

# 有耗孤子的最小作用量原理及其在 二维光子带隙结构中的应用<sup>\*</sup>

谭康伯<sup>†</sup> 梁昌洪

(西安电子科技大学天线与微波国家重点实验室, 西安 710071)

(2006 年 7 月 31 日收到, 2006 年 10 月 26 日收到修改稿)

采用变分方法对于二维矩形光子带隙结构中  $X$  点孤子的耗散以及相干作用进行了动力学分析. 通过对由作用量原理得到的孤子参量联立方程组的分析可知, 除了耗散作用导致孤子的幅度衰减, 并引起孤子横向的展宽以外, 同向孤子的相互作用负势函数为耗散作用所减弱, 从而使得孤子在  $x$  方向的束缚态被削弱. 孤子中心间距随  $x$  的增加呈现出增幅变化且波动周期增大. 当纵向距离增大到一定值后, 孤子中心间距将一直增大下去.

关键词: 光子带隙结构(PBG), 耗散孤子, 变分, 作用量原理

PACC: 4265J, 4265S, 4270Q

## 1. 引 言

近年来, 由于孤子在凝聚态等研究中的重要性<sup>[1-7]</sup>, 使得电磁波在非线性周期结构中的传播引起了人们广泛的兴趣<sup>[3,4]</sup>, 在相关试验研究或数值模拟中<sup>[1,2]</sup>通常采用二维介质周期结构. 对于二维矩形栅格光子带隙(PBG)结构, 从包含 Kerr 型非线性本构关系的 Maxwell 方程组出发, 可以得到相应的非线性耦合 Schrödinger 方程组, 该模型具有相干耦合孤子解. 耗散作用是自然界中的普遍现象, 因而在具体问题中, 由于材料中固有掺杂以及原子结构的振动, 使得耗散几乎不可避免. 因此对于耗散作用对孤子特性影响的研究也就具有普遍意义. 因为对耗散作用的分析较为复杂, 所以许多涉及孤子的研究工作都是在以理想条件为前提下进行的. 在对二维非线性介质周期结构中的孤子所进行的研究中, Aközbeke<sup>[8]</sup>通过变分法和 Galerkin 法的对比对几种理想 PBG 形式进行了模拟, 由于耗散问题的复杂性, 文中对单一耗散孤子只进行了简单提及. 但是为了对孤子的特性进行更为准确的考察就必须考虑耗散的影响. 近期, 刘劲松和张都应<sup>[9]</sup>对耗散折变晶体中的屏蔽光伏孤子进行了研究, 从而在耗散分析方面

做出了有益的工作. 本文将对耗散相干作用对于二维矩形栅格 PBG 中的孤子的影响进行研究. 在具体分析中, 由于变分方法兼有理论解析分析和数值分析的优点, 可以同时有效地反映物理规律和现象特征, 因此本文采用变分法<sup>[8,10,11]</sup>对计及线性耗散和 Kerr 型非线性的同向孤子特性进行了动力学分析. 文中首先对于相干耗散非线性 Schrödinger 方程组建立了作用量原理, 并定义了相应的 Lagrange 量. 结合具体例子对耗散相干作用进行了分析. 结果表明, 耗散作用除了导致孤子的幅度衰减和孤子展宽之外, 还将减弱在理想情况下所表现出的负势函数的作用, 从而使得孤子的束缚态被削弱.

## 2. 有耗孤子的最小作用量原理

首先, 建立所要讨论问题的理论模型. 二维 ( $x-y$ ) 矩形栅格非线性(Kerr 型)PBG 周期结构<sup>[8]</sup>的拓扑结构及对应的 Brillouin 区, 如图 1 所示.

