第 56 卷 第 6 期 2007 年 6 月
1000-3290/2007/56(06)/3031-08

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.56,No.6,June,2007

微扰的耦合非线性薛定谔方程的近似求解*

程雪苹　林　机†　王志平

(浙江师范大学非线性物理研究所,金华　321004)

(2006 年 6 月 9 日收到;2006 年 10 月 13 日收到修改稿)

将直接微扰方法应用于可积的含修正项的非线性薛定谔方程,通过近似解与精确解的比较确定了直接微扰方法的可靠性.继而,将该方法应用于微扰的耦合非线性薛定谔方程,并获得了该微扰方程的可靠的近似解.

关键词:直接微扰方法,微扰,耦合非线性薛定谔方程,近似解

PACC:0260,0340K,4735

1. 引　言

非线性薛定谔方程在非线性物理学中具有非常重要的意义,作为描述波包在弱非线性介质中传播的普遍方程,它出现在物理和应用数学的许多分支中,包括等离子体物理[1]、非线性光学[2]、凝聚态物理[3]等等.因此寻找非线性薛定谔方程的精确解,尤其是它的孤立子解,一直是数学家和物理学家们非常感兴趣的课题.近年来,科学家们已发展了许多求解这个完全可积模型的方法,如逆散射方法(IST)[4],Bäcklund 变换[5],Darboux 变换[6]等.

然而,标准的非线性薛定谔方程往往是高度理想化的.在实际问题中,考虑某些实际因素,如外加驱动、静孤子现象、光纤损耗等,往往要讨论包含修正项的对应的非线性方程.而要得到这类非线性方程的精确解非常困难,目前的研究手段主要还是停留在数值求解.不过,如果修正项可以看作小量,我们还可以运用微扰方法对这类非线性方程进行研究.到目前为止,人们已经发展了很多有效的微扰方法,较为典型的有:逆散射微扰方法[7]、修正守恒律微扰方法[8],直接微扰法[9]等等.我们知道,逆散射微扰方法处理微扰问题的能力很强,它能成功地处理很多复杂的微扰问题,但其思路曲折,如果不了解 IST 方法而想运用此方法是非常困难的.另外,一般的微扰方法只能求出微扰方程的零级近似解,而对它们的一级或更高级修正却无能为力.最近,楼森岳[10]在前人基础上发展了一种直接微扰方法,它已成功地运用于含有损散项的非线性薛定谔方程和两变量耦合的非线性薛定谔方程[11].这种方法巧妙地将微扰方程的可积性和对称有机地结合起来,思路直接,容易理解和接受.此外,它完全摆脱了对逆散射方法的依赖,在实际操作中也明显比其他的微扰方法简单.

本文中,我们首先将直接微扰方法运用到可积的含修正项的非线性薛定谔方程,获得它的近似解.由于该模型的精确解可以通过适当的变量代换完全确定,借助 Maple 工具将得到的近似解与精确解进行比较,以此分析该直接微扰方法的可靠性.并进一步将直接微扰方法运用于微扰的耦合非线性薛定谔方程,并获得了该方程的可靠的近似解.

2. 直接微扰方法的可靠性分析

考虑如下的非线性演化方程

$$\mathrm{i}u_t+\mathrm{i}\gamma_1 u_z+\gamma_2 u_{zz}+\sigma|u|^2u=0. \tag{1}$$

其中下标表示对时间变量 t 和空间变量 z 的求导.在非线性光学中,u 表示光脉冲的缓变包络振幅函数,z 和 t 分别表示脉冲在光纤中的传输距离和时间,方程中 $\gamma_1=\partial k/\partial\omega=1/v_g$($v_g$ 为群速度),$\gamma_2=\partial^2k/\partial\omega^2$,由于光波的传播常数 k 与频率 ω 的依赖关系,不同频率的波其传播速度会不同,由此将产生色散,故 γ_1,γ_2 是反映光纤的色散的两个参量.方程中第四项描述脉冲的非线性效应.在 $\gamma_1=0$ 的特

* 国家自然科学基金(批准号:10575087)和浙江省自然科学基金(批准号:102053)资助的课题.

† 通讯联系人.E-mail:linji@zjnu.cn

殊条件下,方程(1)称为非线性薛定谔方程,它是研究光纤孤子产生的基本方程.

2.1. 精确解

方程(1)是一个完全可积的模型,它的精确解可以通过适当的变量代换来确定.采用以群速度 v_g 运动的参考系来描述方程(1),即

$$Z = z - t/v_g = z - \gamma_1 t, T = t.$$

则方程(1)可简化成

$$\mathrm{i}u_t + \gamma_2 u_{ZZ} + \sigma |u|^2 u = 0. \tag{2}$$

众所周知,方程(2)为标准非线性薛定谔方程,它有如下形式的亮孤子解

$$u = 2\sqrt{\frac{2\gamma_2}{\sigma}}l\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[2kZ+4\gamma_2(k^2-l^2)T+\theta_0]} \times \mathrm{sech}[2l(Z - Z_0 + 4k\gamma_2 T)]. \tag{3}$$

其中 l, k, Z_0,θ_0 为四个实常数,分别衡量孤子的高度(宽度)、速度、初始位置和初始相位.将 $Z = z - \gamma_1 t$, $T = t$ 回代,得到方程(1)的亮孤子解为(以 u_e 表示精确解)

$$u_e = 2\sqrt{\frac{2\gamma_2}{\sigma}}l\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[2kz+(4\gamma_2 k^2-4\gamma_2 l^2-2k\gamma_1)t+\theta_0]} \times \mathrm{sech}[2l(z - Z_0 + (4k\gamma_2 - \gamma_1)t)]. \tag{4}$$

此时,参数 l, Z_0, θ_0 分别衡量孤子的高度(宽度),初始位置和初始相位,而孤子的传播速度则由参数 k 和 γ_1 共同表征.

