

一类非自治位置时滞反馈控制系统的亚谐共振响应*

王洪坡† 李 杰

(长沙国防科学技术大学机电工程与自动化学院磁浮工程中心,长沙 410073)

(2006 年 8 月 14 日收到,2006 年 9 月 24 日收到修改稿)

研究了弹性轨道条件下,控制回路中位置反馈信号存在时滞的磁浮系统在亚谐轨道激励作用下的响应问题.将动力学模型在平衡点处线性化,以时滞为分岔参数,得到了系统出现 Hopf 分岔的条件.用中心流形约化方法得到了包含轨道扰动系统的 Poincaré 规范型.用多尺度法从理论上推导了时滞磁浮系统的亚谐共振周期解,得到了自由振动的分岔响应方程,分析了周期解中自由振动项的存在条件,研究了控制参数和激励参数与周期解的关系.最后用数值仿真的方法分析了时滞参数、控制参数对系统响应的影响,分析结果指出,使系统保持稳定的亚谐响应的时滞边界小于无扰动时的时滞边界.时滞参数不但可以抑制亚谐响应,还能够控制混沌的产生,而控制参数可以控制系统响应中自由振动项的出现和受迫振动的幅值,适当选择这些参数可以有效抑制亚谐振动响应.

关键词:亚谐共振响应,位置时滞反馈控制,非自治磁浮系统,分岔

PACC: 0547, 4340, 6240

1. 引 言

磁浮系统是一个集机械、控制、电磁等于一体的复杂系统,是磁浮列车的核心组件.在控制环节和执行环节中,时滞是不可避免的.若考虑轨道弹性^[1-4],还需研究 Bernoulli-Euler (B-E)梁方程引起的系统振动问题.车辆/轨道系统动力问题直接影响磁浮列车的安全性、舒适性和经济性,是决定其应用前景的重要因素^[1]. Cai 等^[2]建立了多体、多载磁浮列车与弹性轨道耦合的整车动力学模型,定量揭示了车体垂向加速度、车体所载磁体组数、列车车体个数及运动速度等对轨道动力变形和列车动力特性的影响规律. Zheng 等^[3]针对五自由度的二次悬挂体系的动力特性作了数值分析,指出列车与轨道耦合系统的特性若忽略轨道变形,其结果是不同的.他们^[4]还讨论了空气弹簧模型对弹性轨道上磁浮列车悬浮稳定性的影响,指出非线性模型严重影响列车的悬浮稳定范围,甚至使系统出现混沌现象.

非自治时滞微分系统的稳定性、分岔和混沌现象一直是非线性动力学研究的重要课题.张晓明等^[5]确定了用延迟反馈法可控制三阶自治混沌系统的一般条件,讨论了由 Hopf 分岔产生周期解的分岔

方向的判据,钱长照等^[6]对含时滞和简谐激励作用下的 van der Pol-Duffing 方程进行了研究,得到了时滞与分岔响应的关系,讨论了余维一和余维二分岔出现的条件;Ren 等^[7]分析了电流控制型功率因数校正 Boost 变换器的分岔行为,得到了变换器的低频分岔图;Xu 等^[8,9]研究了时滞反馈控制对周期外激励非线性系统复杂的影响机理,指出通过调节控制时滞,可以使系统出现分岔和混沌现象;Attilio^[10,11]研究了受参数激励和外激励作用的非线性常微分方程的时滞反馈控制问题,指出适当选择时滞量和控制参数可以有效降低主共振响应的幅值;Ji 等^[12,13]研究了含两个时滞的二自由度磁悬浮轴承系统的稳定性和 Hopf 分岔出现的条件,分析了系统在外激励作用下的动力学行为,讨论了非共振和亚谐共振两种共振形式. Li 等^[14]研究了 Duffing-van der Pol 振子在时滞反馈控制下的响应问题,得到了主共振的分岔和稳定性条件.

对磁浮系统的非线性动力学分析和分岔现象的研究已经获得了一些有价值的成果.施晓红等^[15]通过分析基于 PID 控制器的非线性磁悬浮系统的 Hopf 分岔现象,从控制参数与系统周期解稳定性的角度阐述了磁浮系统产生振动的原因,但还未见到运用分岔理论和非线性动力学的方法研究车轨共振问题

* 国家自然科学基金(批准号 60404003)和霍英东教育基金(批准号 94028)资助的课题.

† E-mail: nudtwhp@yahoo.com.cn

的相关文献. 本文重点研究在位置时滞和轨道扰动共同作用下, 磁浮系统在平衡点的 1:3 亚谐共振响应, 分析了影响振动的条件, 为解决车轨共振问题作理论上的探索.

2. 系统建模与稳定性分析

2.1. 系统的动力学建模

文献 [1—4], 采用位置、速度、加速度反馈控制的磁浮系统的动力学模型如下:

$$\begin{aligned} & \dot{z}_a - A_2(z_a + z_e - z_h)(g - \ddot{z}_a) \\ &= -A_3\sqrt{g - \ddot{z}_a} [k_p(z_{ac} - z_{hc}) + k_d\dot{z}_a + k_a\ddot{z}_a], \end{aligned} \quad (1)$$

式中采用 $z_m, \dot{z}_a, \ddot{z}_a$ 作为反馈状态, 电磁铁稳定悬浮于给定间隙 z_e 处, A_2, A_3 为系统参数, k_p, k_d, k_a 分别为位置、速度、加速度反馈控制增益, $z_{ac} = z_a(t - \tau)$ 表示带滞后的位置反馈信号, $z_{hc} = z_h(t - \tau)$ 表示带滞后的轨道扰动信号, z_a 为电磁铁垂向绝对位移, z_m 为电磁铁相对位移, z_h 为轨道扰动, \cdot 表示对时间 t 的导数, 上面的物理量均采用国际单位制.

将 (1) 式在原点处关于 $(z_a - z_h, \dot{z}_a, \ddot{z}_a, z_{ac} - z_{hc})$ 三阶泰勒展开, 得到

$$\begin{aligned} \dot{z}_a &= A_2gz_a - \sqrt{g}A_3k_d\dot{z}_a - (\sqrt{g}A_3k_a + A_2z_e)\ddot{z}_a \\ &\quad - \sqrt{g}A_3k_pz_{ac} + f(z_a, \dot{z}_a, \ddot{z}_a, z_{ac}, z_h, z_{hc}) \end{aligned} \quad (2)$$

其中

$$\begin{aligned} & f(z_a, \dot{z}_a, \ddot{z}_a, z_{ac}, z_h, z_{hc}) \\ &= \frac{A_3k_a}{2\sqrt{g}}\ddot{z}_a^2 + \frac{A_3k_d}{2\sqrt{g}}\dot{z}_a\ddot{z}_a + \frac{A_3k_p}{2\sqrt{g}}z_{ac}\ddot{z}_a(z_{ac} - z_{hc}) \\ &\quad - 2A_2(z_a - z_h)\ddot{z}_a + \frac{A_3k_a}{8\sqrt{g^3}}\ddot{z}_a^3 + \frac{A_3k_d}{8\sqrt{g^3}}\dot{z}_a\ddot{z}_a^2 \\ &\quad + \frac{A_3k_p}{8\sqrt{g^3}}\ddot{z}_a^2(z_{ac} - z_{hc}) - A_2gz_h + \sqrt{g}A_3k_pz_{hc} \\ &\quad + O((z_a - z_h)^4, \dot{z}_a^4, \ddot{z}_a^4, (z_{ac} - z_{hc})^4). \end{aligned}$$

因为磁浮系统的非线性动力学方程比较复杂, 难以直接进行分析, 下面的研究以 (2) 式作为研究对象, 这样既能够保留系统在原点处的局部非线性特性, 又便于分析.

2.2. 稳定性与 Hopf 分岔

为了研究系统在平衡位置的稳定性, 通常的办

法是忽略轨道扰动的影响, 将系统在平衡点附近线性展开, 然后研究线性化系统的特征方程. 若特征方程没有零实部, 则平衡点是双曲的, 系统在该点附近的渐进行为可由线性化系统确定^[16]. 忽略 (2) 式中的非线性项和扰动项, 系统在原点处的线性化方程为

$$\ddot{z}_a + A_2z_e\ddot{z}_a - A_2gz_a + \sqrt{g}A_3(k_pz_{ac} + k_d\dot{z}_a + k_a\ddot{z}_a) = 0. \quad (3)$$

其特征方程为

$$D(\lambda, \tau_1) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + b_1\lambda + c_1 + d_1\exp(-\lambda\tau) = 0, \quad (4)$$

其中 $a_1 = A_2z_e + k_a\sqrt{g}A_3$, $b_1 = k_d\sqrt{g}A_3$, $c_1 = -gA_2$, $d_1 = k_p\sqrt{g}A_3$.

若在反馈控制中不考虑时滞的影响, 即令 $\tau = 0$, 很容易得到控制参数的稳定范围

$$\begin{aligned} k_p &> \sqrt{g}\frac{A_2}{A_3}, \quad k_a > -\frac{A_2z_e}{\sqrt{g}A_3}, \\ k_d &> \frac{k_a\sqrt{g}A_3 - gA_2}{(A_2z_e + k_a\sqrt{g}A_3)\sqrt{g}A_3}. \end{aligned} \quad (5)$$

若时滞 $\tau > 0$, 条件 (5) 无法保证系统平凡解的局部稳定性. 因为 (4) 式的特征根是连续变化的, 当时滞充分小时, (5) 式能够保证 (4) 式的特征根皆含负实部. 若时滞增加到某一临界值, 在虚轴上将出现一对共轭特征根, 其余特征根皆有负实部.