如果考虑同向孤子, 则在 Brillouin 区  $X$  点 ( $\pi/a, 0$ ) 的电场幅度可以表示为

$$E(\mathbf{r}) = E_1 e^{ikx} + E_2 e^{ikx}, \quad (1)$$

其中  $k = \pi/a$ ,  $a$  为栅格常数. 在慢变包络近似的情况下, 如果考虑在介质微扰条件下的同向孤子在

<sup>\*</sup> 国家重点基础研究发展计划(批准号: 200300113)和国家自然科学基金(批准号: 60601028)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: kbtan@mail.xidian.edu.cn

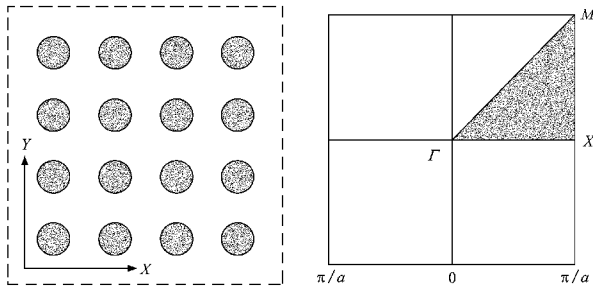


图 1 二维矩形栅格 PBG 结构及其相应 Brillouin 区

Brillouin 区  $X$  点的线性耗散作用, 则其中空间孤子的特性可以通过下面相干耗散非线性 Schrödinger 方程组来描述:

$$\begin{aligned} & i \frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 E_1}{\partial y^2} + \beta E_1 + i\gamma E_1 \\ & + \frac{2}{3} \alpha (|E_1|^2 + 2|E_2|^2) E_1 = 0, \\ & i \frac{\partial E_2}{\partial x} + \frac{\partial^2 E_2}{\partial y^2} + \beta E_2 + i\gamma E_2 \\ & + \frac{2}{3} \alpha (|E_2|^2 + 2|E_1|^2) E_2 = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

该模型中所采用的参量符号  $\alpha$  和  $\beta$  表示 PBG 结构参数<sup>[8]</sup>, 而  $\gamma$  则表征了耗散效应. 接下来, 可以在前面所得模型的基础上, 采用变分方法对耦合孤子的相干及耗散作用进行分析. 事实上, 由于变分原理所具有的驻定特性, 使得在分析中即便采用试探解也可以得到较为满意的结果, 因此变分方法可以通过较为简单的半解析数值计算来揭示物理现象的内在规律. (2) 式所描述模型的相应作用量原理可以表示为

$$\delta \left[ \int_0^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} L dy \right) dx \right] = 0, \quad (3)$$

其中 Lagrange 量定义为

$$\begin{aligned} L &= e^{2\gamma x} L' \\ &= e^{2\gamma x} \left\{ -\frac{4\alpha}{3} |E_1|^2 |E_2|^2 \right. \\ &+ \sum_{n=1}^2 \frac{i}{2} \left( E_n \frac{\partial E_n^*}{\partial x} - E_n^* \frac{\partial E_n}{\partial x} \right) \\ &+ \left. \left| \frac{\partial E_n}{\partial y} \right|^2 - \beta |E_n|^2 - \frac{\alpha}{3} (|E_n|^2)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

该 Lagrange 量的构造在形式上考虑了 Caldirola 量子耗散模型 (4) 式中的指数项表征了系统的耗散特性. 上式右边大括号中的第一项是孤子系统的非线性相干部分. 求和号中的项分别对应于  $E_1$  和  $E_2$  的

非耦合部分. 上面所定义 Lagrange 量的有效性可以通过求解  $E_1$  和  $E_2$  相应的 Euler-Lagrange 方程来验证, 具体推导见附录.

### 3. 同向孤子变分分析

在前面所建立模型的框架下, 变分方法就可以被用于对 (2) 式所表示的耦合孤子对的相互作用进行分析. 实际分析表明<sup>[12]</sup>, 虽然耦合 Schrödinger 方程组中的两个状态量具有完全不同的形式, 但具体结果差别很小. 于是, 耗散系统的两个试探函数可以直接定义为

$$E_1 = e_1 \operatorname{sech}[e_1(y - y_1)] e^{i[k_1(y - y_1) + \theta_1]}, \quad (5)$$

$$E_2 = e_2 \operatorname{sech}[e_2(y - y_2)] e^{i[k_2(y - y_2) + \theta_2]}. \quad (6)$$

