第 56 卷 第 6 期 2007 年 6 月
1000-3290/2007/56(06)/3101-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.56，No.6，June，2007

一类参数不确定混沌系统的延迟同步*

贾飞蕾† 徐 伟

(西北工业大学理学院应用数学系，西安 710072)

(2006 年 9 月 19 日收到；2006 年 10 月 25 日收到修改稿)

针对一类混沌系统，研究了参数未知的混沌系统的延迟同步. 基于 Lyapunov 稳定性定理，给出了延迟同步控制器和参数自适应律的解析表达式. 该方法简单、适用范围广. 以新混沌系统为例，数值模拟说明了该方法的有效性和可行性. 通过研究有界噪声作用下该系统的控制效果，表明了该方法具有较强的鲁棒性和抗干扰能力.

关键词：延迟同步，Lyapunov 稳定性定理，新混沌系统，有界噪声

PACC：0545

1. 引 言

由于混沌系统对初值极端敏感，初值十分接近的任意两条轨道会很快分离并变得毫不相关，混沌同步被认为是几乎不可能的，自从 Pecora 和 Carroll[1] 于 1990 年首次提出混沌的驱动-响应同步方法，混沌同步及其在保密通信、信息科学、生物等领域的应用引起了人们的广泛兴趣[2—4]. 至今，人们已提出了各种不同的混沌控制与混沌同步的方法，如完全同步(CS)[5]、广义同步(GS)[6]、相同步(PS)[7]、噪声引起的同步[8]、延迟同步(LS)[9—11]等等，这些方法的理论和实验已得到了广泛的应用.

最近由于混沌在通信保密中的潜在应用，两个相同混沌系统的延迟同步引起了相当的关注. Li[9] 通过选择合适的非线性函数和构造输出信号提出了一种延迟混沌同步方法，实现了两个 Rössler 混沌系统和 Chua 混沌系统分别延迟同步. Chen[10] 研究了结构不等价的时滞混沌系统 Mackey-Glass 和 Ikeda 的延迟同步. Shahverdiev[11] 研究了单向耦合时滞混沌系统的延迟同步，得到了延迟时间和耦合延迟相等的结论. 这些延迟混沌同步方法大都是基于对模型及其系统参数都准确了解的基础上实现的，实际上，由于环境等因素的影响，混沌系统的参数可能会发生一些变化，即许多混沌系统具有参数不确定性，即使小的参数匹配误差也将导致完全不同的行为. 因此，研究混沌系统参数不确定的延迟同步具有十分重要的价值.

本文提出了一种基于系统参数辨识的延迟混沌同步方法. 针对延迟混沌动力学系统参数未知的情况，根据 Lyapunov 稳定性理论，给出了延迟控制器和参数自适应律的解析表达式. 将该方法应用于新混沌系统，实现了延迟同步. 数值模拟还证明，该方法对有界噪声的影响具有一定的抗干扰能力.

2. 理论分析

定义 1 考虑两个动力学系统如下：

$$\dot{x} = G(x), \tag{1}$$

$$\dot{y} = G(y), \tag{2}$$

其中 $x \in R^n$，$y \in R^n$ 为系统的状态向量，$G: R^n \to R^n$ 为非线性向量函数，如果

$$e(t) = y(t) - x(t-\tau) \to 0,\text{当 } t \to \infty, \tag{3}$$

则称系统(1)和(2)延迟同步，其中 e 为延迟同步误差，$\tau > 0$ 为同步延迟.

在本文中，讨论参数不确定的混沌系统的延迟同步，动力学系统(1)和(2)可以写为

$$\dot{x} = f(x) + F(x)\theta, \tag{4}$$

$$\dot{y} = f(y) + F(y)\hat{\theta} + u, \tag{5}$$

其中 $x \in R^n$，$y \in R^n$ 为系统的状态向量，$f \in R^n$，$F \in R^{n\times n}$，$\theta \in R^n$ 为未知的参数向量，$\hat{\theta} \in R^n$ 为未

* 国家自然科学基金(批准号：10472091，10332030)和西北工业大学研究生创业种子基金(批准号：Z200655)资助的课题.

