第 56 卷 第 6 期 2007 年 6 月
1000-3290/2007/56(06)/3039-04
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.56,No.6,June,2007

Hamilton 系统 Mei 对称性的一种新守恒量

方建会† 丁 宁 王 鹏

(中国石油大学(华东)物理科学与技术学院,东营 257061)

(2006 年 9 月 21 日收到;2006 年 10 月 20 日收到修改稿)

研究 Hamilton 系统的 Mei 对称性直接导致的一种新守恒量.给出 Hamilton 系统的 Mei 对称性的定义和判据方程,引入谐调函数,得到系统 Mei 对称性直接导致新守恒量的条件和形式,并给出应用算例.结果表明,谐调函数可根据寻找规范函数的需要适当选取,从而使规范函数的寻求变得比较容易,而且由于谐调函数的选取具有多样性,因此能够找到系统 Mei 对称性的更多的守恒量.

关键词:Hamilton 系统,Mei 对称性,新守恒量

PACC:0320

1.引 言

动力学系统的对称性与守恒量在现代数学、力学和物理学中占有重要地位.利用对称性寻求力学系统的守恒量的近代方法主要有:Noether 对称性[1]、Lie 对称性[2]和 Mei 对称性(即形式不变性)[3,4].近年来,动力学系统的三种主要对称性及其守恒量研究倍受人们关注,是一个热门的研究领域,取得了一系列重要成果[5—19].三种主要对称性可直接导致守恒量,也可间接导致守恒量[19].它们导致的守恒量主要有 Noether 守恒量、Hojman 守恒量和 Mei 守恒量(也称新型守恒量)[19].Noether 对称性能直接导致 Noether 守恒量,间接导致 Hojman 守恒量和 Mei 守恒量;Lie 对称性能直接导致 Hojman 守恒量,间接导致 Noether 守恒量和 Mei 守恒量;Mei 对称性能直接导致 Mei 守恒量,间接导致 Noether 守恒量和 Hojman 守恒量.

本文研究 Hamilton 系统的 Mei 对称性直接导致的一种新守恒量,给出 Hamilton 系统的 Mei 对称性直接导致新守恒量的条件和形式,并举例说明结果的应用.Hamilton 系统的 Mei 守恒量是本文给出的新守恒量的特例.

2.系统的 Mei 对称性及其判据方程

Hamilton 系统的运动微分方程为

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s}, \tag{1}$$

其中 $H = H(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ 是系统的 Hamilton 函数,q_s 为广义坐标,$\dot{q}_s$ 为广义速度,p_s 为广义动量.

引入无限小变换

$$\begin{aligned} t^* &= t + \varepsilon\xi_0(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}), \\ q_s^*(t^*) &= q_s(t) + \varepsilon\xi_s(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}), \\ p_s^*(t^*) &= p_s(t) + \varepsilon\eta_s(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}), \end{aligned} \tag{2}$$

其中 ε 为无限小参数,ξ_0, ξ_s, η_s 为无限小单参数群变换的生成元.在无限小变换(2)下,$H = H(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ 变成 $H^* = H(t^*, \boldsymbol{q}^*, \boldsymbol{p}^*)$.

定义 在无限小变换(2)下,如果 Hamilton 系统(1)的动力学函数仍满足原来方程,即

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H^*}{\partial p_s}, \dot{p}_s = -\frac{\partial H^*}{\partial q_s}, \tag{3}$$

则称这种不变性为 Hamilton 系统(1)的 Mei 对称性.

判据 对 Hamilton 系统(1),如果无限小变换的生成元 ξ_0, ξ_s, η_s 满足方程

$$\frac{\partial}{\partial p_s}(X^{(0)}(H)) = 0, \frac{\partial}{\partial q_s}(X^{(0)}(H)) = 0, \tag{4}$$

则相应的不变性为系统的 Mei 对称性,其中

† E-mail:fangjh@hdpu.edu.cn

$$X^{(0)} = \xi_0 \frac{\partial}{\partial t} + \xi_s \frac{\partial}{\partial q_s} + \eta_s \frac{\partial}{\partial p_s}. \tag{5}$$

证明 展开 H^* 有

$$\begin{aligned} H^* &= H(t^*, \boldsymbol{q}^*, \boldsymbol{p}^*) \\ &= H(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) + \varepsilon X^{(1)}(H) + O(\varepsilon^2) \\ &= H(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) + \varepsilon X^{(0)}(H) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{6}$$