在上面两式中, 参量  $\{q_n | e_n, y_n, k_n, \theta_n (n = 1, 2)\}$  分别为孤子的幅度、中心位置、相速以及相位, 这些参量都是  $x$  的函数. 显然在作进一步处理之前, 试探函数 (5) 和 (6) 中的这些参量是相互独立的. 为了分析孤子的非线性相干耦合及耗散作用, 需要将 (4), (5) 和 (6) 式代入作用量原理, 同时考虑指数项是  $x$  的函数, 于是可以得到横向作用量的如下形式:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} L' dy &= e^{-2\gamma x} \int_{-\infty}^{+\infty} L dy \\ &= -\frac{16\alpha}{3} e_1^2 e_2^2 \left\{ \frac{(y_2 - y_1) \cosh[e_2(y_2 - y_1)]}{\sinh^3[e_2(y_2 - y_1)]} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{e_1 \sinh^2[e_2(y_2 - y_1)]} \right\} \\ &+ \sum_{n=1}^2 2e_n \left( \frac{d\theta_n}{dx} - k_n \frac{dy_n}{dx} \right) \\ &+ 2k_n^2 e_n - \frac{4\alpha - 6}{9} e_n^3 - 2\beta e_n. \end{aligned} \quad (7)$$

对应不同参量的运动方程可以通过计算下面方程来获得:

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial \int_{-\infty}^{+\infty} L dy}{\partial dq_n/dx} \right] - \frac{\partial \int_{-\infty}^{+\infty} L dy}{\partial q_n} = 0, \quad (8)$$

或

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial \int_{-\infty}^{+\infty} L' dy}{\partial dq_n/dx} \right] + 2\gamma \frac{\partial \int_{-\infty}^{+\infty} L' dy}{\partial dq_n/dx} \\ & - \frac{\partial \int_{-\infty}^{+\infty} L' dy}{\partial q_n} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

其中  $q_n$  即为 (5) (6) 式中定义的孤子参量. 将 (7) 式

代入上面方程,分别计算  $q_n$ .通过一定的运算和化简,就能得到如下形式的方程组:

$$\left( \frac{d\theta_n}{dx} - k_n \frac{dy_n}{dx} \right) + k_n^2 - \frac{2\alpha - 3}{3} e_n^2 - \beta - \frac{8\alpha}{3} \frac{d}{de_n} e_1^2 e_2^2 \times \left\{ \frac{(y_2 - y_1) \cosh[e_2(y_2 - y_1)]}{\sinh^3[e_2(y_2 - y_1)]} - \frac{1}{e_1 \sinh^2[e_2(y_2 - y_1)]} \right\} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{d(e_n k_n)}{dx} + 2\gamma e_n k_n - \frac{8\alpha}{3} e_1^2 e_2^2 \frac{d}{dy_n} \times \left\{ \frac{(y_2 - y_1) \cosh[e_2(y_2 - y_1)]}{\sinh^3[e_2(y_2 - y_1)]} - \frac{1}{e_1 \sinh^2[e_2(y_2 - y_1)]} \right\} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{dy_n}{dx} - 2k_n = 0, \quad (12)$$

$$\frac{de_n}{dx} + 2\gamma e_n = 0. \quad (13)$$

孤子的非线性相互作用可以通过(10)–(13)式所表示的参量方程来描述.

### 4. 算例讨论

下面结合具体例子对双孤子参量间的关系进行分析.为分析的方便,设该系统的耗散系数  $\gamma = 0.02$ .当  $n = 1, 2$  时,通过计算方程(13)式就可以得到孤子幅度的表达式.该式表明孤子的振幅沿  $x$  方向呈现衰减趋势,而变化趋势的大小由参数  $\gamma$  决定.若将该表达式代入(5)或(6)式,则可以得到孤子在  $x$  方向上同时展宽的结果,如图2所示.

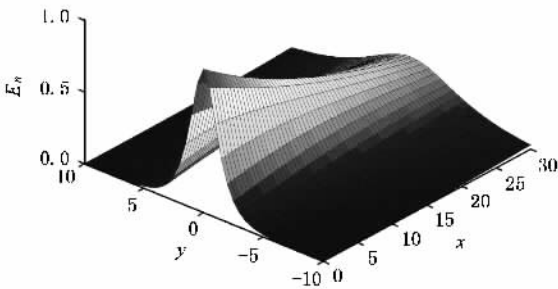


图2 归一化孤子强度随  $x$  的变化规律

考虑同一系统中媒质特性相同,于是在起始条件相同的情况下,幅度具有相同的表示:  $e_n =$

$e_0 e^{-2\gamma x}$ .考虑该条件和(12)式,可以得到如下微分方程:

$$\frac{d^2(e_n y_n)}{dx^2} + 4\gamma \frac{d(e_n y_n)}{dx} + 4\gamma^2 e_n y_n - \frac{16\alpha}{3} e_n^4 \frac{d}{d(e_n y_n)} \times \left\{ \frac{e_n(y_2 - y_1) \cosh[e_n(y_2 - y_1)]}{\sinh^3[e_n(y_2 - y_1)]} - \frac{1}{\sinh^2[e_n(y_2 - y_1)]} \right\} = 0, \quad (14)$$