若假设这对共轭纯虚特征值为 $\lambda = \pm i\beta$, $\beta > 0$, β 可由下式解出:

$$\begin{aligned} & \beta^6 + (a_1^2 - 2b_1)\beta^4 + (b_1^2 - 2a_1c_1)\beta^2 \\ & \quad + c_1^2 - d_1^2 = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

不妨令其正解为 $\beta = \beta_0$, 则 (4) 式总存在一对纯虚特征值 $\pm i\beta_0$, 此时存在时滞 τ_0 满足

$$\begin{aligned} \cos(\beta_0\tau_0) &= \frac{a_1\beta_0^2 - c_1}{d_1}, \\ \sin(\beta_0\tau_0) &= \frac{b_1\beta_0 - \beta_0^3}{d_1}. \end{aligned} \quad (7)$$

若使 Hopf 分岔存在, 还需检查穿越条件, 即临界特征根穿越虚轴时, 速度不为零. (4) 式对 λ 和 τ 求导, 并令 $\tau = \tau_0$, $\lambda = i\beta_0$, 取实部, 得到

$$\operatorname{Re}\left[\frac{d\lambda}{d\tau}\right]_{\tau=\tau_0}^{\lambda=i\beta_0} = d_1\beta_0 \frac{\sin(\beta_0\tau_0)pp + \cos(\beta_0\tau_0)qq}{pp^2 + qq^2}, \quad (8)$$

其中 $pp = b_1 - 3\beta_0^2 - d_1\tau_0\cos(\beta_0\tau_0)$, $qq = 2a_1\beta_0 + d_1\tau_0\sin(\beta_0\tau_0)$.

容易验证 $\text{Re} \left[\frac{d\lambda}{d\tau} \right]_{\tau=\tau_0}^{\lambda=i\beta_0} \neq 0$, 满足穿越条件. 平

凡不动点的稳定性由时滞决定. 随着时滞的变化, 特征根穿越虚轴, 系统平凡解的稳定性将经过一个 Hopf 分岔而发生变化.

3. 中心流形约化与 Poincaré 规范型

系统方程 (2) 为三阶系统, 难以直接进行非线性振动分析. 本小节将 (2) 式约化到二维中心流形上, 得到的规范型可以应用非线性振动的近似解法. 下面的分析基于中心流形/Poincaré 规范型方法. 定义状态变量 $X = [z_a \quad \dot{z}_a \quad \ddot{z}_a]^T$, (2) 式可以写成矩阵方程组的形式如下:

$$\dot{X} = LX + RX_\tau + F(t, X, X_\tau), \quad (9)$$

其中

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ A_2 g & -\sqrt{g}A_3 k_d & -(A_2 z_c + \sqrt{g}A_3 k_a) \end{bmatrix},$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{g}A_3 k_p & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f \end{bmatrix},$$

$$X_\tau = X(t - \tau).$$

为了将 (9) 式约化到中心流形上, 首先要将其化为泛函微分方程. 为此, 定义相空间 $C = C([-\tau, 0], R^3)$, 对任意的 $\phi \in C$. 定义 $\|\phi\| = \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} |\phi(\theta)|$, 并记, $X_t(\theta) = X(t + \theta)$, $\theta \in [-\tau, 0]$, 因此 $X_t \in C$. (9) 式可以写成如下微分方程的形式:

$$\dot{X} = DX_t + FX_t, \quad (10)$$

其中 $D : C \rightarrow C, F : C \rightarrow C$. 定义如下:

$$D\phi(\theta) = \begin{cases} \frac{d\phi(\theta)}{d\theta}, & \theta \in [-\tau, 0), \\ L\phi(0) + R\phi(-\tau), & \theta = 0, \end{cases} \quad (11)$$

$$F\phi(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta \in [-\tau, 0), \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f(t, \phi(0)) \end{bmatrix}, & \theta = 0, \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} f(t, \phi(0)) = & \frac{A_3 k_a}{2\sqrt{g}} \phi_3^2(0) + \frac{A_3 k_d}{2\sqrt{g}} \phi_2(0) \phi_3(0) \\ & + \frac{A_3 k_p}{2\sqrt{g}} \phi_3(0) (\phi_1(-\tau) - z_{hr}) \\ & - 2A_2 (\phi_1(0) - z_h) \phi_3(0) \\ & + \frac{A_3 k_a}{8\sqrt{g^3}} \phi_3^3(0) + \frac{A_3 k_d}{8\sqrt{g^3}} \phi_2(0) \phi_3^2(0) \\ & + \frac{A_3 k_p}{8\sqrt{g^3}} \phi_3^2(0) (\phi_1(-\tau) - z_{hr}) \\ & - A_2 g z_h + \sqrt{g} A_3 k_p z_{hr}, \end{aligned} \quad (13)$$

ϕ_i 为 ϕ 中元素, $i = 1, 2, 3$.

由前面的分析可知当控制参数增益满足 (5) 式, τ 取临界值时, (4) 式存在一对共轭纯虚特征根 $\lambda = \pm \beta i$. 此时 C 可分解成两个子空间 $C = P_\lambda \oplus Q_\lambda$, P_λ 是由算子 D 的特征值对应的特征向量张成的不变子空间, Q_λ 是 P_λ 的补空间. 对任意的 $\psi(\xi) \in C^*([0, \tau], R^2)$ (C^* 是 C 的对偶空间), 定义 D 的伴随算子

$$D^* \psi(\xi) = \begin{cases} -\frac{d\psi(\xi)}{d\xi}, & \xi \in (0, \tau], \\ L^* \psi(0) + R^* \psi(\tau), & \xi = 0. \end{cases} \quad (14)$$

对于 $\phi \in C, \psi \in C^*$, 定义双线性泛函

$$\psi, \phi = \bar{\psi}^T(0)\phi(0) + \int_{-\tau}^0 \bar{\psi}^T(\xi + \tau)R\phi(\xi) d\xi. \quad (15)$$

设 $q_1(\theta)$ 和 $q_2(\theta)$ 分别是 D 对应于临界特征值 $\lambda_1 = i\beta$ 的特征向量, 且满足

$$\begin{aligned} D(q_1(\theta) + iq_2(\theta)) &= i\beta(q_1(\theta) + iq_2(\theta)) \\ \Rightarrow Dq_1(\theta) &= -\beta q_2(\theta), Dq_2(\theta) = \beta q_1(\theta). \end{aligned} \quad (16)$$

解之可以得到

$$\begin{aligned} q_1(\theta) &= S_1 \cos \beta\theta - S_2 \sin \beta\theta, \\ q_2(\theta) &= S_2 \cos \beta\theta + S_1 \sin \beta\theta, \\ S_1 &= [1 \quad 0 \quad -\beta^2]^T, S_2 = [0 \quad \beta \quad 0]^T. \end{aligned} \quad (17)$$

类似的, 定义 q_1^*, q_2^* 为算子 D^* 对应于 $\lambda_1^* = -i\beta$ 的特征向量, 可以得到下面的解形式:

$$\begin{bmatrix} q_1^*(\xi) \\ q_2^*(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \cos(\omega\xi) + \begin{bmatrix} -N_2 \\ N_1 \end{bmatrix} \sin(\omega\xi). \quad (18)$$

已知正规化条件 $q_1^*, q_1 = 1, q_1^*, q_2 = 0$, 经过复杂的推导, 即得到了满足正规化条件的定常解

$$\begin{aligned} N_1 &= [n_{11} \quad n_{12} \quad n_{13}]^T, \\ N_2 &= [n_{21} \quad n_{22} \quad n_{23}]^T, \end{aligned} \quad (19)$$

这里 $n_{11}, n_{12}, n_{21}, n_{22}$ 在后面的计算中可以忽略。 n_{13}, n_{23} 的表达式由附录 A 给出。

定义 $z_1 = q_1^* X_t, z_2 = q_2^* X_t, W = X_t - z_1 q_1 - z_2 q_2$, 忽略后面分析中的次要项, 就得到了 (2) 式的 Poincaré 规范型

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \beta z_2 + n_{13} \left(\tilde{g}_1(z_1, z_2) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{g}_2(z_1, z_2, w_1, w_2, w_3) \right), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= -\beta z_1 + n_{23} \left(\tilde{g}_1(z_1, z_2) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{g}_2(z_1, z_2, w_1, w_2, w_3) \right), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} W(\theta) &= DW(\theta) + \tilde{g}_1(z_1, z_2) (n_{23} q_2(\theta) - n_{13} q_1(\theta)) \\ &\quad + \tilde{g}_2(z_1, z_2, w_1, w_2, w_3) (n_{23} q_2(\theta) - n_{13} q_1(\theta)) \\ &\quad + \begin{cases} 0 & \theta \in [-\tau, \theta), \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{g}_1(z_1, z_2) \end{bmatrix} & \theta = 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (22)$$

$\tilde{g}_1(z_1, z_2), \tilde{g}_2(z_1, z_2, w_1, w_2, w_3)$ 的表达式见

附录 A. w_1, w_2, w_3 是 W 中的元素。

由 q_1, q_2 张成的平面与中心流形在原点相切, 也就是说, 中心流形可以用 w 关于 z_1, z_2 的二次展开式来局部近似。

$$W(\theta) = \frac{1}{2} (h_{20}(\theta) z_1^2 + 2h_{11}(\theta) z_1 z_2 + h_{02}(\theta) z_2^2), \quad (23)$$

未知系数 $h_{20}, h_{11}, h_{02} (\in R^3)$, 可表示成如下形式:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} h_{20}(\theta) \\ h_{11}(\theta) \\ h_{02}(\theta) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} H_0 \\ 0 \\ H_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ -H_1 \end{bmatrix} \cos(2\beta\theta) \\ &\quad + \begin{bmatrix} -H_2 \\ H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} \sin(2\beta\theta) \\ &\quad + \frac{1}{3\beta} \begin{bmatrix} -2\alpha_1 t_4 - 2\alpha_2 t_3 \\ 2\alpha_1 t_3 + \alpha_2 t_4 \\ -4\alpha_2 t_3 + 4\alpha_1 t_4 \end{bmatrix} \cos(\beta\theta) \\ &\quad + \frac{1}{3\beta} \begin{bmatrix} 2\alpha_1 t_3 - 2\alpha_2 t_4 \\ 2\alpha_2 t_3 - \alpha_1 t_4 \\ 4\alpha_1 t_3 + 2\alpha_2 t_4 \end{bmatrix} \sin(\beta\theta). \end{aligned} \quad (24)$$

