和 $w = 28$ 时, Lorenz 系统是混沌的. 利用 $g(x(t))$ 和 $h(x(t))$ 将 Lorenz 系统分解, 其中 $g(x(t))$ 和 $h(x(t))$ 分别为

$$g(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -u & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

和

$$h(x_1, x_2, x_3, t) = \begin{pmatrix} ux_2 \\ -x_1 x_3 + ux_1 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

A 具有负的实特征值 $(-u, -1, v)$. 构造新系统为

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -uy_1 + ux_2/\alpha, \\ \dot{y}_2 &= -y_2 + (wx_1 - x_1 x_3)\alpha, \\ \dot{y}_3 &= -vy_3 + x_1 x_2/\alpha. \end{aligned} \quad (12)$$

由于 A 的特征值为负实数, 根据线性系统的稳定判定准则知误差 $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) - \alpha y(t)] = 0$, 即系统 (9) 与系统 (12) 实现了同步.

3.2. Rössler 系统

Rössler 系统不是部分线性系统, 它不能分解为 (1) 式和 (2) 式的形式. Rössler 系统表示为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 - x_3, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + \rho x_2, \\ \dot{x}_3 &= \nu + x_3(x_1 - \omega). \end{aligned} \quad (13)$$

当参数 $\rho = 0.2$, $\nu = 0.2$ 和 $\omega = 5.7$ 时, Rössler 系统是混沌的. 利用 $g(x(t))$ 和 $h(x(t))$ 将 Rössler 系统 (13) 进行分解. 其中 $g(x(t))$ 和 $h(x(t))$ 分别为

$$g(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

和

$$h(x_1, x_2, x_3, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ (\rho + 1)x_2 \\ \nu + x_1 x_3 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

A 的特征值为 $(-\omega, \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}i}{2})$. 构造新系统为

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -y_2 - y_3, \\ \dot{y}_2 &= y_1 - y_2 + (\rho + 1)x_2/\alpha, \end{aligned}$$

$$\dot{y}_3 = -\omega y_3 + (\nu + x_1 x_3) \alpha. \quad (16)$$

由于 A 的特征值实部为负, 根据线性系统的稳定判定准则知误差 $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) - \alpha y(t)] = 0$, 即系统 (13) 与系统 (16) 实现了同步.

3.3. 超混沌 Chen 系统

由于超混沌系统具有更加复杂的特性, 目前它已成为混沌控制中的研究热点之一. 下面采用线性分离的方法实现超混沌 Chen 系统的投影同步, 用以说明本文提出方法对于超混沌系统也是有效的. 超混沌 Chen 系统可表示为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a(x_2 - x_1) + x_4, \\ \dot{x}_2 &= dx_1 - x_1 x_3 + cx_2, \\ \dot{x}_3 &= x_1 x_2 - bx_3, \\ \dot{x}_4 &= x_2 x_3 + rx_4. \end{aligned} \quad (17)$$

当参数 $a = 35$, $b = 3$, $c = 12$, $d = 7$ 和 $r = 0.5$ 时, 系统 (17) 具有超混沌吸引子. 用 $g(x(t))$ 和 $h(x(t))$ 将系统 (17) 进行分解. 其中 $g(x(t))$ 和 $h(x(t))$ 分别为

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ &= A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (18)$$

和

$$h(x_1, x_2, x_3, x_4, t) = \begin{pmatrix} ax_2 + x_4 \\ dx_1 - x_1 x_3 + (c+1)x_2 \\ x_1 x_2 \\ x_2 x_3 + (r+1)x_4 \end{pmatrix}, \quad (19)$$

A 具有负的实特征值 $(-a, -1, -b, -1)$. 构造新系统为

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -ay_1 + (ax_2 + x_4)\alpha, \\ \dot{y}_2 &= -y_2 + (dx_1 - x_1 x_3 + (c+1)x_2)\alpha, \\ \dot{y}_3 &= -by_3 + x_1 x_2 / \alpha, \\ \dot{y}_4 &= -y_4 + (x_2 x_3 + (r+1)x_4)\alpha. \end{aligned} \quad (20)$$

由于 A 的特征值为负实数, 根据线性系统的稳定判定准则知误差 $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) - \alpha y(t)] = 0$, 即

系统 (17) 与系统 (20) 实现同步.

通过对上述实例的证明可以看出, 线性分离方法不管对部分线性的还是非部分线性的混沌系统或超混沌系统都是非常有效的.

4. 数值仿真实验

为了验证本文中所提出方法的有效性, 作者举了三个数值仿真的实例. 在实例中, 选取时间步长为 $\tau = 0.001$ s, 采用四阶 Runge-Kutta 法来求自治方程组的解.