定义中间变量  $T = e_n t = e_n(y_2 - y_1)$ ,则上面运动方程可以重新表示为

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + 4\gamma \frac{dT}{dx} + \frac{d}{dT} \left\{ 2\gamma^2 T^2 - \frac{16\alpha}{3} e_n^4 \times \left[ \frac{T \cosh(T)}{\sinh^3(T)} - \frac{1}{\sinh^2(T)} \right] \right\} = 0. \quad (15)$$

显然上面所得方程的势函数为

$$U = 2\gamma^2 T^2 - \frac{16\alpha}{3} e_n^4 \left[ \frac{T \cosh(T)}{\sinh^3(T)} - \frac{1}{\sinh^2(T)} \right] \quad (16)$$

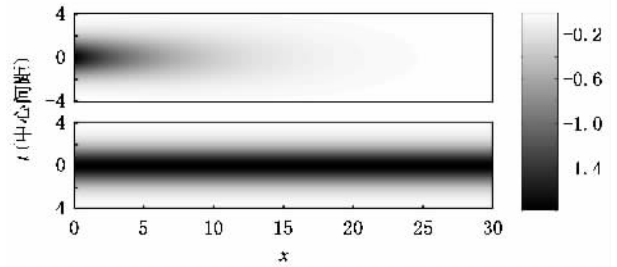


图3 耗散和非耗散相互作用势函数随  $x$  及孤子中心间距  $t$  的变化规律对比 ( $\alpha = 1, e_0 = 1$ )

图3给出耗散与非耗散势函数随  $x$  和孤子中心间距  $t$  的变化规律之对比,上图即为计及耗散的情况,下图为非耗散情况.通过(16)式可以看到,耗散作用削弱了负势函数项的影响,而这一点从图3中得以清楚反映.考虑到势函数表达式右边第二项方括号中的函数式对于  $T$  的微分式是  $T$  的负值函数,于是(15)式可以进一步表示为

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + 4\gamma \frac{dT}{dx} + 4\gamma^2 T + \frac{16\alpha}{3} e_n^4 \csc^2(T) [2T \coth^2(T) + T \operatorname{csch}^2(T) - 3 \coth(T)] = 0. \quad (17)$$

当  $T$  较小时,孤子间相干作用可以近似处理.通过分析,首先给出近似可行区域的特征如图4所示.从图4可以看到,可做近似的孤子间距  $t$  随  $x$  的

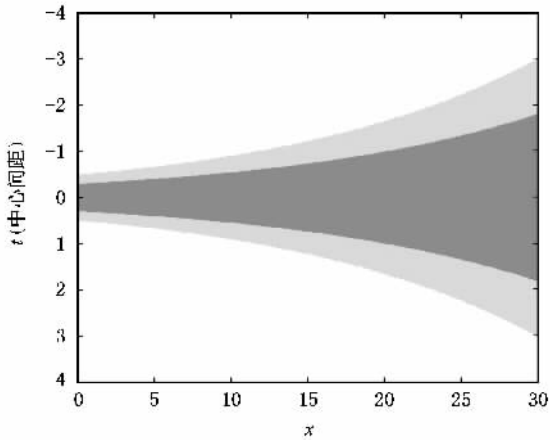


图4 变量  $T$  的不同取值范围 ( $T < 0.3$ : 深色阴影区;  $0.3 < T < 0.5$ : 浅色阴影区)

增大而变大. 于是对(17)式作一阶近似, 则可以得到类似于 Bessel 方程<sup>[13]</sup>的近似方程形式. 由于耗散因式  $e^{-2\gamma x}$  在方程的解中可以分离, 于是将  $T$  的定义式和解中的公共项  $e^{-2\gamma x}$  消去, 就恰好可以得到孤子中心间距只随  $x$  变化的函数. 下面分析将进一步表明相干及耗散作用对于孤子变化的影响. 考虑到前面的近似条件, 图5给出了初始条件设为  $t|_{x=0} = 0.3$ ,  $dt/dx|_{x=0} = 0$  同时定义参数:  $\alpha = 1$ ,  $e_0 = 1$  的条件下所得的孤子中心间距随  $x$  的变化规律.