† E-mail：feileijia@mail.nwpu.edu.cn

知参数向量 θ 的估计值，$u \in R^n$ 为延迟控制器. 称(4)式和(5)式分别为驱动系统和响应系统.

将(4)式和(5)式代入(3)式，则有

$$\dot{e} = f(y) + F(y)\hat{\theta} - f(x(t-\tau)) - F(x(t-\tau))\theta + u, \tag{6}$$

根据定义 1，可以将参数不确定混沌系统的延迟同步问题转化为延迟同步误差系统在原点的渐近稳定性问题. 因此，我们的目的是选择适当的延迟控制器 u 和参数自适应律 $\dot{\hat{\theta}}$，使(6)式在原点渐近稳定，即响应系统(5)和驱动系统(4)延迟同步.

定理 1 对于驱动系统(4)式和响应系统(5)式，若选择延迟控制器

$$u = -f(y) + f(x(t-\tau)) - (F(y) - F(x(t-\tau)))\theta - ke, \tag{7}$$

参数自适应律

$$\dot{\hat{\theta}} = -(F(y))^{\mathrm{T}} e, \tag{8}$$

则系统(4)和(5)延迟同步，其中同步延迟 $\tau > 0$，$k > 0$ 为常数.

证明 选取 Lyapunov 函数为

$$V = \frac{1}{2}e^{\mathrm{T}}e + \frac{1}{2}\tilde{\theta}^{\mathrm{T}}\tilde{\theta},$$

其中 $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta$.

对 Lyapunov 函数 V 求导，则有

$$\dot{V} = \frac{1}{2}(\dot{e}^{\mathrm{T}}e + e^{\mathrm{T}}\dot{e}) + \frac{1}{2}(\dot{\tilde{\theta}}^{\mathrm{T}}\tilde{\theta} + \tilde{\theta}^{\mathrm{T}}\dot{\tilde{\theta}}), \tag{9}$$

将(6)，(7)，(8)式代入(9)式，可以得到

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{1}{2}(\tilde{\theta}^{\mathrm{T}}(F(y))^{\mathrm{T}} - ke^{\mathrm{T}})e + \frac{1}{2}e^{\mathrm{T}}(F(y)\tilde{\theta} - ke) \\ &\quad + \frac{1}{2}(-e^{\mathrm{T}}F(y)\tilde{\theta} - \tilde{\theta}^{\mathrm{T}}(F(y))^{\mathrm{T}}e) \\ &= -ke^{\mathrm{T}}e < 0.\end{aligned}$$

由于 V 是正定的，$\dot{V}$ 是负定的，根据 Lyapunov 稳定性定理，延迟同步误差系统(6)式在原点渐近稳定，即驱动系统(4)和响应系统(5)延迟同步. 证毕.

注 1 系统(3)描述了许多典型的混沌系统和新混沌系统，例如 Lorenz 系统、Chen 系统、Rössler 系统、Duffing 系统、统一混沌系统[12]、新系统[16].

注 2 如果 $\tau = 0$，此时参数不确定混沌系统的延迟同步问题已经退化为系统参数不确定的完全同步的问题，这方面已经被深入地研究[13—15].

3. 参数不确定新混沌系统的延迟同步

最近，在研究混沌反控制的时候，Chen 和 Lee 介绍了一个新混沌系统[16]，该混沌系统的模型可写为

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = ax_1 - x_2x_3, \\ \dot{x}_2 = bx_2 + x_1x_3, \\ \dot{x}_3 = cx_3 + (1/3)x_1x_2,\end{cases} \tag{10}$$

其中 x_1, x_2, x_3 是系统的状态变量，a, b, c 是系统的三个参数，当参数取值为 $a = 5.0, b = -10.0, c = -3.8$，初值 $[x_1, x_2, x_3]^{\mathrm{T}} = [0.5, -1.0, 1.5]^{\mathrm{T}}$ 时，系统(10)存在如图 1 所示的奇怪吸引子[16].