根据微分方程的边界条件, 得到

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} L + R & L + R \cos(2\beta\tau) & 2\beta I + R \sin(2\beta\tau) \\ 0 & -2\beta I - R \sin(2\beta\tau) & L + R \cos(2\beta\tau) \\ L + R & -L - R \cos(2\beta\tau) & -2\beta I - R \sin(2\beta\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_0 \\ H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -10\alpha_1 t_3 - 2\alpha_2 t_4 \\ -3\alpha_1 t_4 + 2\alpha_2 t_3 \\ 4\alpha_1 t_3 + 2\alpha_2 t_4 \end{bmatrix} + \frac{1}{3\beta} \begin{bmatrix} 2L(\alpha_1 t_4 - \alpha_2 t_3) + 2R(\alpha_1 t_3 - \alpha_2 t_4) \sin(\beta\tau) + 2R(\alpha_1 t_4 + \alpha_2 t_3) \cos(\beta\tau) \\ -L(2\alpha_1 t_3 + \alpha_2 t_4) + R(2\alpha_2 t_3 - \alpha_1 t_4) \sin(\beta\tau) - R(2\alpha_1 t_3 + \alpha_2 t_4) \cos(\beta\tau) \\ 4L(\alpha_2 t_3 - \alpha_1 t_4) + 2R(2\alpha_1 t_3 + \alpha_2 t_4) \sin(\beta\tau) + 4R(\alpha_2 t_3 - \alpha_1 t_4) \cos(\beta\tau) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (25)$$

其中

$$\begin{aligned} t_3 &= \frac{\beta^4 A_3 k_a}{2\sqrt{g}} + 2\beta^2 A_2 - \frac{\beta^2 A_3 k_b}{2\sqrt{g}}, \quad t_4 = -\frac{\beta^3 A_3 k_d}{2\sqrt{g}}, \\ \alpha_1 &= [-n_{13} \quad -\beta n_{23} \quad \beta^2 n_{13}]^T, \\ \alpha_2 &= [-n_{23} \quad \beta n_{13} \quad \beta^2 n_{23}]^T. \end{aligned}$$

解 (25) 式得到 H_0, H_1, H_2 , 由此可以得到 $h_{20}(\theta), h_{11}(\theta), h_{02}(\theta)$. 根据 (25) 式计算出 $W(0), W(-\tau)$, 代入 (20) (21), 忽略次要项, 便得到了包含立方项和扰动项的 Poincaré 规范型,

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \beta z_2 + a_{30} z_1^3 + a_{21} z_1^2 z_2 + a_{12} z_1 z_2^2 + a_{03} z_2^3 \\ &\quad + ah_{00} z_h + ah_{20} z_1^2 z_h + ah_{11} z_1 z_2 z_h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ ah_{02} z_2^2 z_h + aht_{00} z_{ht} + aht_{20} z_1^2 z_{ht} \\ &+ aht_{11} z_1 z_2 z_{ht} + aht_{02} z_2^2 z_{ht}, \\ \dot{z}_2 &= -\beta z_1 + b_{30} z_1^3 + b_{21} z_1^2 z_2 + b_{21} z_1 z_2^2 + b_{03} z_2^3 \\ &+ bh_{00} z_h + bh_{20} z_1^2 z_h + bh_{11} z_1 z_2 z_h \\ &+ bh_{02} z_2^2 z_h + bht_{00} z_{ht} + bht_{20} z_1^2 z_{ht} \\ &+ bht_{11} z_1 z_2 z_{ht} + bht_{02} z_2^2 z_{ht}, \end{aligned} \quad (26)$$

其中 $a_{jk}, ah_{jk}, aht_{jk}, b_{jk}, bh_{jk}, bht_{jk}$ 为已知参数, $j, k = 0, \dots, 3$. (26) 式描述了系统的二维中心流形, 该规范型在降低系统 (2) 的维数的同时, 保留了系统在平衡点附近的局部动态特性^[8,9,12,13,16], 因此下面的分析以该规范型为研究对象, 讨论磁浮系统在轨道

激励下在平衡点附近的响应问题。

4. 基于 B-E 梁的轨道弹性的描述

轨道不平顺主要是由轨道弹性引起的。根据文献 [1—3] 将轨道简化成两端简支的 B-E 梁,则在轨道上任意一点 x 的变形满足

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + c \frac{\partial y}{\partial t} + \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F(x, t), \quad (27)$$

式中 EJ 为梁的垂向抗弯刚度, c 为结构阻尼, ρ 为梁的线密度, x 表示轨道梁上距原点的位移量, y 表示 x 处梁的垂向变形量, $F(x, t)$ 为作用在轨道上的力。

B-E 梁挠度的求解一般采用模态分析法,它的垂向挠度表示为

$$z_h \approx \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{2}{m_k}} \sin \frac{i\pi x}{L} q_k, \quad (28)$$

将其代入(27)式,并沿梁跨长积分,由此可将(27)式简化为关于时间的二阶微分方程

$$\ddot{q}_k + 2\xi_k \omega_k \dot{q}_k + \omega_k^2 q_k = p_k(t), \quad k = 1-n, \quad (29)$$

其中, q_k 为广义坐标, m_k 为轨道质量, L 表示轨道梁长度, ξ_k, ω_k 为常数。易知(29)式的解是简谐的,本文重点研究轨道扰动对系统的影响,为了简化分析,取(28)式的一阶模态近似,将其简化成余弦函数的形式,即令 $z_h = Z \cos(\Omega t)$, Z 为扰动幅值, Ω 为扰动频率。对轨道振动的研究将另文讨论。

前面已经指出指出,若时滞 τ 取值在临界值附近,系统可能出现不稳定的周期运动,运动频率为自然频率 β 。下面基于扰动技术和多尺度法^[17]对 1:3 亚谐共振情况进行研究。

5. 基于多尺度法的亚谐共振分析

5.1. 亚谐共振周期解

我们研究的周期解是从静平衡态产生的,因此可以重新标度 $z_1 \rightarrow \varepsilon^{1/2} z_1, z_2 \rightarrow \varepsilon^{1/2} z_2, z_h \rightarrow \varepsilon^{1/2} z_h, \rho < \varepsilon \ll 1$ 。(26)式可以写成

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \beta z_2 + ah_{00} z_h + aht_{00} z_{h\tau} + \varepsilon f_{11}(z_1, z_2, z_h, z_{h\tau}), \\ \dot{z}_2 &= -\beta z_1 + bh_{00} z_h + bht_{00} z_{h\tau} + \varepsilon f_{21}(z_1, z_2, z_h, z_{h\tau}), \end{aligned} \quad (30)$$

其中

$$\begin{aligned} f_{11}(z_1, z_2, z_h, z_{h\tau}) &= a_{30} z_1^3 + a_{21} z_1^2 z_2 + a_{12} z_1 z_2^2 \\ &+ a_{03} z_2^3 + ah_{20} z_1^2 z_h + ah_{11} z_1 z_2 z_h \\ &+ ah_{02} z_2^2 z_h + aht_{20} z_1^2 z_{h\tau} \\ &+ aht_{11} z_1 z_2 z_{h\tau} + aht_{02} z_2^2 z_{h\tau}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{21}(z_1, z_2, z_h, z_{h\tau}) &= b_{30} z_1^3 + b_{21} z_1^2 z_2 + b_{21} z_1 z_2^2 \\ &+ b_{03} z_2^3 + bh_{20} z_1^2 z_h + bh_{11} z_1 z_2 z_h \\ &+ bh_{02} z_2^2 z_h + bht_{20} z_1^2 z_{h\tau} \\ &+ bht_{11} z_1 z_2 z_{h\tau} + bht_{02} z_2^2 z_{h\tau}. \end{aligned}$$

为了用多尺度法分析问题,引入不同的时间变量 $T_k = \varepsilon^k t$ ($k = 0, 1, 2, \dots$),此时,关于 t 的导数变成关于 T_k 的偏导数的展开式,即

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \frac{dT_0}{dt} \frac{\partial}{\partial T_0} + \frac{dT_1}{dt} \frac{\partial}{\partial T_1} + \dots \\ &= D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots, \\ \frac{d^2}{dt^2} &= D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \end{aligned} \quad (31)$$

将所求解设为

$$z_i(t; \varepsilon) = z_{i0}(T_0, T_1, T_2, \dots) + \varepsilon z_{i1}(T_0, T_1, T_2, \dots), \quad (32)$$

将(31)(32)式代入(30)式,比较 ε 同次幂的系数,并取一阶近似,得到

$$\varepsilon^0: \quad D_0 z_{10} = \beta z_{20} + ah_{00} z_h + aht_{00} z_{h\tau}, \quad (33)$$

$$D_0 z_{20} = -\beta z_{10} + bh_{00} z_h + bht_{00} z_{h\tau}, \quad (34)$$

$$\varepsilon^1: \quad D_1 z_{10} + D_0 z_{11} = \beta z_{21} + f_{12}(z_{10}, z_{20}, z_h, z_{h\tau}), \quad (35)$$

$$D_1 z_{20} + D_0 z_{21} = -\beta z_{11} + f_{22}(z_{10}, z_{20}, z_h, z_{h\tau}) \quad (36)$$

其中

$$\begin{aligned} f_{12}(z_{10}, z_{20}, z_h, z_{h\tau}) &= a_{30} z_{10}^3 + a_{21} z_{10}^2 z_{20} + a_{12} z_{10} z_{20}^2 \\ &+ a_{03} z_{20}^3 + ah_{20} z_{10}^2 z_h + ah_{11} z_{10} z_{20} z_h \\ &+ ah_{02} z_{20}^2 z_h + aht_{20} z_{10}^2 z_{h\tau} \\ &+ aht_{11} z_{10} z_{20} z_{h\tau} + aht_{02} z_{20}^2 z_{h\tau}, \\ f_{22}(z_{10}, z_{20}, z_h, z_{h\tau}) &= b_{30} z_{10}^3 + b_{21} z_{10}^2 z_{20} + b_{12} z_{10} z_{20}^2 \\ &+ b_{03} z_{20}^3 + bh_{20} z_{10}^2 z_h + bh_{11} z_{10} z_{20} z_h \\ &+ bh_{02} z_{20}^2 z_h + bht_{20} z_{10}^2 z_{h\tau} \\ &+ bht_{11} z_{10} z_{20} z_{h\tau} + bht_{02} z_{20}^2 z_{h\tau}, \end{aligned}$$

$$z_h = Z \cos(\Omega T_0),$$

$$z_{h\tau} = Z \cos(\Omega T_0 - \Omega \tau).$$

观察(35)(36)式不难发现,取一阶近似以后,车轨

共振问题即是受迫振动问题,又受参数激励的影响.