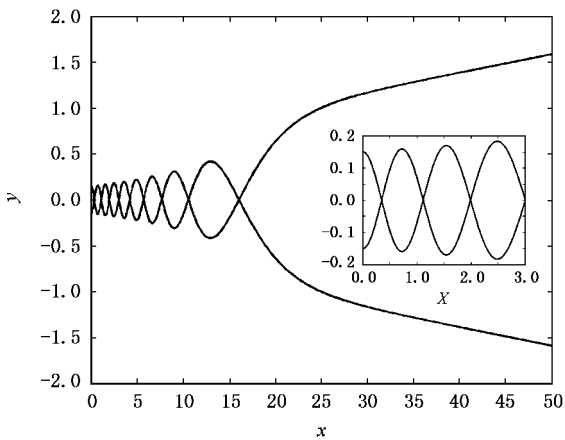


图5 同向相干孤子的中心位置随  $x$  的变化特性

从前面对于势函数的分析可以知道, 耗散作用削弱了孤子间的吸引. 如图5所示, 在  $x$  较小的一段距离内, 孤子间距的波动幅度及周期性增大. 通过图3可以看到, 当  $x$  增大到一定值以后, 势函数的影响已经很小, 孤立子特性按原有状态一直持续下去. 在图5中表现为孤子的间距一直增大下去. 图5中所

表现出的孤子间距呈现波动的  $x$  区间与图3中势函数起明显作用的区间相符合. 值得指出的是: 由于耗散的存在, 孤子的幅度同时在(13)式的支配下呈指数衰减. 另外, 从图5来看孤子间距随  $x$  呈增大趋势, 但图4分析结果表明近似条件的适用范围随  $x$  也在增大, 因而近似所得结果是合理的.

## 5. 结 论

在矩形栅格 PBG 结构中, 耗散作用除了导致单个孤子的幅度衰减和横向展宽外, 还表现出了, 由于同向孤子的相互作用势函数被耗散作用所减弱, 从而使得孤子的束缚态被削弱. 通过理论和算例分析可以得到, 在起初的一段纵向距离内随着  $x$  的增加, 孤立子中心间距呈现出增幅和周期增大的谐振特性. 当纵向距离增大到一定的值后, 相互作用势函数在耗散作用下已变得很小, 孤子按已有的状态持续下去.

## 附 录

对于该耗散系统其 Lagrange 量定义为如下形式:

$$L = e^{2\gamma x} \left\{ -\frac{4\alpha}{3} |E_1|^2 |E_2|^2 + \sum_{n=1}^2 \frac{i}{2} \left( E_n \frac{\partial E_n^*}{\partial x} - E_n^* \frac{\partial E_n}{\partial x} \right) + \left| \frac{\partial E_n}{\partial y} \right|^2 - \beta |E_n|^2 - \frac{\alpha}{3} (|E_n|^2)^2 \right\}. \quad (A1)$$

显然上面的 Lagrange 量属于实域, 虽然从形式上可以得到四个对应的 Euler-Lagrange 方程, 但由于其中两两互为共轭, 因此只需以对应于孤子1和2的其中两个为代表即可表征相关问题. 若记  $\partial E_n / \partial x = E_{nx}$ ,  $\partial E_n / \partial y = E_{ny}$ , 则上面 Lagrange 量所对应的 Euler-Lagrange 方程可以表示为

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial E_{nx}^*} \right) + \frac{d}{dy} \left( \frac{\partial L}{\partial E_{ny}^*} \right) - \frac{\partial L}{\partial E_n^*} = 0, \quad (n = 1, 2), \quad (A2)$$

将 Lagrange 量代入上式, 当  $n = 1$  时, 上式中第一项等于

$$\frac{i}{2} \left( \frac{\partial E_1}{\partial x} e^{2\gamma x} + 2\gamma E_1 e^{2\gamma x} \right). \quad (A3)$$

第二项由于耗散指数因子为  $x$  的函数, 因此可以直接得到  $e^{2\gamma x} \partial^2 E_1 / \partial y^2$ . 对于第三项的计算结果如下:

$$-\left( \frac{i}{2} \frac{\partial E_1}{\partial x} + \beta E_1 + \frac{2\alpha}{3} |E_1|^2 E_1 + \frac{4\alpha}{3} E_1 |E_2|^2 \right) e^{2\gamma x}. \quad (A4)$$

类似的,可以得到  $E_2$  的相应结果. 将所有计算结果代入对应的 Euler-Lagrange 方程(A2)中并消去具有一般性的指数

项, 所得结果即为文中(2)式.