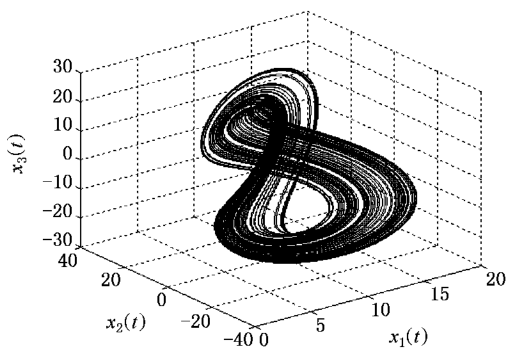

图 1 系统(10)的奇怪吸引子 $a = 5.0, b = -10.0, c = -3.8$

可将(10)式化为(4)式的形式

$$\dot{x} = f(x) + F(x)\theta, \tag{11}$$

其中 $x = [x_1, x_2, x_3]^{\mathrm{T}}$ 是系统的状态向量，$f(x) = \begin{pmatrix} -x_2x_3 \\ x_1x_3 \\ (1/3)x_1x_2 \end{pmatrix}$，$F(x) = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix}$，$\theta = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$，$\theta$ 为未知参数向量. 称(11)式为驱动系统.

响应系统可以表示如下

$$\dot{y} = f(y) + F(y)\hat{\theta} + u, \tag{12}$$

其中 $y = [y_1, y_2, y_3]^{\mathrm{T}}$ 是系统的状态向量，$f(y) = \begin{pmatrix} -y_2y_3 \\ y_1y_3 \\ (1/3)y_1y_2 \end{pmatrix}$，$F(y) = \begin{pmatrix} y_1 & 0 & 0 \\ 0 & y_2 & 0 \\ 0 & 0 & y_3 \end{pmatrix}$，$u = [u_1, u_2, u_3]^{\mathrm{T}}$ 为延迟控制器，$\hat{\theta} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$，参数 a_1, b_1, c_1 分别是参数 a, b, c 的估计值.

根据定理 1，选择延迟控制器

$$\begin{aligned}u &= -f(y) + f(x(t-\tau)) - (F(y) - F(x(t-\tau)))\theta - ke \\ &= \begin{pmatrix} -ae_1 + e_2e_3 + x_2e_3 + x_3e_2 - ke_1 \\ -be_2 - e_1e_3 - x_1e_3 - x_3e_1 - ke_2 \\ -ce_3 - (1/3)(e_1e_2 + x_1e_2 + x_2e_1) - ke_3 \end{pmatrix},\end{aligned} \tag{13}$$