将 z_h, z_{hc} 表示成复数形式有

$$z_h = \frac{1}{2} Z(\exp(i\Omega T_0) + \exp(-i\Omega T_0)),$$

$$z_{hc} = \frac{1}{2} Z(\exp(i\Omega(T_0 - \tau)) + \exp(-i\Omega(T_0 - \tau))). \quad (37)$$

(33)(34)式对 T_0 求微分,并将(35)(36)式代入,得到

$$D_0^2 z_{10} + \beta^2 z_{10} = \beta b h_{00} z_h + \beta b h_{00} z_{hc} + a h_{00} D_0 z_h + a h_{00} D_0 z_{hc}, \quad (38)$$

$$D_0^2 z_{11} + \beta^2 z_{11} = -D_0 D_1 z_{10} - \beta D_1 z_{20} + \beta f_{22} + D_0 f_{12}. \quad (39)$$

(38)(39)式的解可以写成

$$z_{10} = A(T_1) \exp(i\beta T_0) + \bar{A}(T_1) \exp(-i\beta T_0) + \Lambda_1 \exp(i\Omega T_0) + \bar{\Lambda}_1 \exp(-i\Omega T_0) + \Lambda_2 \exp(i\Omega(T_0 - \tau)) + \bar{\Lambda}_2 \exp(-i\Omega(T_0 - \tau)), \quad (40)$$

$$z_{20} = \frac{1}{\beta} (i\beta A(T_1) \exp(i\beta T_0) - i\beta \bar{A}(T_1) \exp(-i\beta T_0) + i\Lambda_1 \Omega \exp(i\Omega T_0) - i\bar{\Lambda}_1 \Omega \exp(-i\Omega T_0) + i\Lambda_2 \Omega \exp(i\Omega(T_0 - \tau)) - i\bar{\Lambda}_2 \Omega \exp(-i\Omega(T_0 - \tau)) - \frac{1}{2} Z a h_{00} (\exp(i\Omega T_0) + \exp(-i\Omega T_0)) - \frac{1}{2} Z a h_{00} (\exp(i\Omega(T_0 - \tau)) + \exp(-i\Omega(T_0 - \tau))), \quad (41)$$

其中

$$\Lambda_1 = \frac{1}{2} Z \frac{\beta b h_{00} + i\Omega a h_{00}}{\beta^2 - \Omega^2},$$

$$\Lambda_2 = \frac{1}{2} Z \frac{\beta b h_{00} + i\Omega a h_{00}}{\beta^2 - \Omega^2},$$

A 为自由振动的幅值, \bar{A} 表示 A 的共轭复数.

将(40)(41)式代入(39)式后得到

$$D_0^2 z_{11} + \beta^2 z_{11} = -2i\beta \frac{dA(T_1)}{dT_1} e^{i\beta T_0} + ddA^2 \bar{A} e^{i\beta T_0} + eeA e^{i\beta T_0} + ff\bar{A}^2 e^{(\Omega - 2\beta)T_0} + gg\bar{A}^2 e^{(\Omega - 2\beta)T_0 - i\Omega\tau} + cc + NST, \quad (42)$$

其中, NST 为不产生长期项的项, cc 为共轭项, dd, ee, ff, gg 由附录 B 给出.

本研究亚谐共振问题,令 $\Omega = 3\beta + \varepsilon\sigma$, 其中

σ 为调谐参数. $(\Omega - 2\beta)T_0$ 可以表示成

$$(\Omega - 2\beta)T_0 = \beta T_0 + \varepsilon\sigma T_0 = \beta T_0 + \sigma T_1. \quad (43)$$

为了消除长期项,应有

$$-2i\beta \frac{dA(T_1)}{dT_1} + ddA^2 \bar{A} + eeA + ff\bar{A}^2 e^{i\sigma T_1} + gg\bar{A}^2 e^{(\sigma T_1 - 3\beta\tau + \sigma\tau_1)} = 0, \quad (44)$$

其中 $\tau_1 = \varepsilon\tau$. 令 $A(T_1) = \frac{1}{2}\rho(T_1) \exp(i\varphi(T_1))$, 代入(44)式有

$$\begin{aligned} & \left(i \frac{d\rho}{dT_1} - \rho \frac{d\varphi}{dT_1} \right) e^{i\varphi} \\ &= (r_1 + i_1 i) \frac{\rho^3}{8} e^{i\varphi} + (r_2 + i_2 i) \frac{\rho}{2} e^{i\varphi} \\ &+ (r_3 + i_3 i) \frac{\rho^2}{4} e^{(\sigma T_1 - 2\varphi)} \\ &+ (r_4 + i_4 i) \frac{\rho^2}{4} e^{(\sigma T_1 - 3\beta\tau - \sigma\tau_1 - 2\varphi)}. \end{aligned} \quad (45)$$

这里 $r_1 - r_4, i_1 - i_4$ 由附录 B 给出.

提取实部和虚部,得到

$$\begin{aligned} D_1 \rho &= \frac{i_1}{8} \rho^3 + \frac{\rho^2}{4} (r_3 \sin \gamma + i_3 \cos \gamma + r_4 \sin(\gamma - 3\beta\tau - \sigma\tau_1) + i_4 \cos(\gamma - 3\beta\tau - \sigma\tau_1)) + \frac{i_2}{2} \rho \\ &= \frac{i_1}{8} \rho^3 + \frac{\rho^2}{4} (r_s \sin \gamma + r_c \cos \gamma) + \frac{i_2}{2} \rho, \\ D_1 \gamma &= \frac{3r_1}{8} \rho^2 + \frac{3\rho}{4} (r_3 \cos \gamma - i_3 \sin \gamma + r_4 \cos(\gamma - 3\beta\tau - \sigma\tau_1) - i_4 \sin(\gamma - 3\beta\tau - \sigma\tau_1)) + \frac{3r_2}{2} + \sigma \\ &= \frac{3r_1}{8} \rho^2 + \frac{3\rho}{4} (r_s \cos \gamma - r_c \sin \gamma) + \frac{3r_2}{2} + \sigma, \end{aligned} \quad (46)$$

其中

$$\begin{aligned} r_c &= i_3 + i_4 \cos(3\beta\tau + \varepsilon\sigma\tau) - r_4 \sin(3\beta\tau + \varepsilon\sigma\tau), \\ r_s &= r_3 + r_4 \cos(3\beta\tau + \varepsilon\sigma\tau) + i_4 \sin(3\beta\tau + \varepsilon\sigma\tau), \\ \gamma(T_1) &= \sigma T_1 - 3\varphi(T_1). \end{aligned}$$

根据(46)式,可以得到(26)式在稳态情况下的一次近似亚谐共振周期解

$$\begin{aligned} z_1 &= \rho \cos\left(\beta t - \frac{\gamma}{3}\right) + \xi \cos(\Omega t + \psi_1) \\ &+ \xi_r \cos(\Omega t - \Omega\tau + \psi_2) + O(\varepsilon), \\ z_2 &= -\rho \sin\left(\beta t - \frac{\gamma}{3}\right) - 3\xi \sin(\Omega t + \psi_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -3\xi_\tau \sin(\Omega t - \Omega\tau + \psi_2) - ah_{00} \frac{3Z}{\Omega} \cos(\Omega t) \\
 & - aht_{00} \frac{3Z}{\Omega} \cos(\Omega t - \Omega\tau) + O(\epsilon), \quad (47)
 \end{aligned}$$

这里, $\xi = \frac{Z}{2} \frac{\sqrt{(\beta bh_{00})^2 + (\Omega ah_{00})^2}}{\beta^2 - \Omega^2},$

$$\xi_\tau = \frac{Z}{2} \frac{\sqrt{(\beta bht_{00})^2 + (\Omega aht_{00})^2}}{\beta^2 - \Omega^2},$$

$$\psi_1 = \arctan\left(\frac{\Omega ah_{00}}{\beta bh_{00}}\right),$$

$$\psi_2 = \arctan\left(\frac{\Omega aht_{00}}{\beta bht_{00}}\right).$$

可见,周期解既包含频率为 β 的自由振动项,又有频率为 Ω 的受迫振动. 另外由于位置信号时滞的存在, z_1 的受迫振动分成两部分,它们的振动频率相同,但幅值和相位受系统参数的影响.

5.2. 自由振动项的存在条件

为了确定对应稳态运动的非零定常解振幅 ρ_s 和相位 γ_s , 令上式中的 $D_1 \rho = 0, D_1 \gamma = 0$. 得到

$$\begin{aligned}
 \sin \gamma_s &= \frac{(-9i_1 r_s + 3r_c r_1) \rho_s^2 + 12r_c r_2 + 8r_c \sigma - 12i_2 r_s}{6\rho_s (r_s^2 + r_c^2)}, \\
 \cos \gamma_s &= -\frac{(9r_c i_1 + 3r_s r_1) \rho_s^2 + 12r_s r_2 + 8r_s \sigma + 12r_c i_2}{6\rho_s (r_s^2 + r_c^2)}, \quad (48)
 \end{aligned}$$

(48) 式中两式平方并求和, 消去 γ_s , 得到自由振动的分岔方程, 也称为频率响应方程

$$\rho_s^4 + c_1 \rho_s^2 + c_2 = 0, \quad (49)$$

其中

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \frac{4(-3r_s^2 + 6r_1 r_2 + 18i_1 i_2 + 4r_1 \sigma - 3r_c^2)}{3(r_1^2 + bi_1^2)}, \\
 c_2 &= \frac{16(12r_2 \sigma + 9r_2^2 + 9i_2^2 + 4\sigma^2)}{9(r_1^2 + bi_1^2)}.
 \end{aligned}$$

解(49)式, 得到

$$\rho_s^2 = \frac{-c_1 \pm \sqrt{c_1^2 - 4c_2}}{2}. \quad (50)$$

由(48)式可以得到 ρ_s 与 γ_s 的关系.

$$\tan \gamma_s = -\frac{(-9i_1 r_s + 3r_c r_1) \rho_s^2 + 12r_c r_2 + 8r_c \sigma - 12i_2 r_s}{(9r_c i_1 + 3r_s r_1) \rho_s^2 + 12r_s r_2 + 8r_s \sigma + 12r_c i_2}. \quad (51)$$

由(49)式易知 $c_2 > 0$, 若使(51)式中得到的 $\rho_s^2 > 0$, 则仅当 $c_1 < 0$ 且 $c_1^2 \geq 4c_2$ 时, 非平凡自由振动幅值才存在, 这要求

$$d_1 \sigma^2 + d_2 \sigma + d_3 \leq 0, \quad (52)$$

$$\sigma < \frac{1}{4|r_1|} (3(r_s^2 + r_c^2) - 6r_1 r_2 - 18i_1 i_2), \quad r_1 > 0,$$

$$\sigma > -\frac{1}{4|r_1|} (3(r_s^2 + r_c^2) - 6r_1 r_2 - 18i_1 i_2), \quad r_1 < 0, \quad (53)$$

其中

$$d_1 = \frac{256i_1^2}{(r_1^2 + 9i_1^2)^2},$$

$$d_2 = \frac{128}{3(r_1^2 + 9i_1^2)^2} (r_s^2 r_1 + r_c^2 r_1 - 6r_1 i_1 i_2 + 18r_2 i_1^2),$$

$$\begin{aligned}
 d_3 &= -\frac{16}{(r_1^2 + 9i_1^2)^2} (-2r_s^2 r_c^2 - r_s^4 - r_c^4 \\
 &+ 4r_s^2 r_1 r_2 + 4r_c^2 r_1 r_2 + 12r_c^2 i_1 i_2 \\
 &+ 12r_s^2 i_1 i_2 + 36r_2^2 i_1^2 - 24r_1 r_2 i_1 i_2 + 4i_2^2 r_1^2).
 \end{aligned}$$

(52)(53)两式的交集即为非平凡自由振动幅值的存在区间, 通过求解(52)式和(53)式, 可以判断亚谐共振周期解中是否存在自由振动项.