其中

$$X^{(1)} = X^{(0)} + \left(\frac{\bar{d}\xi_s}{dt} - \frac{\partial H}{\partial p_s}\frac{\bar{d}\xi_0}{dt}\right)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} + \left(\frac{\bar{d}\eta_s}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q_s}\frac{\bar{d}\xi_0}{dt}\right)\frac{\partial}{\partial \dot{p}_s}, \tag{7}$$

$$\frac{\bar{d}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial p_s}\frac{\partial}{\partial q_s} - \frac{\partial H}{\partial q_s}\frac{\partial}{\partial p_s}. \tag{8}$$

将(6)式代入方程(3)，并利用方程(1)，忽略 ε^2 及以上高阶小项，便可得方程(4). 称方程(4)为 Hamiltion 系统 Mei 对称性的判据方程.

3. 系统 Mei 对称性的新守恒量

下述定理给出了 Hamilton 系统 Mei 对称性直接导致新守恒量的条件和形式.

定理 如果 Hamilton 系统(1)的 Mei 对称性的生成元 ξ_0, ξ_s, η_s 和规范函数 $G_M = G_M(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ 满足条件

$$X^{(0)}(p_s)\frac{\bar{d}\xi_s}{dt} + \frac{\bar{d}}{dt}[X^{(0)}(p_s)]\xi_s - \frac{\partial X^{(0)}(H)}{\partial t}f - X^{(0)}(H)\frac{\bar{d}f}{dt} + \frac{\bar{d}G_M}{dt} = 0, \tag{9}$$

则系统存在如下的新守恒量：

$$I_M = X^{(0)}(p_s)\xi_s - X^{(0)}(H)f + G_M = \text{const}. \tag{10}$$

其中 $f = f(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ 为使规范函数 G_M 存在的任意函数,称 f 为谐调函数.

证明

$$\begin{aligned} \frac{\bar{d}I_M}{dt} &= X^{(0)}(p_s)\frac{\bar{d}\xi_s}{dt} + \frac{\bar{d}}{dt}[X^{(0)}(p_s)]\xi_s \\ &\quad - X^{(0)}(H)\frac{\bar{d}f}{dt} \\ &\quad - \left[\frac{\partial X^{(0)}(H)}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial p_s}\frac{\partial X^{(0)}(H)}{\partial q_s} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial H}{\partial q_s}\frac{\partial X^{(0)}(H)}{\partial p_s}\right]f + \frac{\bar{d}G_M}{dt}. \end{aligned} \tag{11}$$

将(4)式代入(11)式,并利用(9)式,可得

$$\frac{\bar{d}I_M}{dt} = 0. \tag{12}$$

特例 如果取 $f = \xi_0$,则(9)式和(10)式分别化为

$$X^{(0)}(p_s)\frac{\bar{d}\xi_s}{dt} + \frac{\bar{d}}{dt}[X^{(0)}(p_s)]\xi_s - X^{(0)}[X^{(0)}(H)] - X^{(0)}(H)\frac{\bar{d}\xi_0}{dt} + \frac{\bar{d}G_M}{dt} = 0, \tag{13}$$

$$I_M = X^{(0)}(p_s)\xi_s - X^{(0)}(H)\xi_0 + G_M = \text{const}. \tag{14}$$

(13)式就是 Hamilton 系统 Mei 对称性导致 Mei 守恒量的条件,而(14)式正是 Hamilton 系统 Mei 对称性导致的 Mei 守恒量.

称新守恒量(10)为 Hamilton 系统的广义 Mei 守恒量.

4. 算 例

力学系统的 Hamilton 函数为

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + q_1 + q_2, \tag{15}$$

试研究其 Mei 对称性的广义 Mei 守恒量.

运动微分方程(1)给出

$$\begin{aligned} &\dot{q}_1 = p_1, \dot{q}_2 = p_2, \dot{q}_3 = p_3, \\ &\dot{p}_1 = -1, \dot{p}_2 = -1, \dot{p}_3 = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

做计算有

$$X^{(0)}(H) = \eta_1 p_1 + \eta_2 p_2 + \eta_3 p_3 + \xi_1 + \xi_2. \tag{17}$$

若取

$$\begin{aligned} &\xi_0 = 2, \xi_1 = p_1, \xi_2 = t, \xi_3 = 1, \\ &\eta_1 = -1, \eta_2 = 0, \eta_3 = 0, \end{aligned} \tag{18}$$

则 $X^{(0)}(H) = t$, $X^{(0)}(p_1) = -1$, $X^{(0)}(p_2) = 0$, $X^{(0)}(p_3) = 0$,系统 Mei 对称性的判据方程(4)满足.