2.2. 近似解

如果方程(1)中色散项 $\mathrm{i}\gamma_1 u_z$ 可以看成小量,我们就可以用直接微扰方法对其进行求解.令 $\gamma_1 = \varepsilon\mu$,其中 μ 为实常数,ε 为表征微扰强弱的小参量.将方程(1)中 u 展开成如下形式:

$$u = \mathrm{e}^{\varepsilon(\alpha+\mathrm{i}\beta)}U(\zeta,\tau,\varepsilon) = \mathrm{e}^{\varepsilon(\alpha+\mathrm{i}\beta)}(u_0(\zeta,\tau) + \varepsilon u_1(\zeta,\tau) + \cdots). \tag{5}$$

其中 $\alpha\equiv\alpha(z,t)$,$\beta\equiv\beta(z,t)$,$\zeta\equiv\zeta(z,t,\varepsilon)$,$\tau\equiv\tau(z,t,\varepsilon)$均为实函数,并且 $\{\zeta,\tau\}$有如下性质:

$$\{\zeta,\tau\} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \{z,t\}, \tag{6}$$

即当 $\varepsilon\to 0$ 时,u_0 为非线性薛定谔方程的的精确解.

将展开式(5)和 $\gamma_1 = \varepsilon\mu$ 代入方程(1),并令 ε 的相同次幂的系数等于零,得到

$$\mathrm{i}u_{0\tau}\tau_t + \gamma_2 u_{0\zeta\zeta}\zeta_z^2 + \mathrm{e}^{2\varepsilon\alpha}\sigma|u_0|^2 u_0 = 0. \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{i}\varepsilon u_{1\tau}\tau_t + \gamma_2\varepsilon u_{1\zeta\zeta}\zeta_z^2 + 2\mathrm{e}^{2\varepsilon\alpha}\sigma\varepsilon|u_0|^2 u_1 \\
&+ \mathrm{e}^{2\varepsilon\alpha}\sigma\varepsilon u_0^2 u_1^* + \mathrm{i}\varepsilon\alpha_t u_0 \\
&- \varepsilon\beta_t u_0 + \gamma_2\varepsilon\alpha_{zz}u_0 + \mathrm{i}\gamma_2\varepsilon\beta_{zz}u_0 \\
&+ 2\gamma_2\varepsilon\alpha_z u_{0\zeta}\zeta_z + 2\mathrm{i}\gamma_2\varepsilon\beta_z u_{0\zeta}\zeta_z \\
&+ \mathrm{i}\varepsilon\mu u_{0\zeta}\zeta_z + \gamma_2 u_{0\zeta}\zeta_{zz} \\
&+ \mathrm{i}u_{0\zeta}\zeta_t + \gamma_2 u_{0\tau}\tau_{zz} + 2\gamma_2 u_{0\tau\zeta}\tau_z\zeta_z = 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

其中由于 $\{\zeta,\tau\}$有如(6)式的性质,所以我们认为 ζ_t,τ_z,ζ_{zz}均为 ε 的一阶项.

我们知道,方程(7)中 u_0 不显含 ε,所以变量 ζ,τ 应满足关系式

$$\tau_t = \mathrm{e}^{2\varepsilon\alpha}, \zeta_z = \mathrm{e}^{\varepsilon\alpha}. \tag{9}$$

因此,u_0 为以下非线性薛定谔方程

$$\mathrm{i}u_{0\tau} + \gamma_2 u_{0\zeta\zeta} + \sigma|u_0|^2 u_0 = 0 \tag{10}$$

的精确解.另外,从展开式(5)中我们知道 u_1 是非线性薛定谔方程(10)的对称,也就是它的线性化方程

$$\mathrm{i}u_{1\tau} + \gamma_2 u_{1\zeta\zeta} + 2\sigma|u_0|^2 u_1 + \sigma u_0^2 u_1^* = 0 \tag{11}$$

的解.文献[12]中给出了非线性薛定谔方程的无穷多个对称,它的最简单的两个形式可以表示成

$$u_1 = u_{0\tau}, u_1 = u_{0\zeta}. \tag{12}$$

给定一个非平凡解 u_0,方程(8),(9)和(11)对于任意 z 和 t 都是相容的,所以方程(8)中其他项的系数应全部为零,即

$$\begin{aligned}
&\mathrm{i}\alpha_t - \beta_t + \gamma_2\alpha_{zz} + \mathrm{i}\beta_{zz}\gamma_2 = 0, \zeta_z\tau_z = 0, \\
&2\varepsilon\alpha_z\zeta_z\gamma_2 + 2\mathrm{i}\varepsilon\beta_z\zeta_z\gamma_2 + \mathrm{i}\varepsilon\mu\zeta_z + \zeta_{zz} = 0.
\end{aligned} \tag{13}$$

对以上式子进行求解,得到

$$\alpha = C, \beta = -\mu z/2\gamma_2, \tau = t\mathrm{e}^{2\varepsilon C}, \zeta = z\mathrm{e}^{\varepsilon C}. \tag{14}$$

其中 C 为任意常数.这样,我们就得到了方程(1)的近似解(以 u_a 表示近似解):

$$u_a = \mathrm{e}^{\varepsilon C - \mathrm{i}\varepsilon\mu z/2\gamma_2}(u_0 + \varepsilon u_1). \tag{15}$$

这里 u_0 可以为非线性薛定谔方程的任意一个精确解,例如单孤子解,多孤子解,周期波解等,u_1 为非线性薛定谔方程的无穷多个对称中的任意一个.