例 1 系统 (9) 与系统 (12) 的初始点分别选取为 $x_1(0) = 5$, $x_2(0) = 8$ 和 $x_3(0) = 12$, $y_1(0) = 10$, $y_2(0) = 15$ 和 $y_3(0) = 20$, 系统参数为 $u = 10$, $\nu = 8/3$ 和 $w = 28$, 比例因子 α 分别选取为 2 , -2 和 0.5 . 当 $\alpha = 2$ 时, 误差初始值为 $e_1(0) = -15$, $e_2(0) = -22$ 和 $e_3(0) = -28$. 由误差效果图 1(a), 1(b) 和 1(c) 可见, 当 t 分别接近 0.7 (s), 5.7 (s) 和 4 (s) 时, 误差 $e_1(t)$, $e_2(t)$ 和 $e_3(t)$ 已分别稳定在零点, 即系统 (9) 与 (12) 达到了同步. 图 2 为比例因子 α 分别选取为 2 , -2 和 -0.5 时, 系统 (9) 和 (12) 的吸引子; 由图 2(a), 2(b) 和 2(c) 可见, 系统 (9) 状态矢量的幅值分别是系统 (12) 的 2 倍、 2 倍和 0.5 倍, 两系统的相位分别为同相、反相和反相, 即系统 (9) 和系统 (12) 的吸引子按指定的比例因子达到了投影同步.

例 2 系统 (13) 与系统 (16) 的初始点分别选取为 $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = 5$ 和 $x_3(0) = 7$, $y_1(0) = 8$, $y_2(0) = 12$ 和 $y_3(0) = 15$, 系统参数为 $\rho = 0.2$, $\nu = 0.2$ 和 $\omega = 5.7$, 比例因子 α 分别选取为 2 , -2 和 -0.5 . 当 $\alpha = 2$ 时, 误差初始值为 $e_1(0) = -14$, $e_2(0) = -19$ 和 $e_3(0) = -23$. 由误差效果图 3(a), 3(b) 和 3(c) 可见, 当 t 分别接近 14 (s), 12 (s) 和 1 (s) 时, 误差 $e_1(t)$, $e_2(t)$ 和 $e_3(t)$ 已分别稳定在零点, 即系统 (13) 与系统 (16) 达到了同步. 由图 4(a), 4(b) 和 4(c) 可见, 系统 (13) 状态矢量的幅值分别是系统 (16) 的 2 倍、 2 倍和 0.5 倍, 两系统的相位分别为同相、反相和反相, 即系统 (13) 和系统 (16) 的吸引子按指定的比例因子达到了投影同步.

例 3 系统 (17) 与系统 (20) 的初始点分别选取为 $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = 3$, $x_3(0) = 5$ 和 $x_4(0) = 13$, $y_1(0) = 5$, $y_2(0) = 9$, $y_3(0) = 13$ 和 $y_4(0) = 19$, 系统参数为 $a = 35$, $b = 3$, $c = 12$, $d = 7$ 和 $r = 0.5$, 比例因子 α 分别选取为 2 , -2 和 0.5 . 当 $\alpha = 2$ 时, 误差初

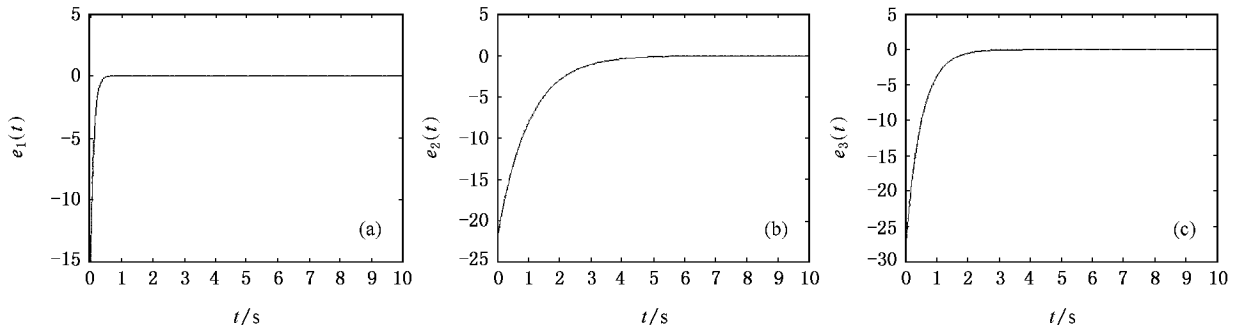


图1 $\alpha = 2$ 时系统(9)和(12)的同步误差曲线 (a) $e_1(t)$ 的响应曲线 ;(b) $e_2(t)$ 的响应曲线 ;(c) $e_3(t)$ 的响应曲线