6. 自由振动的稳定性和 Hopf 分岔

为了便于确定定常解的稳定性, 需要把平均方程(46)从极坐标形式变换为直角坐标形式的平均方程^[7]. 令方程(44)式中的 $A(T_1) = (u(T_1) + i v(T_1))e^{i\omega T_1/3}$, $u(T_1), v(T_1)$ 为 T_1 的实函数. 此时可以得到平均方程的直角坐标形式

$$\begin{aligned}
 D_1 u &= \frac{1}{2} (r_2 v + r_1 u^2 v + i_1 v^2 u - 2r_3 uv - i_3 v^2 \\
 &+ i_3 u^2 + i_2 u + \frac{2}{3} \sigma v + u^3 i_1 + r_1 v^3 \\
 &+ \sin(-3\beta\tau + \sigma\tau_1) \\
 &\times (r_4 u^2 - r_4 v^2 + 2i_4 uv) \\
 &+ \cos(-3\beta\tau + \sigma\tau_1) \\
 &\times (i_4 u^2 - i_4 v^2 - 2r_4 uv)),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_1 v &= \frac{1}{2} (-2i_3 uv - r_3 u^2 - r_2 u - r_1 u^3 - r_1 uv^2 \\
 &+ i_1 u^2 v + i_2 v - \frac{2}{3} \sigma u + r_3 v^2 + i_1 v^3 \\
 &+ \sin(-3\beta\tau + \sigma\tau_1) \\
 &\times (i_4 u^2 - i_4 v^2 - 2r_4 uv) \\
 &+ \cos(-3\beta\tau + \sigma\tau_1) \\
 &\times (-r_4 u^2 + r_4 v^2 - 2i_4 uv)). \quad (54)
 \end{aligned}$$

将方程组(54)在非零平衡点 (u_s, v_s) 处线性

化,形成关于 Δu 和 Δv 的自治微分方程.

$$\begin{aligned}
 D_1 \Delta u &= \frac{1}{2} \left(2r_1 u_s v_s + i_1 r_s^2 - 2r_3 v_s + 2i_3 u_s + i_2 \right. \\
 &\quad \left. 3u_s^2 i_1 + \sin(-3\beta\tau + \sigma\tau_1) (2r_4 u_s + 2i_4 v_s) \right. \\
 &\quad \left. + \cos(-3\beta\tau + \sigma\tau_1) (2i_4 u_s - 2r_4 v_s) \right) \Delta u \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \sigma + r_2 - 2i_3 v_s + 3r_1 v_s^2 \right. \\
 &\quad \left. - 2r_3 u_s + r_1 u_s^2 + 2i_1 u_s v_s \right. \\
 &\quad \left. + \sin(-3\beta\tau + \sigma\tau_1) (-2r_4 v_s + 2i_4 u_s) \right. \\
 &\quad \left. + \cos(-3\beta\tau + \sigma\tau_1) (-2i_4 v_s - 2r_4 u_s) \right) \Delta v, \\
 D_1 \Delta v &= \frac{1}{2} \left(-2i_c v_s - 3r_1 u_s^2 - r_2 - 2r_3 u_s + 2i_1 u_s v_s \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2}{3} \sigma - r_1 v_s^2 + \sin(-3\beta\tau + \sigma\tau_1) (2i_4 u_s - 2r_4 v_s) \right. \\
 &\quad \left. - \cos(-3\beta\tau + \sigma\tau_1) (2r_4 u_s + 2i_4 v_s) \right) \Delta u \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(-2i_3 u_s + i_1 u_s^2 - 2r_1 u_s v_s + 2r_3 v_s + 3i_1 v_s^2 \right. \\
 &\quad \left. + i_2 - \sin(-3\beta\tau + \sigma\tau_1) (2i_4 v_s + 2r_4 u_s) \right. \\
 &\quad \left. + \cos(-3\beta\tau + \sigma\tau_1) (2r_4 v_s - 2i_4 u_s) \right) \Delta v. \quad (55)
 \end{aligned}$$

对应的特征方程为

$$\lambda^2 + e_1 \lambda + e_2 = 0, \quad (56)$$

其中,

$$\begin{aligned}
 e_1 &= -2i_1 v_s^2 - 2u_s^2 i_1 - i_2, \\
 e_2 &= \frac{3}{2} r_1^2 u_s^2 v_s^2 + r_1 r_2 v_s^2 + \frac{2}{3} r_1 v_s^2 \sigma - 3r_1 i_3 u_s^2 v_s \\
 &\quad + 3r_1 u_s v_s^2 r_3 + 3i_1 v_s^2 i_3 u_s + 3i_1 u_s^2 r_3 v_s + \frac{3}{2} i_1^2 v_s^2 u_s^2 \\
 &\quad + i_1 i_2 v_s^2 - i_3^2 v_s^2 + \frac{3}{4} r_1^2 v_s^4 - i_1 v_s^3 r_3 - i_3 u_s^3 i_1 \\
 &\quad + i_2 i_1 u_s^2 - r_1 u_s^3 r_3 + i_3 v_s^3 r_1 + r_1 u_s^2 r_2 + \frac{2}{3} r_1 u_s^2 \sigma \\
 &\quad + \frac{3}{4} i_1^2 v_s^4 - i_3^2 u_s^2 + \frac{i_2^2}{4} + \frac{3}{4} i_1^2 u_s^4 \\
 &\quad - r_3^2 v_s^2 + \frac{3}{4} r_1^2 u_s^4 + \frac{r_2^2}{4} + \frac{r_2 \sigma}{3} \\
 &\quad + \frac{\sigma^2}{9} - r_3^2 u_s^2 - i_4^2 v_s^2 - r_4^2 u_s^2 - r_4^2 v_s^2 - i_4^2 u_s^2 \\
 &\quad + \sin(-3\beta\tau + \sigma\tau_1) (i_1 v_s^3 i_4 - 2i_3 u_s^2 r_4 - i_1 u_s^3 r_4 \\
 &\quad + 2i_4 v_s^2 r_3 - 3r_1 u_s v_s^2 i_4 - 3r_1 u_s^2 v_s r_4 + 3i_1 v_s^2 r_4 u_s \\
 &\quad - 3i_1 u_s^2 i_4 v_s + r_1 u_s^3 i_4 - 2i_3 v_s^2 r_4 + r_1 v_s^3 r_4 + 2i_4 u_s^2 r_3) \\
 &\quad + \cos(-3\beta\tau + \sigma\tau_1) (-i_1 v_s^3 r_4 - 2i_3 u_s^2 i_4 \\
 &\quad - i_1 u_s^3 i_4 - 2r_4 v_s^2 r_3 - r_1 u_s^3 r_4 - 2i_3 v_s^2 i_4 \\
 &\quad + r_1 v_s^3 i_4 - 2r_4 u_s^2 r_3 + 3r_1 u_s v_s^2 r_4 - 3r_1 u_s^2 v_s i_4
 \end{aligned}$$

$$+ 3i_1 v_s^2 i_4 u_s + 3i_1 u_s^2 r_4 v_s).$$

由(56)式易知(54)式非零解的稳定性条件为

$$e_1 > 0, e_2 > 0. \quad (57)$$

当(57)式成立时,自由振动才是稳定的.(56)式的解可以写成

$$\lambda_{1,2} = \frac{-d_3 \pm \sqrt{d_3^2 - 4d_4}}{2} = \zeta_r + i\zeta_i. \quad (58)$$

下列情况下(54)式的平凡解可能失去稳定性:

1)实特征根沿实轴穿越虚轴,到达右半平面,此时系统出现叉形分岔,即从零解分岔出两个非零解;2)一对纯虚特征根穿越虚轴到达右半平面,该情况下系统出现 Hopf 分岔^[16].显然,在模型固定的情况下, ζ_r 和 ζ_i 的取值由时滞 τ 和控制参数 k_p, k_d, k_a 决定.因此可以通过调节时滞参数和控制参数来控制 and 改变 Hopf 的出现.

7. 亚谐共振响应的数值分析

为了验证上面的分析结果,令系统参数 $N = 320, R = 0.5 \Omega, m = 500 \text{ kg}, \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}, z_e = 0.008 \text{ m}, S = 0.047 \text{ m}^2, k_p = 2000, k_d = 200, k_a = 10$. 时滞 τ 作为分岔参数.观察(2)式发现它仅存在平凡解,根据(7)(8)式可知, $\beta_0 = 7.30709, \tau_0 = 0.101683$ 时,出现 Hopf 分岔.下面根据前面的分析结果,分别从自由振动和受迫振动两个方面进行数值仿真.

7.1. 自由振动项的数值分析

5.2 中的分析给出了自由振动的存在性条件,令 $\tau = 0.02 \text{ s}$,激励幅值 Z 在 $(0, 0.0021] \text{ m}$ 间变化,根据(52)和(53)式分别计算出 σ 的范围,发现两取值范围不存在交集,也就是说在该组系统参数下自由振动不存在.变化速度时滞 τ 和控制参数 k_p, k_d, k_a 得到相同的结果.图1给出了亚谐激励下系统(1)稳态响应的频谱图,图1中的曲线1和2分别取不同的系统参数和外激励幅值,得到的频谱图显示系统仅存在频率为 $\Omega = 3\beta_0 = 21.9213 \text{ rad}$ 的周期响应,不含其他的频率成分,这验证了5.2中的分析结果.