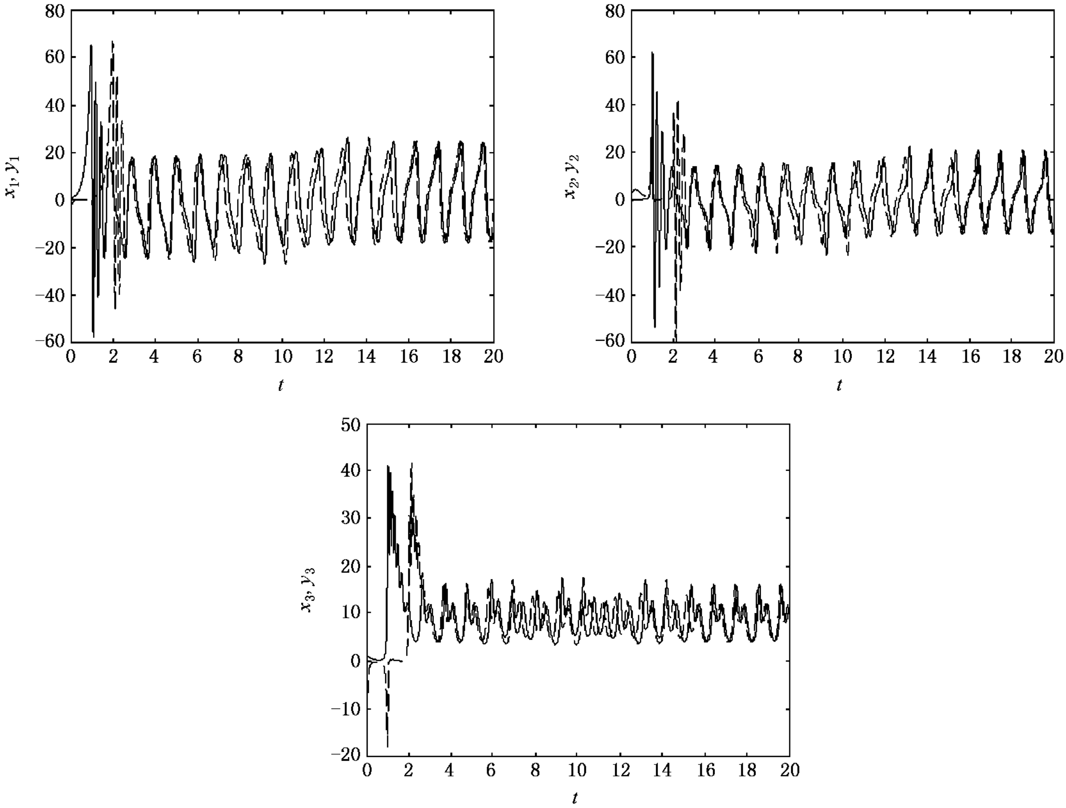

图 2　驱动系统(11)和响应系统(12)的时间历程图　(实线代表 $\boldsymbol{x}=[x_1, x_2, x_3]^{\mathrm{T}}$，虚线代表 $\boldsymbol{y}=[y_1, y_2, y_3]^{\mathrm{T}}$)

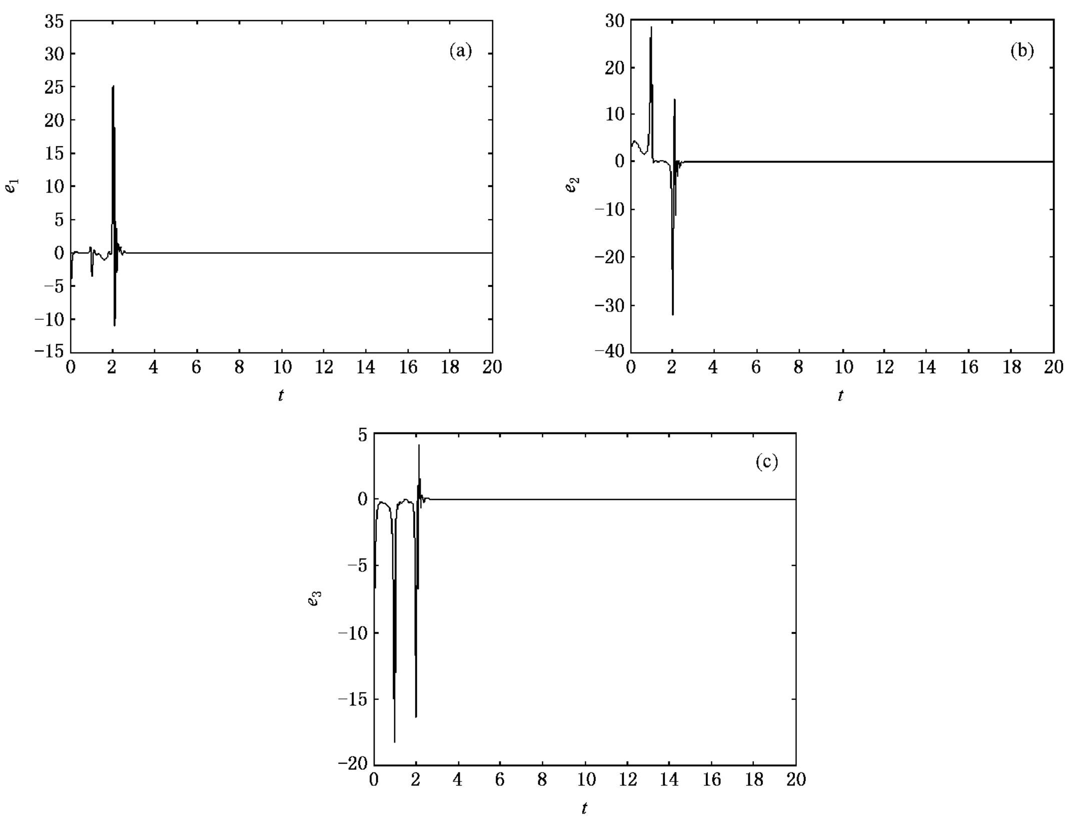

图 3　延迟同步误差时间历程图　(a) $e_1=y_1(t)-x_1(t-\tau)$；(b) $e_2=y_2(t)-x_2(t-\tau)$；(c) $e_3=y_3(t)-x_3(t-\tau)$

参数自适应律

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = -(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} -y_1e_1 \\ -y_2e_2 \\ -y_3e_3 \end{pmatrix}. \qquad (14)$$

因而,在延迟控制器(13)和参数自适应律(14)的作用下,驱动系统(11)和响应系统(12)延迟同步.