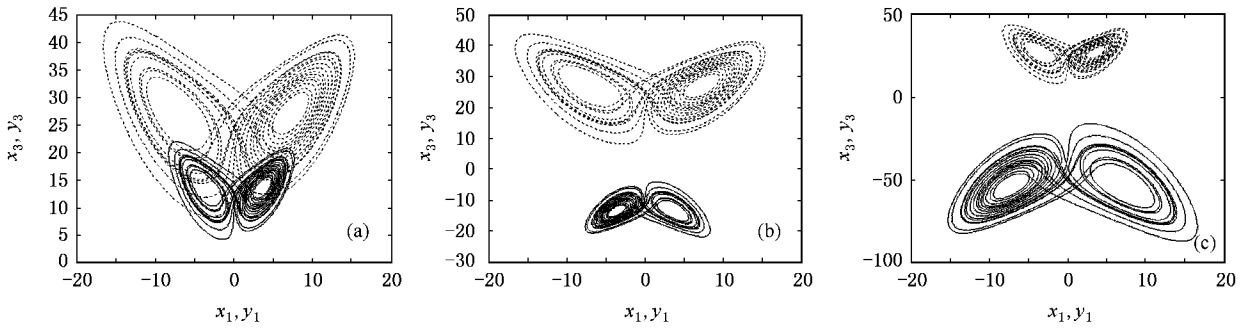


图2 比例因子 α 取不同值时 ,系统(9)和(12)同步的吸引子(虚线为系统(9)的吸引子 ,实线为系统(12)的吸引子)(a) $\alpha = 2$ (b) $\alpha = -2$ (c) $\alpha = -0.5$

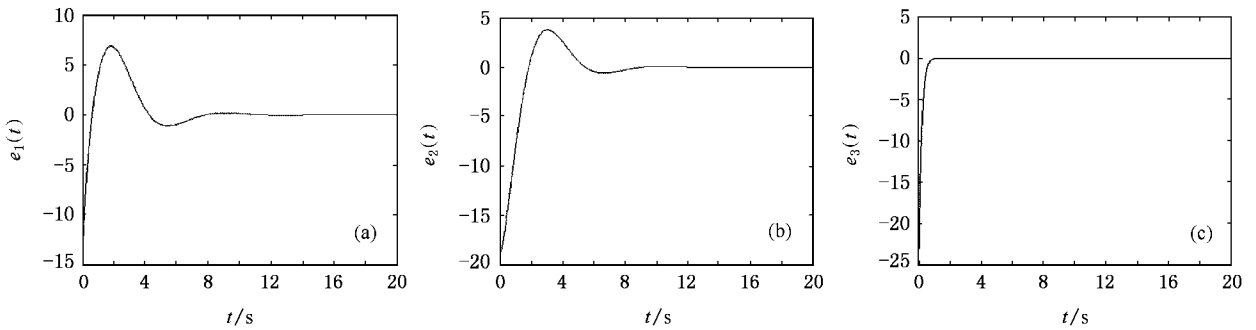


图3 $\alpha = 2$ 时系统(13)和(16)的同步误差曲线 (a) $e_1(t)$ 的响应曲线 ;(b) $e_2(t)$ 的响应曲线 (c) $e_3(t)$ 的响应曲线

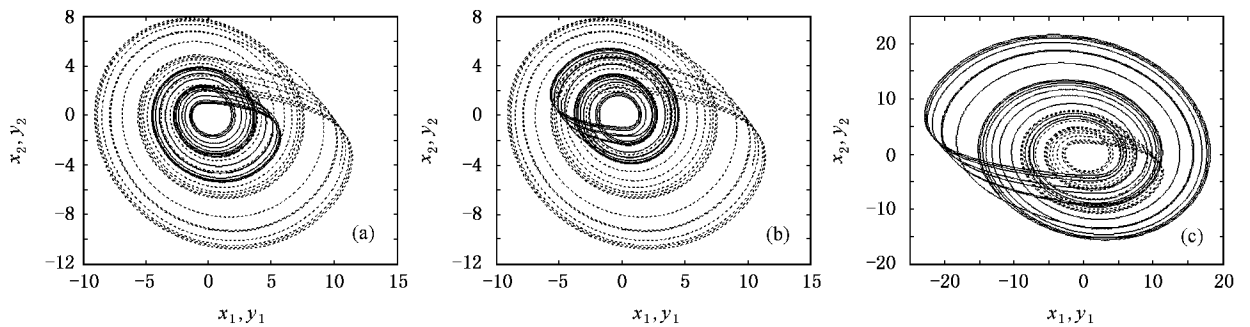


图4 比例因子 α 取不同值时 ,系统(13)和(16)同步的吸引子(虚线为系统(13)的吸引子 ,实线为系统(16)的吸引子) (a) $\alpha = 2$ (b) $\alpha = -2$ (c) $\alpha = -0.5$