- [ 1 ] Trombettoni A , Smerzi A 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 2353
- [ 2 ] Fleischer J W , Segev M , Efremidis N K , Christodoulides D N 2003 *Nature* **422** 147
- [ 3 ] Cohen O , Schwartz T , Fleischer J W , Segev M , Christodoulides D N 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 113901
- [ 4 ] Fleischer J W , Bartal G , Cohen O , Manela O , Segev M , Hudock J , Christodoulides D N 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 123904
- [ 5 ] Zhou Y S , Wang X H , Gu B Y , Wang F H 2005 *Chin. Phys.* **14** 2241
- [ 6 ] Xi T T , Zhang J , Lu X , Hao Z Q , Yang H , Dong Q L , Wu H C 2006 *Chin. Phys.* **15** 2025
- [ 7 ] Liu J , Chen X W , Li J S , Leng Y X , Zhu Y , Dai J , Li R X , Xu Z Z 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1821 ( in Chinese ) [ 刘 军、陈晓伟、刘建胜、冷雨欣、朱 毅、戴 君、李儒新、徐至展 2006 物理学报 **55** 1821 ]
- [ 8 ] Aközbeğ N , John S 1998 *Phys. Rev. E* **57** 2287
- [ 9 ] Liu J S , Zhang D Y 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 880 ( in Chinese ) [ 刘劲松、张都应 2001 物理学报 **50** 880 ]
- [ 10 ] Zhong W P , Huang H 1995 *Acta Opt. Sin.* **15** 202 ( in Chinese ) [ 钟卫平、黄 辉 1995 光学学报 **15** 202 ]
- [ 11 ] Jiang J H , Li Z P 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2991 ( in Chinese ) [ 江金环、李子平 2004 物理学报 **53** 2991 ]
- [ 12 ] Pu L C , Lin Z B , Zhang X F , Wang B J , Jiang Y , Yan T Y 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4472 ( in Chinese ) [ 蒲利春、林宗兵、张雪峰、王本菊、姜 毅、严天艳 2005 物理学报 **54** 4472 ]
- [ 13 ] Wang Z X , Guo D R 2000 *Introduction to Special Function* ( Beijing : Peking University Press ) Chap. 7 [ 王竹溪、郭敦仁 2000 特殊函数概论 ( 北京 : 北京大学出版社 ) 第 7 章 ]

## Least action principle for dissipative solitons and its application in two-dimensional PBG structure<sup>\*</sup>

Tan Kang-Bo<sup>†</sup> Liang Chang-Hong

( National Key Laboratory of Antennas and Microwave Technology , Xidian University , Xi 'an 710071 , China )

( Received 31 July 2006 ; revised manuscript received 26 October 2006 )

### Abstract

Dissipative and coherent effects of  $X$ -point solitons are investigated on the basis of dynamic variational formulation in two-dimensional photonic bandgap (PBG) structure of square lattice. Through the least action principle, the result deduced from analyzing soliton parametric equations indicates that dissipative effect leads to not only amplitude decrease but also section expansion of solitons. In addition, co-soliton interaction for negative potential is decreased by dissipation, and bound state of solitons in  $x$  direction is also weakened. Amplitude and period of fluctuation of relative interval between soliton centers increase in  $x$  direction, when  $x$  increases to some value, relative interval will increase continuously.

**Keywords** : PBG structure , dissipative solitons , variational , least action principle

**PACC** : 4265J , 4265S , 4270Q

<sup>\*</sup> Project supported by the State Key Development Program for Basic Research of China ( Grant No. 00300113 ) and the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 60601028 ).

<sup>†</sup> E-mail : kbtan@mail.xidian.edu.cn