7.2. 受迫振动项的数值分析

(47)式给出了受迫振动幅值的表达式.受迫振动除与外激励相关外,还受系统参数的影响.了解

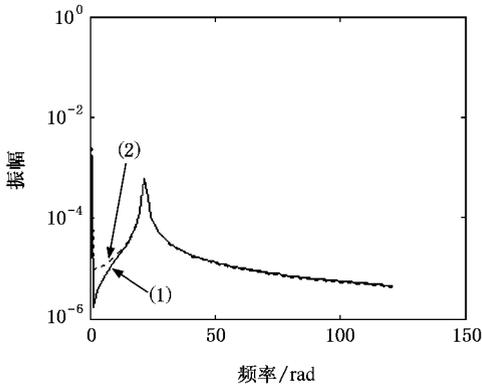


图 1 磁浮系统 1 3 亚谐振动响应频谱图. (1) $\tau = 0.02$ s, $k_p = 2000$, $k_d = 200$, $k_a = 10$, $Z = 0.001$ m (2) $\tau = 0.04$ s, $k_p = 2500$, $k_d = 250$, $k_a = 15$, $Z = 0.0015$ m

时滞和控制参数对系统响应的影响在工程实验中有重要意义, 而由中心流形的推导过程可知, 解析的研究它们间的关系极为困难, 这里我们仅给出数值仿真的结果. 图 2 给出了 ξ , ξ_τ 与 τ 和控制参数的对应关系, 此时轨道扰动频率 $\Omega = 21.9213$ rad. 图 2(a) 中, 振动幅值的绝对值随时滞的增加而减小; 随着

k_p 的增加, ξ_τ 的绝对值增加明显, 而 ξ 的变化极为微弱, 可以忽略不计; k_d 越大, 受迫振动幅值越大; 随着 k_a 的增加, 受迫振动幅值随之减小.

7.3. 试验模型数值仿真

前面已经指出, 若控制时滞大于临界值 τ_0 , 系统出现不稳定的周期运动. 解析的研究时滞与受迫振动稳定性的关系比较困难, 因此我们通过对试验模型(1)的数值仿真来讨论这一关系.

采用前面的系统参数, 令轨道扰动 $z_h = 0.001 \cos(21.9213 t)$, 图 3 给出了时滞 τ 取不同值时(1)式所描述物理系统的 Poincaré 截面和相轨迹, 系统稳定悬浮于 0.008 m 处, 受轨道和结构约束, 悬浮间隙在 $[0.0005, 0.017]$ m 间变化, 采用四阶龙格-库塔法计算微分方程的数值解. 图 3 中的(a)(c)为 Poincaré 截面, 对应的时滞分别为 $\tau = 0.085$ 和 $\tau = 0.08$, (b)(d) 则为对应的相轨迹, x 轴表示悬浮间隙 z_a , y 轴为间隙变化 \dot{z}_a . 仿真的过程中发现在亚谐轨道扰动的作用下, 使磁浮系统保持稳定的受迫振

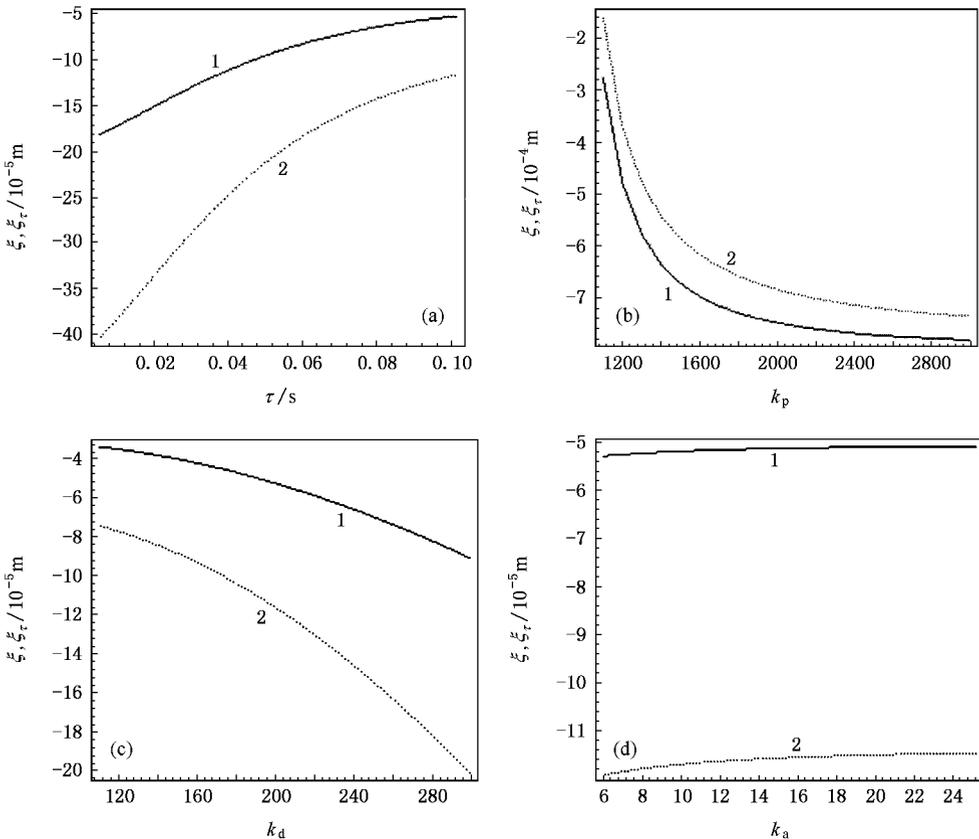


图 2 时滞和控制参数与受迫振动幅值的对应关系(1) ξ (2) ξ_τ . (a) $k_p = 2000$, $k_d = 200$, $k_a = 10$ (b) $\tau = 0.02$, $k_d = 200$, $k_a = 10$ (c) $\tau = 0.02$, $k_p = 2000$, $k_a = 10$ (d) $\tau = 0.02$, $k_d = 200$, $k_a = 10$

动的时滞边界 τ_d 小于无扰动作用时的时滞边界 τ_c .

观察图 3(a)(b)可知,若控制时滞 $\tau = 0.08 < \tau_d$, Poincaré 截面由多周期运动沿确定的轨道慢慢收敛于一点,系统稳定于单周期运动,这再次验证了 5.2 和 7.1 中的分析结果. 而由(c)(d)可知此时 τ

$= 0.085 \geq \tau_d$, 若时滞量 τ 大于临界值,较小的扰动幅值就有可能导致系统的亚谐周期受迫振动失稳,(c)的 Poincaré 截面为非封闭曲线,说明此时系统出现混沌现象. 因此通过调节控制时滞不但可以抑制亚谐振动的响应幅值,还能够控制混沌现象的出现.

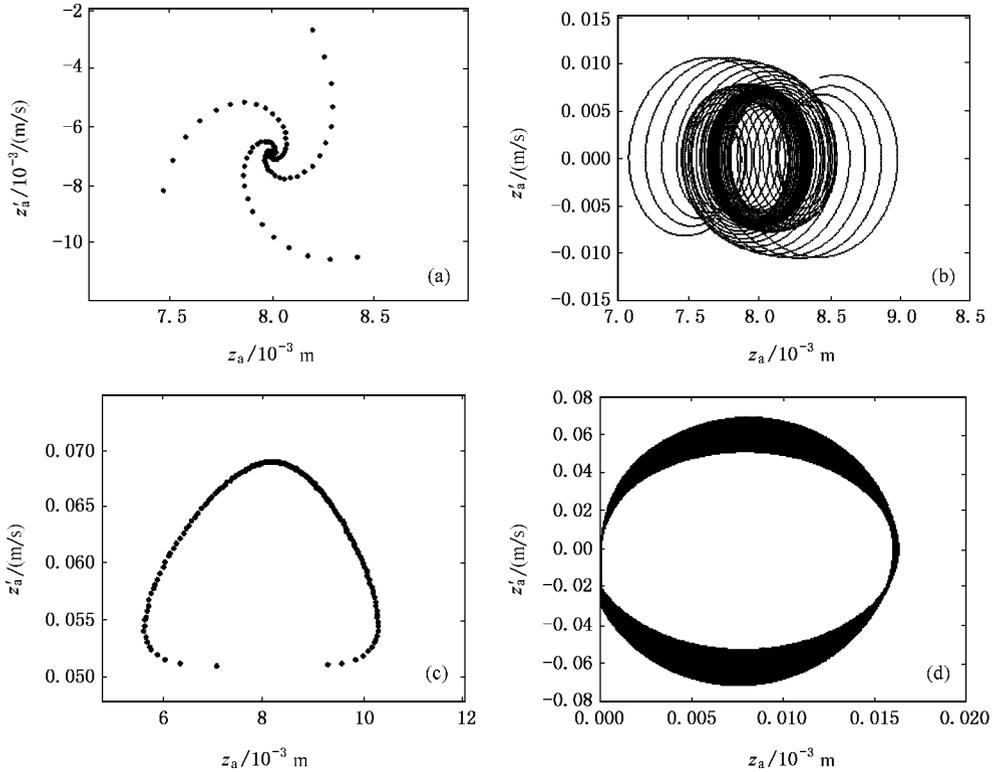


图 3 不同控制时滞条件下磁浮系统在亚谐激励作用下的响应

8. 结 论

给出了弹性轨道上单点磁浮系统的动力学模型,将系统方程在平衡点附近线性化,讨论了线性化系统由控制时滞引起的 Hopf 分岔现象,指出若时滞超过临界值,会出现 Hopf 分岔. 运用中心流形理论将高阶非线性系统约化到中心流形上,得到了仅含立方项和轨道扰动的 Poincaré 规范型. 运用多尺度法对 Poincaré 规范型进行研究,得到了系统一阶近似亚谐共振周期解的分岔方程,得到了自由振动的存在和分岔条件. 因为中心流形约化得到的 Poincaré 规范型解析表达式极为复杂,本文用数值仿真的方法研究了时滞和控制参数对系统亚谐共振周期解中的受迫振动的影响,这对工程试验有重要价值. 研究表明,适当的选择时滞不但可以改变亚谐共振的响应幅值,还能够控制混沌的出现,而调

节控制参数可以有效抑制亚谐共振响应,抑制车轨共振现象可以从两方面着手,一是改变轨道结构增加轨道刚度,这是一种有效的方法,但代价昂贵,不利于工程应用,另一种方法是调整磁浮系统带宽,只需要改变控制参数,上面的分析指出了调节方式. 这些分析为进一步了解车轨共振的动力学特性提供参考.