数值仿真中采用步长为 $h=0.0001$ 的四阶-龙格库塔方法,设驱动系统(11)式的初始值取为 $\boldsymbol{x}_0=[0.5,-1.0,1.5]^{\mathrm{T}}$,响应系统(12)式的初始值为 $\boldsymbol{y}_0=[-11.5,2.0,-12.5]^{\mathrm{T}}$,参数估计的初始值取为 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_0=[4.8,12.7,5.1]^{\mathrm{T}}$,常数 $k=20$,取同步延迟 $\tau=1$.控制律 $U=\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}$.图 2 显示了驱动系统(11)式和响应系统(12)式的延迟同步曲线.图 3 表示了延迟同步误差系统 $\boldsymbol{e}=[e_1,e_2,e_3]^{\mathrm{T}}$ 的收敛曲线.从图 2 和图 3 可以看出,通过选择控制器(13)式、参数自适应律(14)式,新混沌系统(11)式和(12)式实现了延迟同步,延迟同步误差 $\boldsymbol{e}=[e_1,e_2,e_3]^{\mathrm{T}}$ 快速收敛于零.图 4 给出了参数鉴定结果,表明了参数估计值 a_1,b_1,c_1 随着时间的增大分别趋于它们的真实值 a,b,c.图 5 显示了控制律 U 随时间的增大逐渐趋于零,这表明响应系统(12)式的混沌动力学特性不会被改变.

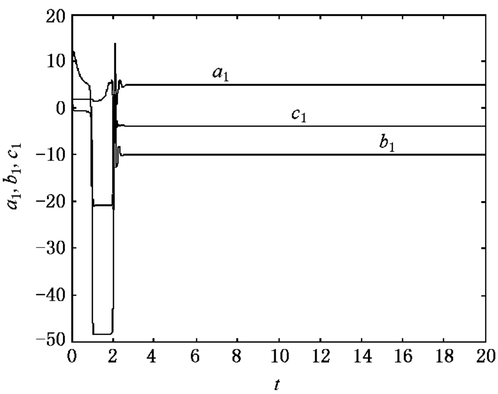

图 4 响应系统(12)式参数估计值时间历程图

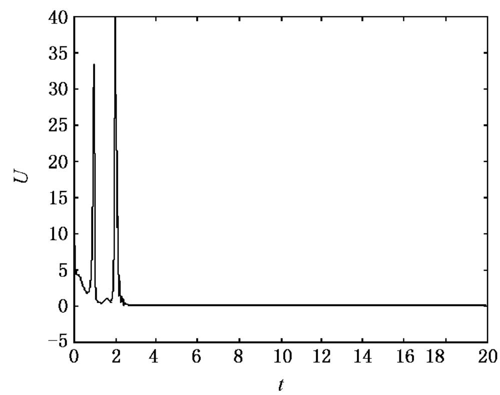

图 5 控制律 $U=\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}$ 的时间历程图

4.噪声的影响

在实际的物理环境中,噪声是普遍存在的.实际的混沌系统是不可避免地受到噪声的干扰.因此研究在外噪声作用下这种同步方法的鲁棒性就极其重要.有界噪声是噪声的一种形式,它可以表示湍流,也可以表示地震地面运动,可以用作自然界或工程中的其他模型.与理想的白噪声相比较,有界噪声是一个更切合实际的合理的噪声模型.下面考虑外加有界噪声对该延迟同步方法的影响.此时驱动系统仍为(11)式,将 $D\xi(t)$ 加到响应系统(12)式的右边,则有

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{y})\hat{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{u} + D\xi(t), \qquad (15)$$

其中 $\xi(t)=\cos(\Omega t+\sigma B(t)+\Gamma)$,$\Omega$ 和 σ 为正的常数,$B(t)$ 是单位 Wiener 过程,Γ 是 $[0,2\pi]$ 之间均匀分布的随机变量,D 是噪声强度.