利用(9)式可得

$$\frac{\bar{d}G_M}{dt} = f + t\frac{\bar{d}f}{dt} - 1. \tag{19}$$

选取 $f = p_2$ 则有

$$G_M = q_2 - \frac{1}{2}t^2 - t, \tag{20}$$

(10)式给出

$$I_M = -p_1 - tp_2 + q_2 - \frac{1}{2}t^2 - t = \text{const}. \tag{21}$$

选取 $f = p_1 + p_3$ 则有

$$G_M = q_1 + q_3 - \frac{1}{2}t^2 - t = \text{const}, \tag{22}$$

(10)式给出

$$I_M = -p_1 - t(p_2 + p_3) + q_1 + q_3 - \frac{1}{2}t^2 - t = \text{const}. \tag{23}$$

当选取 $f = \xi_0$ 时，则有

$$G_M = t, \tag{24}$$

$$I_M = -t - p_1 = \text{const}. \tag{25}$$

5. 结　语

本文给出的 Hamilton 系统 Mei 对称性的新守恒量——广义 Mei 守恒量具有更一般的意义，系统的 Mei 守恒量是广义 Mei 守恒量在 $f = \xi_0$ 时的特例. 本文结果中的谐调函数 f 可以根据寻找规范函数 G_M 的需要适当选取，从而使规范函数的寻求变得比较容易，而且由于谐调函数 f 的选取具有多样性，因此使我们能够找到系统 Mei 对称性的更多的守恒量.

[1] Noether A E 1918 *Nachr Akad wiss Göttingen Math. Phys.* KI Ⅱ 235

[2] Lutzky M 1979 *J. Phys A: Math Gen.* **12** 973

[3] Mei F X 2000 *J. Beijing Inst. Technol.* **9** 120

[4] Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 177

[5] Wu R H, Mei F X 1997 *J. Beijing Inst. Technol.* **6** 229

[6] Luo S K 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 597

[7] Fu J L, Chen L Q 2003 *Phys. Lett.* A **317** 255

[8] Zhang Y, Mei F X 2003 *Chin. Phys.* **12** 1058

[9] Mei F X, Xu X J, Zhang Y F 2004 *Acta. Mech. Sin.* **20** 668

[10] Fang J H, Yan X H, Li H, Chen P S 2004 *Commun. Theor. Phys.* **42** 19

[11] Wu H B 2004 *Chin. Phys.* **13** 589

[12] Zhang H B, Chen L Q 2005 *J. Phys. Soc. Japan* **74** 905

[13] Chen X W, Li Y M, Zhao Y H 2005 *Phys. Lett.* A **337** 274

[14] Fang J H, Liao Y P, Peng Y 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 500 (in Chinese) [方建会、廖永潘、彭　勇 2005 物理学报 **54** 500]

[15] Fang J H, Peng Y, Liao Y P 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 496 (in Chinese) [方建会、彭　勇、廖永潘 2005 物理学报 **54** 496]

[16] Qiao Y F, Zhao S H 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 499 (in Chinese) [乔永芬、赵淑红 2006 物理学报 **55** 499]

[17] Chen X W, Liu C M, Li Y M 2006 *Chin. Phys.* **15** 470

[18] Mei F X 1999 *Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [梅凤翔 1999 李群李代数对约束力学系统的应用 (北京：科学出版社)]

[19] Mei F X 2004 *Symmetries and Conserved Quantities of Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔 2004 约束力学系统的对称性与守恒量 (北京：北京理工大学出版社)]

A new type of conserved quantity of Mei symmetry for Hamilton system

Fang Jian-Hui† Ding Ning Wang Peng

(*College of Physics Science and Technology*, *China University of Petroleum* (*East China*), *Dongying* 257061, *China*)

(Received 21 September 2006; revised manuscript received 20 October 2006)

Abstract

A new type of conserved quantity which is directly induced by Mei symmetry of Hamilton system is studied. Firstly, the definition and criterion of Mei symmetry for Hamilton system are given. Secondly, a coordination function is introduced; the conditions from which the new type of conserved quantity can be induced by Mei symmetry and the form of the new type of conserved quantity are obtained. Lastly, an illustration example is given. The result indicates that the coordination function should be selected properly according to the demand of the gauge function, thereby the gauge function can be find out more easily. Furthermore, since the choice of the coordination function is not unique more conserved quantities of Mei symmetry for Hamilton system can be obtained.

Keywords: Hamilton system, Mei symmetry, new conserved quantity

PACC: 0320

† E-mails: fangjh@hdpu.edu.cn