2.3. 可靠性分析

图 1 给出了不同位置处精确解和近似解的强度 $|u|^2$ 随时间的演化.在传播过程中,两列孤立波分别保持各自的高度、速度和相位不变.当 ε 足够小时(见图 1(a)),方程(1)的近似解与精确解符合得相当好,也就是说,由直接微扰方法给出的近似解有效地描述了方程(1)的解的情况.不过引进直接微扰方法改变了孤波的传播速度的形式,此时精确解比近似解传播得快,随着传输距离 z 的增加,近似解开

始稍微落后于精确解，z 越大，近似解偏移精确解的程度也越明显．但是，此时近似解与精确解的差量仍在理想的精确度范围内．当 ε 值增加时（见图1(b)），两列孤立波的传播速度都减小，这种改变从解(4)也能看出．但是由于直接微扰方法引起的孤子的传播速度的形式的改变，使得在 z 逐渐增加的过程中近似解与精确解越来越不匹配．此时，一阶修正 εu_1 相对于零级解 u_0 已经不再是小量了，而且近似解(15)对于方程(1)也不再是一个有效的近似解．另外，引进直接微扰方法增加了参数 C，近似解的强度的大小对它也有依赖关系，通过选取合适的 C 可以给出与精确解较符合的近似解．

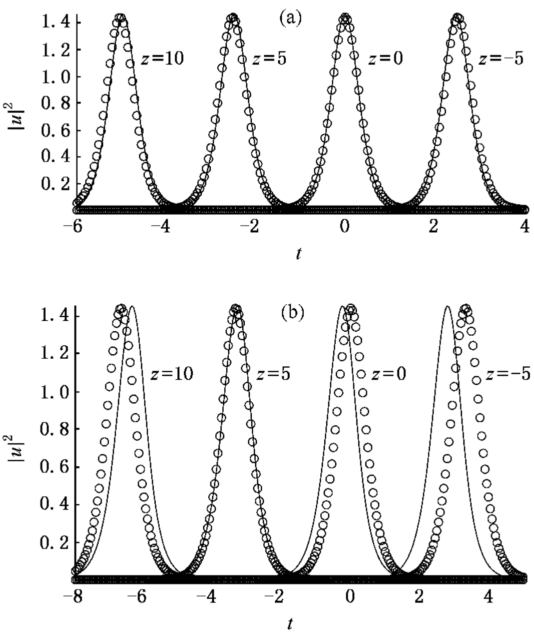

图 1　不同位置处孤立波强度 $|u|^2$ 的时间演化图　(a) $k=0.5$，$l=0.6$，$\mu=1$，$C=0.8$，$\gamma_1=\varepsilon=0.01$，$\theta_0=Z_0=0$，$\gamma_2=1$，$\sigma=2$；(b) $k=0.5$，$l=0.6$，$\mu=1$，$C=-0.4$，$\gamma_1=\varepsilon=0.5$，$\theta_0=Z_0=0$，$\gamma_2=1$，$\sigma=2$．图中圆圈代表精确解，实线表示近似解

表 1　$z=10$ 处相同时间下近似解的最大强度 $|u_a|^2$ 与精确解的最大强度 $|u_e|^2$ 的相对误差的比较（精确解的最大强度为 $|u_e|^2=1.44$）

ε	0.01	0.05	0.10	0.20	0.50	…
$\lvert u_a\rvert^2$	1.438659	1.400838	1.367302	1.333991	1.330704	…
$\frac{\lvert\Delta\rvert}{\lvert u_e\rvert^2}(\%)$	0.093125	2.719583	5.048472	7.361736	7.59	…

表 1 给出了 $z=10$ 处相同时间下取不同 ε 值时近似解的最大强度与精确解的最大强度的相对误差的比较．其中近似解(15)中的参数取为 $k=0.5$，$l=0.6$，$\mu=1$，$Z_0=\theta_0=0$，$\gamma_2=1$，$\sigma=2$．表中 $|\Delta|=||u_e|^2-|u_a|^2|$ 表示精确解的最大强度与近似解的最大强度的绝对误差．当 ε 小于 0.1 时，近似解的最大强度与精确解的最大强度的相对误差均小于 5%．一般地，我们认为此时直接微扰方法给出的近似解可以有效地描述微扰方程的解的情况．随着 ε 的增加，两者之间的相对误差也有所增加．

通过以上的简单分析，可以发现当参量 ε 值相对于所要研究的问题来说足够小时直接微扰方法给出的近似解可以很好地描述微扰方程的解的情况，此时该直接微扰方法对于我们研究微扰非线性演化方程的孤子的传播有很好的可靠性．而且因为微扰普遍存在，所以本文采用的直接微扰方法对研究微扰对非线性演化方程中孤子的影响有广泛的意义．

3．含微扰项的耦合非线性薛定谔方程的近似解

到目前为止，大多数的微扰方法均倾向于处理单场量的非线性演化方程的微扰问题，很少见到有处理耦合非线性演化方程的微扰问题的．这里，将直接微扰方法应用于如下形式的微扰的耦合非线性薛定谔方程：

$$\mathrm{i}E_{mx}+c_mE_{mtt}+2\alpha_{mm}|E_m|^2E_m+2\sum_{\substack{l=1\\(l\neq m)}}^{N}\alpha_{ml}|E_l|^2E_m=-\mathrm{i}\varepsilon E_m. \tag{16}$$

$$\alpha_{ml}=\alpha_{lm},(m,l=1,2,\cdots,N)$$

该方程可描述在许多不同的物理领域中的非线性现象[12,13]，如在非线性光学中，E_m 表示光纤的第 m 个模式的缓变振幅，实参数 c_m，α_{mm} 和 α_{ml} 分别表征材料的特征和各模式间的相互作用，微扰项 $-\mathrm{i}\varepsilon E_m$ 表示光纤的线性损耗．

关于不考虑微扰项 $\mathrm{i}\varepsilon E_m$ 时方程(16)的可积性，物理学家和数学家们已经做了很多的研究[14,16]．在文献[16]中作者也已证明当方程(16)中的各参量满足以下条件时该方程是可积的：