仍然采用延迟控制器(13)式和参数自适应律(14)式以及第三部分的模拟数据.用文献[17]的随机欧拉方法对(12)式和(15)式进行积分,选取有界噪声 $\xi(t)$ 中的参数 $\Omega=1.0$,$\sigma=1.0$.图 6、图 7 分别显示了在噪声强度 $D=0.5$ 时图 3 延迟同步误差的结果和在噪声强度 $D=0.5$ 时图 4 参数估计的结果.数值研究结果表明:在有界噪声的作用下,延迟同步误差在趋于零的过程中会出现小的扰动,此时延迟同步误差变得比较粗糙,但不影响最终的控制效果.同样,对于参数估计,噪声有同样的作用.从图 7 可以看到:参数估计在它的真实值之间有小的波动,但最终还是趋于其真实值.

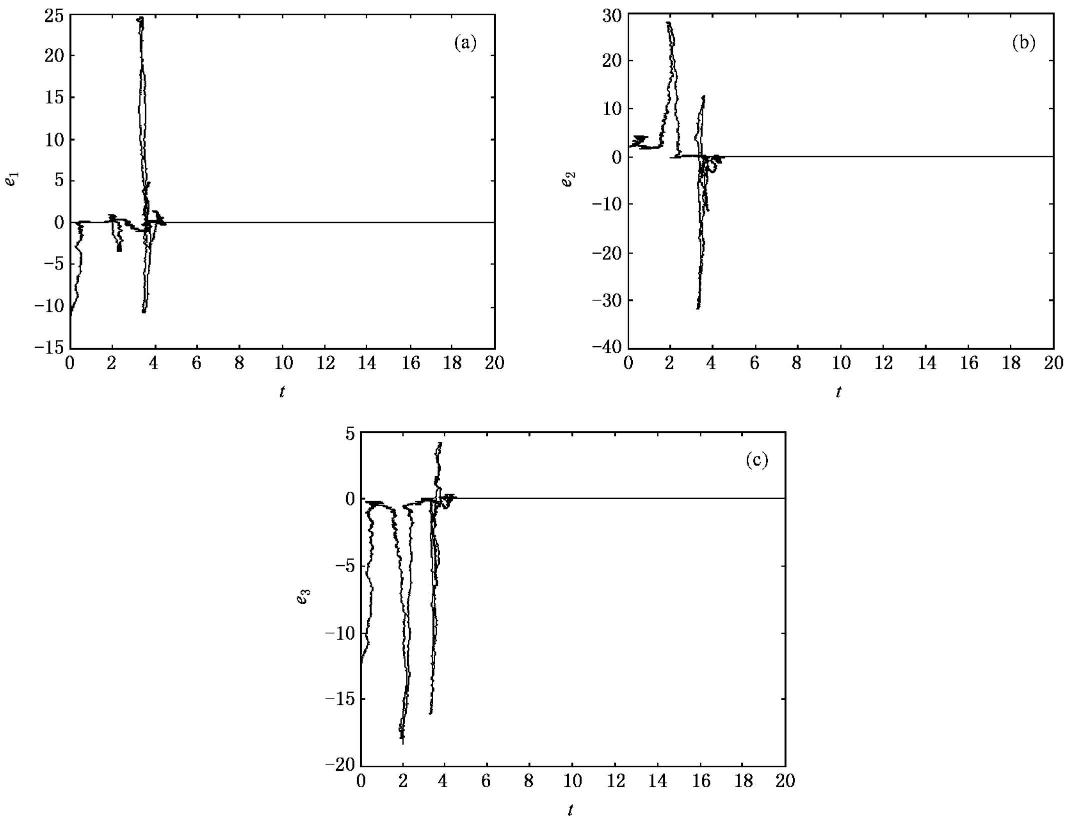

图 6　噪声强度 $D=0.5$ 时，同步延迟误差时间历程图　(a) $e_1=y_1(t)-x_1(t-\tau)$；(b) $e_2=y_2(t)-x_2(t-\tau)$；(c) $e_3=y_3(t)-x_3(t-\tau)$