附录 A

(19)式满足正规化条件的定常解如下:

$$n_{13} = \frac{4\beta^2 + 2\sqrt{g}A_3 k_p \left(\tau \cos(\beta\tau) - \frac{\sin(\beta\tau)}{\beta} \right)}{B},$$

$$n_{23} = \frac{4\beta(A_2 z_c + \sqrt{g}A_3 k_u) + 2\sqrt{g}A_3 k_p \tau \sin(\beta\tau)}{B},$$

$$B = - \left[2\beta^2 + \sqrt{g}A_3 k_p \left(\tau \cos(\beta\tau) - \frac{\sin(\beta\tau)}{\beta} \right) \right]$$

$$\begin{aligned} & \times \left[2\sqrt{g}A_3 k_d - 4\beta^2 - \sqrt{g}A_3 k_p \right. \\ & \times \left(\tau \cos(\beta\tau) + \frac{\sin(\beta\tau)}{\beta} \right) \left. \right] \\ & + \left[\sqrt{g}A_3 k_p \tau \sin(\beta\tau) + 2\beta(A_2 z_e + \sqrt{g}A_3 k_a) \right]^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}_1(z_1, z_2) = & \left(\frac{\beta^4 A_3 k_a}{2\sqrt{g}} + 2\beta^2 A_2 - \frac{\beta^2 A_3 k_p}{2\sqrt{g}} \right) z_1^2 \\ & - \frac{\beta^3 A_3 k_d}{2\sqrt{g}} z_1 z_2 + \frac{\beta^5 A_3 k_d}{8\sqrt{g^3}} z_1^2 z_2 \\ & + \left(\frac{\beta^4 A_3 k_p}{8\sqrt{g^3}} - \frac{\beta^6 A_3 k_d}{8\sqrt{g^3}} \right) z_1^3, \end{aligned}$$

Poincaré 规范型 (20)–(22) 式中 $\tilde{g}_1(z_1, z_2)$,

$\tilde{g}_2(z_1, z_2, w_1, w_2, w_3)$ 的表达式如下:

$$\begin{aligned} \tilde{g}_2(z_1, z_2, z_h, w_1, w_2, w_3) = & 2\beta^2 A_2 w_1(0) z_1 - \frac{\beta^2 A_3 k_d}{2\sqrt{g}} w_2(0) z_1 + \left(\frac{A_3 k_p}{2\sqrt{g}} - \frac{\beta^2 A_3 k_a}{\sqrt{g}} - 2A_2 \right) w_3(0) z_1 \\ & + \frac{\beta A_3 k_d}{2\sqrt{g}} w_3(0) z_2 - \frac{\beta^2 A_3 k_p}{2\sqrt{g}} w_1(-\tau) z_1 + gA_2 z_h + 2A_2 w_3(0) z_h - 2\beta^2 A_2 z_1 z_h \\ & - \sqrt{g}A_3 k_p z_{h\tau} - \frac{A_3 k_p}{2\sqrt{g}} w_3(0) z_{h\tau} + \frac{\beta^2 A_3 k_p}{2\sqrt{g}} z_1 z_{h\tau} - \frac{\beta^4 A_3 k_p}{8\sqrt{g^3}} z_1^2 z_{h\tau}. \end{aligned}$$

附录 B

(42) 式中 dd, ee, ff, gg 的表达式如下:

$$\begin{aligned} dd = & 3\beta b_{30} + \beta b_{12} - \beta a_{21} - 3\beta a_{03} + i\beta a_{12} + 3i\beta b_{03} + i\beta b_{21} + 3i\beta a_{30}, \\ ee = & 6i\beta(\Lambda_1 \bar{\Lambda}_1 - \Lambda_2 \bar{\Lambda}_2) a_{30} + (2\beta\Lambda_2 \bar{\Lambda}_2 - 2\beta\Lambda_1 \bar{\Lambda}_1 + 4\Lambda_2 \bar{\Lambda}_2 \Omega - i\bar{\Lambda}_1 Zah_{00} - i\bar{\Lambda}_2 Z aht_{00} + i\bar{\Lambda}_2 Z aht_{00} \\ & - i\bar{\Lambda}_1 Zah_{00}) a_{21} + \frac{a_{12}}{2\beta}(4i\Lambda_1 \bar{\Lambda}_1 \Omega^2 + 8i\Lambda_2 \bar{\Lambda}_2 \Omega\beta + 4i\Lambda_2 \bar{\Lambda}_2 \Omega^2 + 2\bar{\Lambda}_1 Zah_{00}\beta + 2\Lambda_1 \Omega Zah_{00} + 2\Lambda_2 \Omega Z aht_{00} \\ & - 2\bar{\Lambda}_2 Z \Omega aht_{00} - 2\bar{\Lambda}_1 \Omega Zah_{00} + iZ^2 aht_{00}^2 + iZ^2 aht_{00}^2 + 2\bar{\Lambda}_1 Zah_{00}\beta + 2\Lambda_2 \Omega Z aht_{00} + 2\bar{\Lambda}_2 Z aht_{00}\beta) \\ & - \frac{3}{2\beta} a_{03}(2i\bar{\Lambda}_2 \Omega Z aht_{00} + 4\Lambda_2 \bar{\Lambda}_2 \Omega^2 + Z^2 aht_{00}^2 + Z^2 aht_{00}^2 + 4\Lambda_1 \bar{\Lambda}_1 \Omega^2 - 2i\Lambda_1 \Omega Zah_{00} \\ & + 2i\bar{\Lambda}_1 \Omega Zah_{00} - 2i\Lambda_2 \Omega Z aht_{00}) + iZ\beta(\Lambda_1 + \bar{\Lambda}_1) aht_{20} - \frac{1}{2} Z(iZah_{00} + \Lambda_1(\beta + \Omega) \\ & + \bar{\Lambda}_1(\beta - \Omega)) aht_{11} + Z(-i\Lambda_1 \Omega + Zah_{00} + i\bar{\Lambda}_1 \Omega) aht_{02} - iZ\beta(\bar{\Lambda}_2 - \Lambda_2) aht_{20} \\ & + \frac{1}{2} Z(-\Lambda_2 \beta + \bar{\Lambda}_2(\beta + \Omega) - \Lambda_2 \Omega - iZ aht_{00}) aht_{11} + Z(i\bar{\Lambda}_2 \Omega - i\Lambda_2 \Omega + A aht_{00}) aht_{02} \\ & + 6\beta(\Lambda_1 \bar{\Lambda}_1 - \Lambda_2 \bar{\Lambda}_2) b_{30} - b_{21}(-2i\beta\Lambda_1 \bar{\Lambda}_1 + 2i\beta\Lambda_2 \bar{\Lambda}_2 + 4i\Lambda_2 \bar{\Lambda}_2 \Omega + \Lambda_2 Zah_{00} \\ & - \bar{\Lambda}_2 Z aht_{00} + \Lambda_1 Zah_{00} + \bar{\Lambda}_1 Zah_{00}) + \frac{b_{12}}{\beta}(Z^2 aht_{00}^2 + Z^2 aht_{00}^2 - 2i\bar{\Lambda}_1 \beta Zah_{00} + 2i\bar{\Lambda}_2 \beta Z aht_{00} + 8\Lambda_2 \bar{\Lambda}_2 \Omega\beta \\ & + 4\Lambda_2 \bar{\Lambda}_2 \Omega^2 + 4\Lambda_1 \bar{\Lambda}_1 \Omega^2 - 2i\Lambda_1 \Omega Zah_{00} - 2i\Lambda_2 \Omega Z aht_{00} + 2i\bar{\Lambda}_1 \Omega Zah_{00} + 2i\bar{\Lambda}_2 \Omega Z aht_{00} - 2i\Lambda_1 Zah_{00}\beta \\ & - 2i\Lambda_2 Z aht_{00}\beta) + \frac{3}{2\beta} b_{03}(-2\bar{\Lambda}_1 \Omega Zah_{00} + 2\Lambda_1 \Omega Zah_{00} - 2\bar{\Lambda}_2 \Omega Z aht_{00} + 2\Lambda_2 \Omega Z aht_{00} + 4i\bar{\Lambda}_1 \Omega^2 \Lambda_1 \\ & + 4i\Lambda_2 \Omega^2 \bar{\Lambda}_2 + Z^2 aht_{00}^2 i + Z^2 aht_{00}^2 i) + Z\beta(\bar{\Lambda}_1 + \Lambda_1) bh_{20} - \frac{1}{2} Z(-(\Lambda_1 + \bar{\Lambda}_1)\beta i - (\Lambda_1 - \bar{\Lambda}_1)\Omega i \\ & + zah_{00}) bh_{11} - Z(Zah_{00} \Omega - \bar{\Lambda}_1 \Omega + \Lambda_1 \Omega) bh_{02} - Z\beta(\bar{\Lambda}_2 - \Lambda_2) bht_{20} - \frac{1}{2} Z(-\Lambda_2 \beta i - \Lambda_2 \Omega i + Zah_{00} \\ & + \bar{\Lambda}_2(\beta + \Omega)) bht_{11} - Z(iZ aht_{00} - \bar{\Lambda}_2 \Omega + \Lambda_2 \Omega) bht_{02}, \\ ff = & -\frac{1}{2\beta}(a_{21} Zah_{00} \Omega i + a_{h02} Z \Omega \beta i + \beta^2 bh_{02} Z - \beta^2 bh_{02} Z - \beta^2 bh_{20} Z + 8a_{21} \beta^2 \Lambda_1 + 2ah_{11} \beta^2 Z + 2\beta^2 b_{12} \Lambda_1 \\ & - 6\beta^2 b_{30} \Lambda_1 + 2a_{21} \Lambda_1 \Omega^2 - 6a_{03} \Lambda_1 \Omega^2 + i\beta^2 bh_{11} Z - 4ia_{12} \Lambda_1 \Omega^2 - 2iah_{02} \beta^2 Z + 4i\beta^2 b_{21} \Lambda_1 + 12ia_{30} \Lambda_1 \beta^2 \\ & - 4ia_{12} \beta^2 \Lambda_1 + 2iah_{20} Z \beta^2 + 2a_{12} Zah_{00} \Omega - 3b_{03} Zah_{00} \beta + 12a_{03} \Lambda_1 \Omega \beta - 4b_{12} \Lambda_1 \Omega \beta - 8a_{21} \Lambda_1 \Omega \beta \\ & - 4a_{12} Zah_{00} \beta - ah_{11} Z \Omega \beta + b_{21} Zah_{00} \beta - 3ia_{03} Zah_{00} \Omega - 2ib_{21} \Lambda_1 \Omega \beta - 2ia_{21} Zah_{00} \beta + 10ia_{12} \bar{\Lambda}_1 \Omega \beta \\ & + 6ia_{03} Zah_{00} \beta - 6ia_{30} \Lambda_1 \Omega \beta - iah_{20} Z \Omega \beta + 6ib_{03} \Lambda_1 \Omega \beta - 2ib_{12} Zah_{00} \beta), \\ gg = & -\frac{1}{2}(ia_{21} Z aht_{00} \Omega + i\beta^2 bht_{00} Z + 12ia_{30} \Lambda_2 \beta^2 - 4ia_{12} \beta^2 \Lambda_2 + 4i\beta^2 b_{21} \Lambda_2 - 2iaht_{02} \beta^2 Z + 2iaht_{20} Z \beta^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -4ia_{12}\Lambda_2\Omega^2 + 8a_{21}\beta^2\Lambda_2 + \beta^2bht_{02}Z - \beta^2bht_{20}Z + 12a_{03}\Lambda_2\Omega\beta - aht_{11}Z\Omega\beta - 8a_{21}\Lambda_2\Omega\beta - 4a_{12}Zaht_{00}\beta \\
& -4b_{12}\Lambda_2\Omega\beta - 3b_{03}Zaht_{00}\beta + b_{21}Zaht_{00}\beta + 2a_{12}Zaht_{00}\Omega + 2aht_{11}\beta^2Z - 6\beta^2b_{30}\Lambda_2 + 2\beta^2b_{12}\Lambda_2 \\
& + 2a_{21}\Lambda_2\Omega^2 - 6a_{03}\Lambda_2\Omega^2 + iaht_{02}Z\Omega\beta - 3ia_{03}Zaht_{00}\Omega - 2ib_{21}\Lambda_2\Omega\beta + 6ib_{03}\Lambda_2\Omega\beta + 6ia_{03}Zaht_{00}\beta \\
& - iaht_{20}Z\Omega\beta - 2ib_{12}Zaht_{00}\beta - 2ia_{21}Zaht_{00}\beta - 6ia_{30}\Lambda_2\Omega\beta + 10ia_{12}\Lambda_2\Omega\beta),
\end{aligned}$$