(1) $c_j=c$，$(j=1,2,\cdots,N)$

$\alpha_{ls}=\alpha$．$(l,s=1,2,\cdots,N)$

(2) $-c_r=c_j=c$，$(r\neq j,j=1,2,\cdots,N)$

$\alpha_{ls}=(-1)^{\delta_{lr}}(-1)^{\delta_{sr}}\alpha$．$(l,s=1,2,\cdots,N)$

其中 $r=1,2,\cdots,N$．（每个 r 只能取一次）

(3) $-c_{r_1}=-c_{r_2}=c_j=c$，

$(r_1\neq r_2\neq j,j=1,2,\cdots,N)$

$\alpha_{ls}=[(-1)^{\delta_{l}r_1}(-1)^{\delta_{s}r_1}(-1)^{\delta_{l}r_2}(-1)^{\delta_{s}r_2}]\alpha$．

$(l,s=1,2,\cdots,N)$

其中 $r_1,r_2=1,2,\cdots,N(r_1<r_2)$.(每组$(r_1,r_2)$只能取一次)

$(n)\ -c_{r_1}=c_{r_2}=\cdots=-c_{r_{n-1}}=c_j=c,$

$(j\neq r_1\neq r_2\neq\cdots\neq r_{n-1},j=1,2,\cdots,N)$

$\alpha_{ls}=[(-1)^{\delta_l}r_1(-1)^{\delta_s}r_1\cdots(-1)^{\delta_l}r_{n-1}(-1)^{\delta_s}r_{n-1}]\alpha.$

$(l,s=1,2,\cdots,N)$

其中$r_1,r_2,\cdots,r_{n-1}=1,2,\cdots,N.$

$(r_1<r_2<\cdots<r_{n-1})$

(每组$(r_1,r_2,\cdots,r_{n-1})$只能取一次)

$(n+1)\ -c_{r_1}=c_{r_2}=\cdots=-c_{r_n}=c_j=c,$

$(j\neq r_1\neq r_2\neq\cdots\neq r_n,j=1,2,\cdots,N)$

$\alpha_{ls}=[(-1)^{\delta_l}r_1(-1)^{\delta_s}r_1\cdots(-1)^{\delta_l}r_n(-1)^{\delta_s}r_n]\alpha.$

$(l,s=1,2,\cdots,N)$

其中$r_1,r_2,\cdots,r_n=1,2,\cdots,N.$

$(r_1<r_2<,\cdots,<r_n)$

(每组$(r_1,r_2,\cdots,r_n)$只能取一次)

其中若 N 为偶数,$n=N/2$,若 N 为奇数,$n=(N-1)/2$.另外,δ_{rj}满足

$$\delta_{rj}=\begin{cases}1,r=j,\\0,r\neq j.\end{cases}$$

运用直接微扰方法,将方程(16)中的 E_m 展开为

$$E_m=\mathrm{e}^{\varepsilon(a_m+\mathrm{i}b_m)}(p_m(\xi,\tau)+\varepsilon q_m(\xi,\tau)+\cdots).\quad(m=1,2,\cdots,N)\tag{17}$$

其中 $a_m\equiv a_m(x,t),b_m\equiv b_m(x,t),\xi\equiv\xi(x,t,\varepsilon),\tau\equiv\tau(x,t,\varepsilon)$均为待定的实函数,并且$\{\xi,\tau\}$满足如下性质:

$$\{\xi,\tau\}\xrightarrow{\varepsilon\to0}\{x,t\},\tag{18}$$

即当 $\varepsilon\to0$ 时,p_m 为耦合非线性薛定谔方程的的精确解.

将展开式(17)代入微扰方程(16)得

$$\begin{aligned}&\mathrm{i}p_{m\xi}\xi_x+c_mp_{m\tau\tau}\tau_t^2+2\alpha_{mm}\mathrm{e}^{2\varepsilon a_m}|p_m|^2p_m+2\sum_{\substack{l=1\\(l\neq m)}}^N\alpha_{ml}\mathrm{e}^{2\varepsilon a_l}|p_l|^2p_m+\mathrm{i}\varepsilon q_{m\xi}\xi_x\\&+c_m\varepsilon q_{m\tau\tau}\tau_t^2+2\alpha_{mm}\mathrm{e}^{2\varepsilon a_m}\varepsilon(2|p_m|^2q_{m1}+p_m^2q_m^*)+2\varepsilon\sum_{\substack{l=1\\(l\neq m)}}^N\alpha_{ml}\mathrm{e}^{2\varepsilon a_l}(p_{l0}q_{m0}q_{l1}^*\\&+p_lq_mp_l^*+q_lp_mp_l^*)+\mathrm{i}\varepsilon(a_{mx}+\mathrm{i}b_{mx})p_m+c_m\varepsilon(a_{mtt}+\mathrm{i}b_{mtt})p_m+\mathrm{i}\varepsilon p_m+\mathrm{i}p_{m\tau}\tau_x\\&+c_mp_{m\tau}\tau_{tt}+2c_m\varepsilon(a_{mt}+\mathrm{i}b_{mt})p_{m\tau}\tau_t+c_mp_{m\xi}\xi_{tt}+2c_mp_{m\xi\tau}\xi_t\tau_t+\cdots=0.\end{aligned}\tag{19}$$