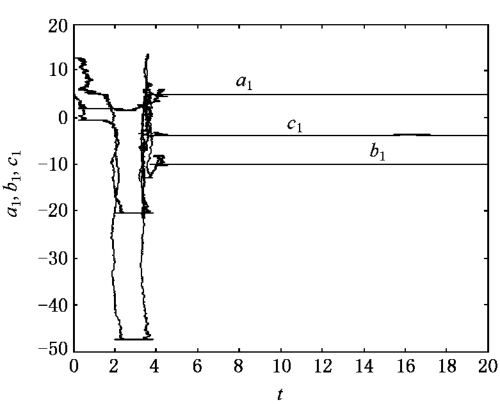

图 7　噪声强度 $D=0.5$ 时，响应系统(15)式参数估计值的时间历程图

5.结　　论

本文研究了一类参数不确定混沌系统的延迟同步.基于 Lapunov 稳定性理论，给出了延迟控制器和参数自适应律的解析表达式.该方法简单、适用范围广.以新混沌系统为例，数值仿真说明了该方法的有效性和实用性.通过研究有界噪声作用下该系统的控制效果，表明了此方法具有较强的鲁棒性和抗干扰能力.

[1] Pecora L M，Carroll T L 1990 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **64** 821

[2] Han S K，Kerrer C，Kuramoto Y 1995 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **75** 3190

[3] Blasius B，Huppert A，Stone L 1999 *Nature*. **399** 354

[4] Cuomo K M，Oppenheim A V 1993 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **65** 71

[5] Yue L J，Shen K 2005 *Chin*. *Phys*. **14** 1760

[6] Li F，Gu A H，Xu Z Y 2006 *Acta Phys*. *Sin*. **55** 590 (in Chinese) [李　芳、故爱花、徐振源 2006 物理学报 **55** 590]

[7] Hao J H，Li W 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 3491 (in Chinese) [郝键

红、李 伟 2005 物理学报 54 3491]
[8] Zhou C, Kurths J, Allaria E 2003 *Phys. Rev.* E **67** 066220
[9] Li C D, Liao X F 2004 *Phys. Lett.* A **329** 301
[10] Chen Y, Chen X X, Gu S S 2006 *Nonlinear Anal.* **15** 2143
[11] Shahverdiev E M, Sivaprakasam S, Shore K A 2002 *Phys. Lett.* A **292** 320
[12] Ho M C, Hang Y C 2002 *Phys. Lett.* A **301** 424
[13] Lu J A, Tao C H, Lü J H, Liu M 2002 *Chine. Phys. Lett.* **19** 632
[14] Wang X Y, Wu X J 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1423 (in Chinese) [王兴元、武相军 2000 物理学报 49 1423]
[15] Chen S H, Zhao L M, Liu J 2002 *Chin. Phys.* **11** 21
[16] Chen H K, Lee C I 2004 *Chaos, Solitons and Fractals* **21** 957
[17] Matsumoto K, Tsuda I, Stat J 1983 *Phys.* **31** 87

Lag synchronization for a class of chaotic systems with unknown parameters*

Jia Fei-Lei† Xu Wei

(*Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an* 710072, *China*)

(Received 19 September 2006; revised manuscript received 25 October 2006)

Abstract

In this paper, the problem of lag synchronization for a class of chaotic systems with unknown parameters is proposed. Based on Lyapunov stability theory, lag controller and update law of parameters are obtained. This method is simple and systemic. A new chaotic system is taken as an example to illustrate the effectiveness of this proposed method. Numerical simulation illustrates the feasibility of this technique. To demonstrate the robustness against the effective of bounded noise of the proposed control strategy, it is applied to the new system and perfect simulation results are obtained.

Keywords: lag synchronization, Lyapunov stability theory, a new chaotic system, bounded noise

PACC: 0545

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10472091, 10332030) and the Graduate Starting Seed Fund of Northwestern Polytechnical University (Grant No. Z200655).

† E-mail: feileijia@mail.nwpu.edu.cn