(45)式中的 r_1-r_4 , i_1-i_4 的表达式如下:

$$r_1 = 3b_{30} + b_{12} - a_{21} - 3a_{03}, \quad i_1 = a_{12} + 3b_{03} + b_{21} + 3a_{30},$$

$$\begin{aligned}
r_2 = & -\frac{Z^2}{128\beta^2}(-3b_{30}bh_{00}^2 - 16b_{21}bh_{00}ah_{00} - 128ah_{02}ah_{00}\beta - 128aht_{02}aht_{00}\beta + 64bh_{11}ah_{00}\beta + 64bht_{11}aht_{00}\beta \\
& - 15b_{12}bht_{00}^2 + 16a_{12}bh_{00}ah_{00} + a_{21}bh_{00}^2 + 3b_{30}bht_{00}^2 - 7a_{21}bht_{00}^2 - 64b_{12}aht_{00}^2 - 64b_{12}ah_{00}^2 + 192a_{03}aht_{00}^2 \\
& + 192a_{03}ah_{00}^2 - 9b_{12}bh_{00}^2 + 27a_{03}bh_{00}^2 + 27a_{03}bht_{00}^2 + 16bh_{02}\beta bh_{00} - 8ah_{11}\beta bh_{00}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i_2 = & -\frac{Z^2}{128\beta^2}(-48b_{21}aht_{00}^2 - b_{21}bh_{00}^2 - 8ah_{11}ah_{00}\beta - 16bh_{02}ah_{00}\beta - 32aht_{11}aht_{00}\beta - 16bht_{02}aht_{00}\beta \\
& - 27b_{03}bh_{00}^2 - 3a_{30}bh_{00}^2 + 3a_{30}bht_{00}^2 - 16a_{21}bh_{00}ah_{00} + 240b_{03}aht_{00}^2 + 128a_{12}aht_{00}^2 + 80a_{12}ah_{00}^2 \\
& + 240b_{03}ah_{00}^2 + 7b_{21}bht_{00}^2 + 8bh_{11}\beta bh_{00} - 9a_{12}bh_{00}^2 + 48bht_{20}\beta aht_{00} + 16ah_{20}\beta bh_{00} - 16b_{12}bh_{00}ah_{00} \\
& - 27b_{03}bht_{00}^2 - 15a_{12}bht_{00}^2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_3 = & \frac{Z}{16\beta}(-9a_{03}bh_{00} + 24b_{03}ah_{00} + a_{21}bh_{00} - 16a_{12}ah_{00} - 5b_{12}bh_{00} - 8b_{21}ah_{00} - 3b_{30}bh_{00} + 8\beta bh_{20} \\
& - 8\beta bh_{02} + 8ah_{11}\beta),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i_3 = & \frac{Z}{16\beta}(b_{12}ah_{00} + 8ah_{20}\beta - 5a_{12}bh_{00} - 3a_{30}bh_{00} - 3a_{03}ah_{00} - 9b_{30}ah_{00} - 5a_{21}ah_{00} - 8\beta bh_{11} + 9b_{03}bh_{00} \\
& - 8ah_{02}\beta - b_{21}bh_{00}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_4 = & \frac{Z}{16\beta}(-8\beta bht_{02} - 3b_{30}bht_{00} - 9a_{03}bht_{00} - 16a_{12}aht_{00} - 8b_{21}aht_{00} + 8aht_{11}\beta + 24b_{03}aht_{00} + a_{21}bht_{00} \\
& + 8\beta bht_{20} - 5b_{12}bht_{00}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i_4 = & \frac{Z}{16\beta}(-8\beta bht_{11} - b_{21}bht_{00} - 3a_{03}aht_{00} - 5a_{21}aht_{00} + b_{12}aht_{00} - 9b_{30}aht_{00} - 8ah_{02}\beta - 3a_{30}bht_{00} \\
& - 5a_{12}bht_{00} + 8ah_{20}\beta + 9b_{03}bht_{00}).
\end{aligned}$$

- [1] Zhai W M, Zhao C F 2005 *Chin. J. Mech. Eng.* **41** 1 (in Chinese) [翟婉明、赵春发 2005 机械工程学报 **41** 1]
- [2] Cai Y, Chen S S, Rote D M, Coffey H T 1994 *J. Sound and Vib.* **175** 625
- [3] Zheng X J, Wu J J, Zhou Y H 2000 *J. Sound and Vib* **235** 43
- [4] Zheng X J, Wu J J, Zhou Y H 2005 *J. Sound and Vib* **279** 201
- [5] Zhang X M, Peng J H, Chen G R 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2864 (in Chinese) [张晓明、彭建华、陈关荣 2004 物理学报 **53** 2864]
- [6] Qian C Z, Tang J S 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 617 (in Chinese) [钱长照、唐驾时 2006 物理学报 **55** 617]
- [7] Ren H P, Liu D 2005 *Chin. Phys.* **14** 1352
- [8] Xu J, Chung K W 2003 *Physica D* **180** 17
- [9] Xu J, Yu P 2004 *Int J Bifurcation and Chaos* **14** 2777
- [10] Attilio M 2003 *Int. J. Non-linear Mechanics* **38** 123
- [11] Attilio M 2006 *Int. J. Non-linear Mechanics* **41** 146
- [12] Ji J C, Hansen C H, Li X Y 2005 *Nonlinear Dynamics* **41** 385
- [13] Ji J C, Hansen C H 2005 *ASME, J. of Vibration and Acoustic* **127** 362
- [14] Li X Y, Ji J C, Hansen C H, Tan C X 2006 *J. Sound Vib.* **291** 644
- [15] Shi X H, She L H 2005 *J. Dynamic Con.* **3** 52 (in Chinese) [施晓红、余龙华 2005 动力学与控制学报 **3** 52]
- [16] Guckenheimer J, Holmes P 1986 *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields* (New York: Springer-Verlag; second Edition)
- [17] Nayfeh A H, Mook D T 1979 *Nonlinear Oscillations* (USA: John Wiley & Sons)

Sub-harmonic resonances of the non-autonomous system with delayed position feedback control^{*}

Wang Hong-Po[†] Li Jie

(*Maglev Engineer Center , National University of Defense Technology , Changsha 410073 , China*)

(Received 14 August 2006 ; revised manuscript received 24 September 2006)

Abstract

The response of the Maglev system with delayed position feedback control under the sub-harmonic excitation of the flexible guideway is investigated. The dynamical model is linearized at the equilibrium. Employing time delay as its bifurcation parameter, the condition under which the Hopf bifurcation may occur is investigated. Center manifold reduction is applied to get the Poincaré normal form of the nonlinear system with guideway disturbance so that we can study the relation between periodic solution and system parameter. The sub-harmonic resonant periodic solution of the normal form is calculated based on the method of multiple scales, and we get the bifurcation equation of the free oscillation. The existence condition of the free oscillation in the solution is analyzed. Relationship between periodic solution and control and excitation parameters is also investigated. Finally numerical method is applied to study how system and excitation parameters affect the system response. It was shown that the critical time delay to keep the response of the system stable is less than that without perturbation. Time delay can not only suppress sub-harmonic resonance, but also control the appearance of the chaos. Control parameter can govern the emergence of the free oscillation and affect the amplitude of the forced oscillation. So carefully selecting the system parameters can restrain the oscillation effectively.

Keywords : subharmonic resonant response, delayed position feedback control, non-autonomous maglev system, bifurcation

PACC : 0547, 4340, 6240

^{*} Project supported by National Natural Science Foundation of China(Grant No. 60404003) and Fok Ying Dong Education Foundation(FYDEF , Grant No. 94028).

[†] E-mail : nudtwhp@yahoo.com.cn