其中由于$\{\xi,\tau\}$有如(18)式的性质,所以 ξ_t,τ_x,τ_{tt}均为ε 的一阶项.令 ε 的相同次幂的系数均等于零,我们得到如下的各级近似方程:

$$\mathrm{i}p_{m\xi}\xi_x+c_mp_{m\tau\tau}\tau_t^2+2\alpha_{mm}\mathrm{e}^{2\varepsilon a_m}|p_m|^2p_m+2\sum_{\substack{l=1\\(l\neq m)}}^N\alpha_{ml}\mathrm{e}^{2\varepsilon a_l}|p_l|^2p_m=0.\tag{20}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{i}\varepsilon q_{m\xi}\xi_x+c_m\varepsilon q_{m\tau\tau}\tau_t^2+2\alpha_{mm}\mathrm{e}^{2\varepsilon a_m}\varepsilon(2|p_m|^2q_m+p_m^2q_m^*)+2\varepsilon\sum_{\substack{l=1\\(l\neq m)}}^N\alpha_{ml}\mathrm{e}^{2\varepsilon a_l}(p_lp_mq_l^*\\&+p_lq_mp_l^*+q_lp_mp_l^*)+\mathrm{i}\varepsilon(a_{mx}+\mathrm{i}b_{mx})p_m+c_m\varepsilon(a_{mtt}+\mathrm{i}b_{mtt})p_m+\mathrm{i}\varepsilon p_m+c_mp_{m\tau}\tau_{tt}\\&+2c_m\varepsilon(a_{mt}+\mathrm{i}b_{mt})p_{m\tau}\tau_t+\mathrm{i}p_{m\tau}\tau_x+c_mp_{m\xi}\xi_{tt}+2c_mp_{m\xi\tau}\xi_t\tau_t=0.\end{aligned}\tag{21}$$

我们知道,方程(20)中 p_m 是不显含ε 的函数,所以变量 ξ,τ 应满足关系式

$$\xi_x=\tau_t^2=\mathrm{e}^{2\varepsilon a_m}.(m=1,2,\cdots,N)\tag{22}$$

解之得 $a_m=a(x,t)$.并且(20)式中 p_m 为耦合非线性薛定谔方程

$$\mathrm{i}p_{m\xi}+c_mp_{m\tau\tau}+2\alpha_{mm}|p_m|^2p_m+2\sum_{\substack{l=1\\(l\neq m)}}^N\alpha_{ml}|p_l|^2p_m=0\tag{23}$$

的精确解.从展开式(17)中我们知道 q_m 是耦合非线性薛定谔方程的对称,即 q_m 是(23)式的线性化

方程

$$\mathrm{i}q_{m\xi}+c_mq_{m\tau\tau}+2\alpha_{mm}(|p_m|^2q_m+p_m^2q_m^*)+2\sum_{\substack{l=1\\(l\neq m)}}^{N}\alpha_{ml}(p_lp_mq_l^*+p_lq_mp_l^*+q_lq_mp_l^*)=0 \tag{24}$$

的解.它的最简单的两个解可以表示成

$$q_m=p_{m\tau},q_m=p_{m\xi}. \tag{25}$$

给定一组非平凡解 p_m 方程(21),(24)和(23)对于任意 x,t 都是相容的,所以方程(21)中其他项的系数应全部为零,即

$$\mathrm{i}a_x-b_{mx}+c_ma_{tt}+\mathrm{i}c_mb_{mtt}+\mathrm{i}=0,\xi_t\tau_t=0,$$
$$2c_m\epsilon a_t\tau_t+2\mathrm{i}c_m\epsilon b_{mt}\tau_t+\mathrm{i}\tau_x+c_m\tau_{tt}=0. \tag{26}$$

对以上式子进行求解,得到

$$a=-2x,b_m=t^2/2c_m,$$
$$\xi=(1-\mathrm{e}^{-4\varepsilon})/4\varepsilon,\tau=t\mathrm{e}^{-2\varepsilon x}. \tag{27}$$

这样,方程(16)的近似解可表示成

$$E_m=\mathrm{e}^{-2\varepsilon x+\mathrm{i}\varepsilon t^2/2c_m}(p_m+\varepsilon q_m). \tag{28}$$

其中 p_m 为无微扰的耦合非线性薛定谔方程(23)的任意一个精确解,q_m 是该耦合非线性薛定谔方程的无穷多个对称中的任意一个.我们知道,无微扰的耦合非线性薛定谔方程的众多的孤子解可以由许多不同的求解非线性偏微分方程的方法给出,包括逆散射方法[17],Hirota 双线性方法[18,19],Painlevé 分析法[20]等等.

当 $c_m=c=1,(m=1,2,\cdots,N),\alpha_{lm}=\alpha(l,m=1,2,\cdots,N)$时,方程组(23)的三孤子解可表示为[19]

$$p_j=\frac{\beta_1^{(j)}\mathrm{e}^{\eta_1}+\beta_2^{(j)}\mathrm{e}^{\eta_2}+\beta_3^{(j)}\mathrm{e}^{\eta_3}+\mathrm{e}^{\eta_1+\eta_1^*+\eta_2+\theta_{1j}}+\mathrm{e}^{\eta_1+\eta_1^*+\eta_3+\theta_{2j}}+\mathrm{e}^{\eta_2+\eta_2^*+\eta_1+\theta_{3j}}}{D}$$
$$+\frac{\mathrm{e}^{\eta_2+\eta_2^*+\eta_3+\theta_{4j}}+\mathrm{e}^{\eta_3+\eta_3^*+\eta_1+\theta_{5j}}+\mathrm{e}^{\eta_3+\eta_3^*+\eta_2+\theta_{6j}}+\mathrm{e}^{\eta_3+\eta_1^*+\eta_2+\theta_{7j}}+\mathrm{e}^{\eta_3+\eta_2^*+\eta_1+\theta_{8j}}+\mathrm{e}^{\eta_2+\eta_3^*+\eta_1+\theta_{9j}}}{D}$$
$$+\frac{\mathrm{e}^{\eta_1+\eta_1^*+\eta_2+\eta_2^*+\eta_3+\rho_{1j}}+\mathrm{e}^{\eta_1+\eta_1^*+\eta_2+\eta_3^*+\eta_3+\rho_{2j}}+\mathrm{e}^{\eta_1+\eta_3^*+\eta_2+\eta_2^*+\eta_3+\rho_{3j}}}{D}.(j=1,2,\cdots,N) \tag{29}$$