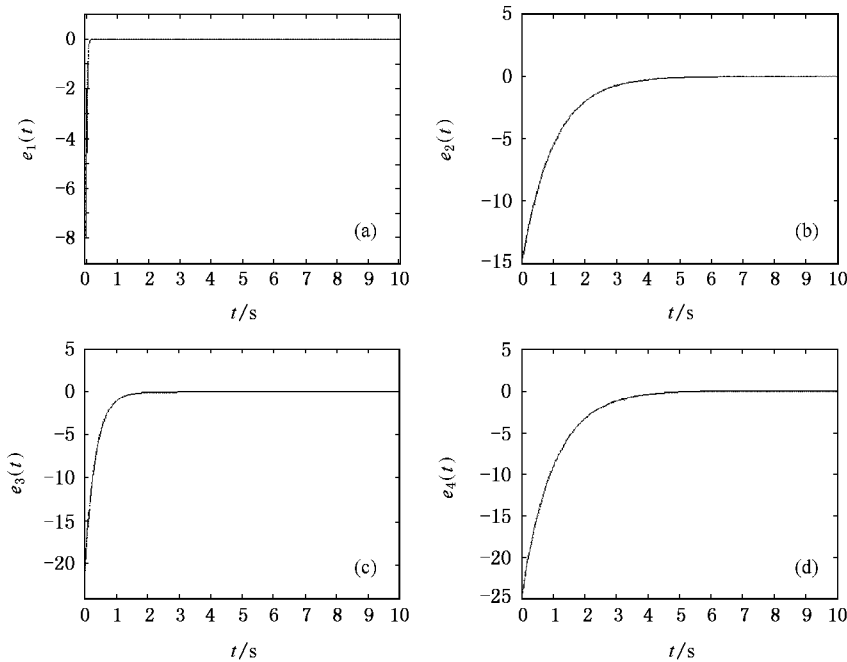


图 5 $\alpha=2$ 时系统(17)和(20)的同步误差曲线 (a) $e_1(t)$ 的响应曲线 ;(b) $e_2(t)$ 的响应曲线 ;
(c) $e_3(t)$ 的响应曲线 ;(d) $e_4(t)$ 的响应曲线

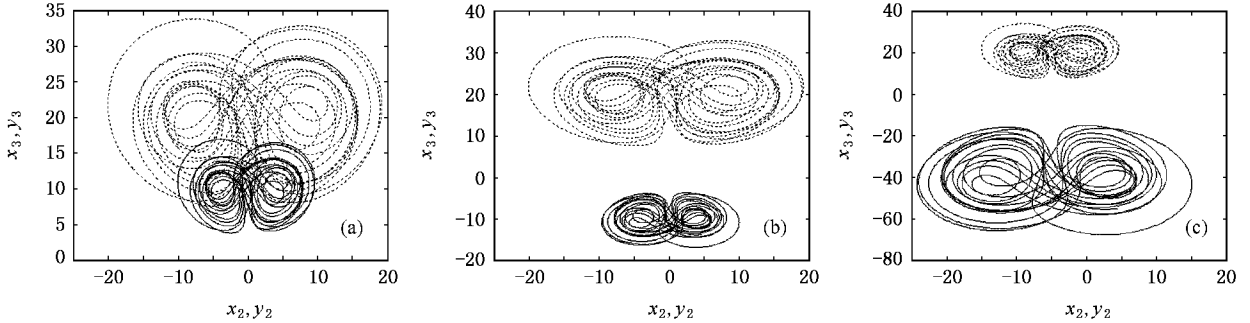


图 6 比例因子 α 取不同值时,系统(17)和(20)同步的吸引子:虚线为系统(17)的吸引子,实线为系统(20)的吸引子 (a) $\alpha = 2$;(b) $\alpha = -2$;
(c) $\alpha = -0.5$

始值为 $e_1(0) = -8, e_2(0) = -15, e_3(0) = -21$ 和 $e_4(0) = -25$. 由误差效果图 (a), (b), (c) 和 (d) 可见, 当 t 分别接近 $0.7(s), 6.5(s), 3(s)$ 和 $5.8(s)$ 时, 误差 $e_1(t), e_2(t), e_3(t)$ 和 $e_4(t)$ 已分别稳定在零点, 即系统(17)与(20)达到了同步. 图 6 为比例因子 α 分别选取为 $2, -2$ 和 -0.5 时, 系统(17)和系统(20)的吸引子, 由图 (a), (b) 和 (c) 可见: 系统(17)状态矢量的幅值分别是系统(20)的 2 倍、2 倍和 0.5 倍, 两系统的相位分别为同相、反相和反相, 即系统(17)和系统(20)的吸引子按指定的比例因子达到了投影同步.