其中

$$\begin{aligned}D=&1+\mathrm{e}^{\eta_1+\eta_1^*+R_1}+\mathrm{e}^{\eta_2+\eta_2^*+R_2}+\mathrm{e}^{\eta_3+\eta_3^*+R_3}+\mathrm{e}^{\eta_1+\eta_2^*+\nu_{10}}+\mathrm{e}^{\eta_2+\eta_1^*+\nu_{10}^*}+\mathrm{e}^{\eta_1+\eta_3^*+\nu_{20}}\\&+\mathrm{e}^{\eta_3+\eta_1^*+\nu_{20}^*}+\mathrm{e}^{\eta_2+\eta_3^*+\nu_{30}}+\mathrm{e}^{\eta_3+\eta_2^*+\nu_{30}^*}+\mathrm{e}^{\eta_1+\eta_1^*+\eta_2+\eta_2^*+R_4}+\mathrm{e}^{\eta_1+\eta_1^*+\eta_3+\eta_3^*+R_5}\\&+\mathrm{e}^{\eta_3+\eta_3^*+\eta_2+\eta_2^*+R_6}+\mathrm{e}^{\eta_1+\eta_1^*+\eta_2+\eta_3^*+\omega_{10}}+\mathrm{e}^{\eta_1+\eta_1^*+\eta_3+\eta_2^*+\omega_{10}^*}+\mathrm{e}^{\eta_2+\eta_2^*+\eta_1+\eta_3^*+\omega_{20}}\\&+\mathrm{e}^{\eta_2+\eta_2^*+\eta_3+\eta_1^*+\omega_{20}^*}+\mathrm{e}^{\eta_3+\eta_3^*+\eta_1+\eta_2^*+\omega_{30}}+\mathrm{e}^{\eta_3+\eta_3^*+\eta_2+\eta_1^*+\omega_{30}^*}+\mathrm{e}^{\eta_1+\eta_1^*+\eta_2+\eta_2^*+\eta_3+\eta_3^*+R_7}.\end{aligned}$$

这里

$$\eta_r=k_r(\tau+\mathrm{i}k_r\xi),r=1,2,3,\mathrm{e}^{\theta_{1j}}=\frac{(k_1-k_2)(\beta_1^{(j)}\kappa_{21}-\beta_2^{(j)}\kappa_{11})}{(k_1+k_1^*)(k_1^*+k_2)},$$

$$\mathrm{e}^{\theta_{2j}}=\frac{(k_1-k_3)(\beta_1^{(j)}\kappa_{31}-\beta_3^{(j)}\kappa_{11})}{(k_1+k_1^*)(k_1^*+k_3)},\mathrm{e}^{\theta_{3j}}=\frac{(k_1-k_2)(\beta_1^{(j)}\kappa_{22}-\beta_2^{(j)}\kappa_{12})}{(k_1+k_2^*)(k_2^*+k_2)},$$

$$\mathrm{e}^{\theta_{4j}}=\frac{(k_2-k_3)(\beta_2^{(j)}\kappa_{32}-\beta_3^{(j)}\kappa_{22})}{(k_2+k_2^*)(k_2^*+k_3)},\mathrm{e}^{\theta_{5j}}=\frac{(k_1-k_3)(\beta_1^{(j)}\kappa_{33}-\beta_3^{(j)}\kappa_{13})}{(k_3+k_3^*)(k_3^*+k_1)},$$

$$\mathrm{e}^{\theta_{6j}}=\frac{(k_2-k_3)(\beta_2^{(j)}\kappa_{33}-\beta_3^{(j)}\kappa_{23})}{(k_2+k_3^*)(k_3^*+k_3)},\mathrm{e}^{\theta_{7j}}=\frac{(k_2-k_3)(\beta_2^{(j)}\kappa_{31}-\beta_3^{(j)}\kappa_{21})}{(k_3+k_1^*)(k_1^*+k_3)},$$

$$\mathrm{e}^{\theta_{8j}}=\frac{(k_1-k_3)(\beta_1^{(j)}\kappa_{32}-\beta_3^{(j)}\kappa_{12})}{(k_1+k_2^*)(k_2^*+k_3)},\mathrm{e}^{\theta_{9j}}=\frac{(k_1-k_2)(\beta_1^{(j)}\kappa_{23}-\beta_2^{(j)}\kappa_{13})}{(k_1+k_3^*)(k_2^*+k_3)},$$

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\rho_{1j}}=&\frac{(k_2-k_1)(k_3-k_1)(k_3-k_2)(k_2^*-k_1^*)}{(k_1+k_1^*)(k_2+k_2^*)(k_1^*+k_2)(k_1^*+k_3)(k_2^*+k_3)(k_2^*+k_1)}\\&\times[\beta_1^{(j)}(\kappa_{21}\kappa_{32}-\kappa_{22}\kappa_{31})+\beta_2^{(j)}(\kappa_{12}\kappa_{31}-\kappa_{32}\kappa_{11})+\beta_3^{(j)}(\kappa_{11}\kappa_{22}-\kappa_{12}\kappa_{21})],\end{aligned}$$

$$\mathrm{e}^{\rho_{2j}}=\frac{(k_2-k_1)(k_3-k_1)(k_3-k_2)(k_3^*-k_1^*)}{(k_1+k_1^*)(k_3+k_3^*)(k_1^*+k_2)(k_1^*+k_3)(k_3^*+k_2)(k_3^*+k_1)}$$

$$\times\left[\beta_1^{(j)}(\kappa_{21}\kappa_{33}-\kappa_{23}\kappa_{31})+\beta_2^{(j)}(\kappa_{13}\kappa_{31}-\kappa_{33}\kappa_{11})+\beta_3^{(j)}(\kappa_{11}\kappa_{23}-\kappa_{13}\kappa_{21})\right],$$

$$e^{\rho_{3j}}=\frac{(k_2-k_1)(k_3-k_1)(k_3-k_2)(k_3^*-k_3^*)}{(k_2^*+k_1)(k_2+k_2^*)(k_2^*+k_3)(k_1+k_3^*)(k_3^*+k_2)(k_3^*+k_3)}$$
$$\times\left[\beta_1^{(j)}(\kappa_{22}\kappa_{33}-\kappa_{23}\kappa_{32})+\beta_2^{(j)}(\kappa_{13}\kappa_{32}-\kappa_{33}\kappa_{12})+\beta_3^{(j)}(\kappa_{12}\kappa_{23}-\kappa_{22}\kappa_{13})\right],$$