5. 结 论

1. 本文根据线性系统的稳定判定准则, 通过对混沌系统进行适当的分离, 提出一种新的实现投影同步的方法, 并采用该方法实现了 Lorenz 系统, Rössler 系统和超混沌 Chen 系统的投影同步. 最后通过仿真实验, 验证了该方法的有效性.

2. 这种线性分离的方法与现有的同步方法相比有很多的优势: (1) 该方法简单, 鲁棒性强, 而且不需要设计 Lyapunov 函数; (2) 能实现一类非线性系统的投影同步, 且不要求系统必须是部分线性的; (3) 能

实现全局性的同步,并且不要求提前给定的初始条件必须是同一吸引域;4)可以实现所有状态矢量的

同步,而早期的成果仅仅能实现部分状态矢量的同步.

- [1] Pecora L M , Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [2] Carroll T L , Pecora L M 1991 *IEEE Trans. Circuits Systems* **38** 453
- [3] Chen G , Dong X 1993 *IEEE Trans. Circuits Systems* **40** 591
- [4] Fuh C C , Tung P C 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 2952
- [5] Chen G , Dong X 1998 *From Chaos to Order : Methodologies , Perspectives and Applications* (Singapore : World Scientific) chapt. 1
- [6] Wang G R , Yu X L , Chen S G 2001 *Chaotic Control , Synchronization and Utilizing* (Beijing : National Defence Industry Press) chapt. 7 (in Chinese) [王光瑞、于熙岭、陈式刚 2001 混沌的控制、同步与利用(北京:国防工业出版社)第七章]
- [7] Wang X Y 2003 *Chaos in the Complex Nonlinearity System* (Beijing : Electronics Industry Press) chapt. 2 (in Chinese) [王兴元 2003 复杂非线性系统中的混沌(北京:电子工业出版社)第二章]
- [8] Shinbrot T , Grebogi C , Ott E , Yorke J A 1993 *Nature* **363** 411
- [9] Yu X , Song Y 2001 *Int. J. Bifur. Chaos* **11** 1737
- [10] Wang X Y , Liu M 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 118 (in Chinese) [王兴元、刘明 2005 物理学报 **54** 118]
- [11] Wang X Y , Wu X J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 605 (in Chinese) [王兴元、武相军 2006 物理学报 **55** 605]
- [12] Michael G R , Arkady S P , Jurgen K 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 4193
- [13] Ho M C , Hung Y C , Chou C H 2002 *Phys. Lett. A* **296** 43
- [14] Yang X S 2001 *Appl. Math. Comput.* **122** 71
- [15] Shahverdiev E M , Sivaprakasam S , Shore K A 2002 *Phys. Lett. A* **292** 320
- [16] Mainieri R , Rehacek J 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 3042
- [17] Xu D L , Li Z 2002 *Int. J. Bifur. Chaos* **12** 1395
- [18] Rössler O E 1976 *Phys. Lett. A* **57** 397
- [19] Lorenz E N 1963 *J. Atmos. Sci.* **20** 130
- [20] Li Y X , Tang W K S , Chen G R 2005 *Int. J. Bifur. Chaos* **15** 3367

Projective synchronization of autonomous chaotic system based on linear separation *

Wang Xing-Yuan[†] Wang Yong

(School of Electronic & Information Engineering , Dalian University of Technology , Dalian 116024 , China)

(Received 11 August 2006 ; revised manuscript received 17 September 2006)

Abstract

This paper analyses the projective synchronization in autonomous chaotic system. Base on the stability criterion of linear systems , a new approach for constructing chaotically projective synchronization is proposed. The projective synchronizations of Lorenz system , Rössler system and hyperchaotic chen 's system are achieved via the linear separation method. Numerical simulations are provided for illustration and verification of the proposed method.

Keywords : projective synchronization , autonomous chaotic system , linear separation

PACC : 0545 , 0555

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60573172) and the Superior University Science Technology Research Project of Liaoning Province (Grant No. 20040081).

[†] Corresponding author. E-mail : wangxy@dut.edu.cn