$$e^{R_7}=\frac{|k_1-k_2|^2|k_2-k_3|^2|k_3-k_1|^2}{(k_1+k_1^*)(k_2+k_2^*)(k_3+k_3^*)|k_1+k_2^*|^2|k_2+k_3^*|^2|k_3+k_1^*|^2}$$
$$\times\left[(\kappa_{11}\kappa_{22}\kappa_{33}-\kappa_{11}\kappa_{23}\kappa_{32})+(\kappa_{12}\kappa_{23}\kappa_{31}-\kappa_{12}\kappa_{33}\kappa_{21})+(\kappa_{13}\kappa_{21}\kappa_{32}-\kappa_{31}\kappa_{22}\kappa_{13})\right]$$

$$e^{R_m}=\frac{\kappa_{mm}}{k_m+k_m^*},m=1,2,3\quad e^{\nu_{10}}=\frac{\kappa_{12}}{k_1+k_2^*},e^{\nu_{20}}=\frac{\kappa_{13}}{k_1+k_3^*},e^{\nu_{30}}=\frac{\kappa_{23}}{k_2+k_3^*},$$

$$e^{R_4}=\frac{(k_2-k_1)(k_2^*-k_1^*)(\kappa_{11}\kappa_{22}-\kappa_{12}\kappa_{21})}{(k_1+k_1^*)(k_1^*+k_2)(k_1+k_2^*)(k_2+k_2^*)},e^{R_5}=\frac{(k_3-k_1)(k_3^*-k_1^*)(\kappa_{33}\kappa_{11}-\kappa_{13}\kappa_{31})}{(k_1+k_1^*)(k_1^*+k_3)(k_1+k_3^*)(k_3+k_3^*)},$$

$$e^{R_6}=\frac{(k_3-k_2)(k_3^*-k_2^*)(\kappa_{33}\kappa_{22}-\kappa_{23}\kappa_{32})}{(k_2+k_2^*)(k_2^*+k_3)(k_2+k_3^*)(k_3+k_3^*)},e^{\omega_{10}}=\frac{(k_2-k_1)(k_3^*-k_1^*)(\kappa_{11}\kappa_{23}-\kappa_{13}\kappa_{21})}{(k_1+k_1^*)(k_1^*+k_2)(k_1+k_3^*)(k_2+k_3^*)},$$

$$e^{\omega_{20}}=\frac{(k_1-k_2)(k_3^*-k_2^*)(\kappa_{13}\kappa_{22}-\kappa_{12}\kappa_{23})}{(k_1+k_2^*)(k_2^*+k_2)(k_1+k_3^*)(k_2+k_3^*)},e^{\omega_{30}}=\frac{(k_3-k_1)(k_3^*-k_2^*)(\kappa_{33}\kappa_{12}-\kappa_{13}\kappa_{32})}{(k_1+k_2^*)(k_2^*+k_3)(k_1+k_3^*)(k_3+k_3^*)},$$

$\kappa_{rl}=\dfrac{\alpha\sum_{n=1}^{2}\beta_r^{(n)}\beta_l^{(n)*}}{k_r+k_l^*}(r,l=1,2,3)$. k_r 和 $\beta_r^{(j)}(r=1,2,3,j=1,2,\cdots,N)$为$(3N+1)$个任意的复常数.这样,一阶修正 $q_j(j=1,2,\cdots,N)$和中间变量 ξ,τ 可以分别通过(25)和(27)式给出.

图2给出了 $N=2,c_m=1\ (m=1,2)$, $\alpha_{lm}=1(l,m=1,2)$时方程(23)的三孤子解(29)的强度$|p_1|^2$的演化(图2(a)),以及微扰的耦合非线性薛定谔方程(16)的三孤子解(28)的强度$|E_1|^2$的演化(图2(b)),(28)式中 p_m 和 $q_m(m=1,2)$分别由(29)和(25)式给定($|p_2|^2$ 和$|E_2|^2$ 的演化与$|p_1|^2$ 和$|E_1|^2$ 的情况类似,这里不赘述).在微扰项 $-i\varepsilon E_{1,2}$的作用下每个解中的三个孤子的振幅都将随着 x 的增加逐渐衰减,而且微扰参量 ε 越大,衰减得越快.

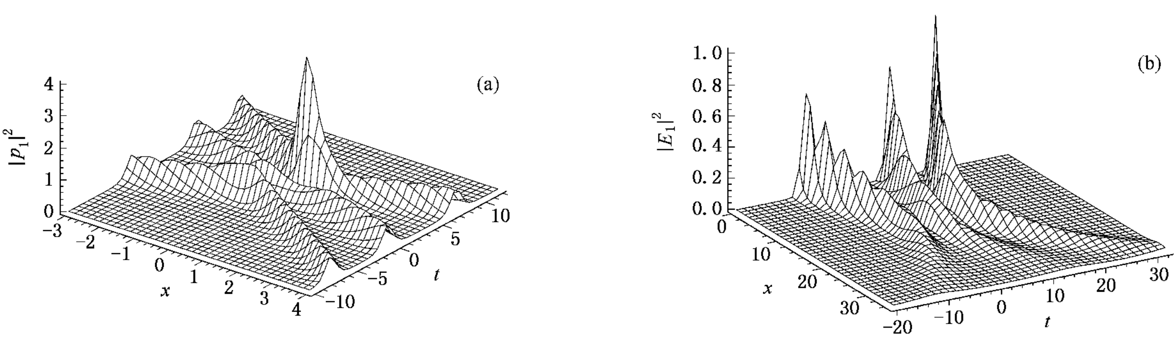

图2 $N=2$ 时耦合非线性薛定谔方程(23)的三孤子解的强度$|p_1|^2$ 的演化(a),以及微扰耦合方程(16)的三孤子解的强度$|E_1|^2$ 的演化(b) (29)式中参数取为 $c_m=1(m=1,2)$,$\alpha_{lm}=1(l,m=1,2)$,$k_1=1.2+0.5i$,$k_2=1.2-0.5i$,$k_3=1.5-i$,$\beta_1^{(1)}=\beta_2^{(1)}=\beta_1^{(2)}=\beta_2^{(2)}=\beta_3^{(1)}=\beta_3^{(2)}=1$ 和 $\varepsilon=0.03$

4. 结 论

本文首先将直接微扰方法应用于可积的含修正项的非线性薛定谔方程中,借助 Maple 工具,把得到的近似解与其精确解进行比较,确定了直接微扰方法的可靠性.进一步,发现直接微扰方法也适合于微扰的耦合非线性薛定谔方程,并构建出了该微扰方程的近似解.通常针对不同形式的非线性演化方程的解(如边界条件不同的解)需要采用不同的微扰方法.但是,本文所采用的直接微扰方法可以同时处理所有不同形式的解的微扰问题.对于同一个零级解

还可以有很多不同的对称作为其一级修正，从而得出很多不同形式的近似解，所以采用这种直接微扰方法得到的微扰解的形式要比一般的微扰理论得到的解丰富得多.另外，我们希望用这种直接微扰方法得到的解能够在实验上得到检验并得以应用.

通过与精确解的比较，发现当 ε 不再是小量时，直接微扰方法给出的近似解与精确解的相对误差将超过我们所希望的精确度，尤其是当传输距离增加时.这时希望能有更高阶的修正，或者发展出更好的微扰理论来研究含修正项的非线性演化方程.至于如何将该直接微扰方法应用于含有其他形式的微扰项的非线性薛定谔方程，如微扰项 $\varepsilon P(u)=\varepsilon|u|^4u$，$\varepsilon u(|u|^2)_t$，$\varepsilon u_{xxx}$ 等等，以及如何将该直接微扰方法推广到其他微扰的非线性演化方程，如微扰的 KdV 方程，微扰的 sG 方程等都还有待进一步的研究.

[1] Dysthe K B, Pécscli H L 1977 *Plasma Physics* **19** 931

[2] Chen Y Y, Wang Q, Shi J L 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1070 (in Chinese) [陈圆圆、王　奇、施解龙 2004 物理学报 **53** 1070]
Xie Y Q, Guo Q 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3021 (in Chinese) [谢逸群、郭　旗 2004 物理学报 **53** 3021]

[3] Sakuma T, Kawanami Y 1984 *Phys. Rev.* B **29** 880

[4] Zakharov V E, Shabat A B 1972 *Sov. Phys. JETP* **34** 62

[5] Chen H H 1974 *Phys. Rev. Lett.* **33** 925

[6] Hao R Y, Li L, Li Z H, Xue W R, Zhou G S 2004 *Opt. Commu.* **236** 79

[7] Abdullaev F K, Gaputo J G, Flytzanis N 1994 *Phys. Rev.* E **50** 1552

[8] Kaup D J 1990 *Phys. Rev.* A **42** 5689

[9] Chen S R, Chen Z D, Yuan X Z, Huang N N 1999 *Chin. Phys.* **8** 590
Tang Y, Yan J R, Zhang K W, Chen Z H 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 480 (in Chinese) [唐　翌、颜家壬、张凯旺、陈振华 1999 物理学报 **48** 480]

[10] Lou S Y 1999 *Chin. Phys. Lett.* **16** 659

[11] Lou S Y, Chen W Z 1993 *Phys. Lett.* A **179** 271

[12] Xiao Y, Guo Q 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5201 (in Chinese) [肖　毅、郭　旗 2005 物理学报 **54** 5201]

[13] Yan X L, Dong R X, Wang B Y 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 751 (in Chinese) [闫循领、董瑞新、王伯运 1999 物理学报 **48** 751]

[14] Hioe F T 2002 *Phys. Lett.* A **304** 30

[15] Kivshar Y S, Malomed B A 1989 *Rev. Mod. Phys.* **61** 763

[16] Sahadevan R, Tamizhmani K M, Lakshmanan M 1986 *J. Phys.* A **19** 1783

[17] Manakov S V 1974 *Sov. Phys. JETP* **38** 248

[18] Kanna T, Tsoy E N, Akhmediev N 2004 *Phys. Lett.* A **330** 224
Porsezian K 1998 *J. Non. Math. Phys.* **5** 126

[19] Kanna T, Lakshmanan M 2003 *Phys. Rev.* E **67** 046617

[20] Radhakrishnan R, Sahadevan R, Lakshmanan M 1995 *Chaos, Solitons and Fractals* **5** 2315

Asymptotic solutions of perturbed N-component nonlinear Schrödinger equations*

Cheng Xue-Ping Lin Ji† Wang Zhi-Ping

(*Institute of Nonlinear Physics*, *Zhejiang Normal University*, *Jinhua* 321004, *China*)

(Received 9 June 2006; revised manuscript received 13 October 2006)

Abstract

We apply the direct perturbation method to an integrable nonlinear Schrödinger equation with a correction term to obtain its asymptotic solutions. It is shown that there is a good qualitative agreement between the asymptotic and the exact solutions when ε is small enough. Then the direct perturbation method is applied to the perturbed N-component nonlinear Schrödinger equations and their asymptotical solutions are obtained.

Keywords: direct perturbation method, perturbation, perturbed N-component nonlinear Schrödinger equation, asymptotical solution

PACC: 0260, 0340K, 4735

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10575087) and the Natural Science Foundation of Zhejiang Province of China (Grant No. 102053).

† Corresponding autthor. E-mail: linji@zjnu.cn