

# 一类切换混沌系统的实现<sup>\*</sup>

刘扬正<sup>1,2)†</sup> 姜长生<sup>2)</sup> 林长圣<sup>1)</sup> 熊 星<sup>1)</sup> 石 磊<sup>1)</sup>

1) 南京工程学院非线性物理研究所, 南京 211167)

2) 南京航空航天大学自动化学院, 南京 210016)

(2006 年 8 月 25 日收到, 2006 年 10 月 20 日收到修改稿)

构建了一类可切换的三维自治混沌系统, 通过系统选择器实现这类系统间的切换. 这类系统都由七项组成, 且都包含三项系统变量乘积的二次非线性项. 详细地分析了这类三维系统平衡点的性质、混沌吸引子的相图和 Lyapunov 指数等特性, 设计了实现这类可切换系统的实际电路并进行了电路实验.

关键词: 混沌系统, Lyapunov 指数, 切换

PACC: 0545

## 1. 引 言

自从多系统切换混沌同步的思想被提出以来<sup>[1]</sup>, 因其可以增强混沌同步保密通讯的安全性能而备受关注<sup>[1-5]</sup>. 欲使多系统切换混沌同步技术成功地应用到工程实际, 建构足够多的可供切换的混沌系统是关键. 文献[3]利用陈关荣、吕金虎等<sup>[6-8]</sup>提出的 Chen 系统、Lu 系统和统一系统, 实现多混沌系统的时分同步, 但这三个系统的转换需通过改变系统参数完成, 实际操作并不方便; 文献[2]提出利用广义混沌映射切换混沌同步的方法实现保密通讯, 系统间的切换要通过改变系统的几个参数才能实现; 文献[4, 5]利用两个关联系统的非线性函数不同, 通过系统选择器能方便地实现系统间的切换, 但可供切换的子系统都只有两个. 文献[9]利用增加系统维数, 建构了一种含有四个子系统的可切换的四维混沌系统. 为了建构子系统足够多又能容易相互切换的混沌系统, 本文采用增加并改变系统非线性特性的方法<sup>[8-17]</sup>, 建构了一类关联且可切换的三维混沌系统, 该类系统的每个子系统都由七项组成, 都包含三项系统变量乘积的二次非线性函数. 分析了这些三维系统平衡点的性质、混沌吸引子的相图和 Lyapunov 指数等特性, 设计了一个能实现该系统功能的实际电路, 实验结果表明, 通过系统选择器

的切换, 一个电路能实现多个关联系统的功能.

## 2. 系统构成与特性分析

采用增加并改变系统非线性特性的方法, 对 Lorenz 系统<sup>[18]</sup>进行变形, 为了电路实现时能满足运算放大器和模拟乘法器对输入电压限制的要求<sup>[19, 20]</sup>, 将这类三维混沌系统方程表述为以下形式:

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) + yz, \\ \dot{y} = bx - 10xz, \\ \dot{z} = -cz + 10xy, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) + y^2, \\ \dot{y} = bx - 10xz, \\ \dot{z} = -cz + 10xy, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) + yz, \\ \dot{y} = bx - 10xz, \\ \dot{z} = -cz + 10x^2, \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) + y^2, \\ \dot{y} = bx - 10xz, \\ \dot{z} = -cz + 10x^2, \end{cases} \quad (4)$$

式中正常数  $a, b, c$  为系统参数,  $x, y, z$  为系统变量. 上述四个系统都由七项组成, 且都包含三项系统变量乘积的二次非线性项. 比较这四个系统, 系统的

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号: 90405011), 江苏省高校自然科学基金(批准号: 05KJD120083), 南京工程学院自然科学基金(批准号: KXJ06047)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: lyz64@njit.edu.cn, lyz\_6410@163.com

参数相同,每个系统线性部分的参数都满足  $a_{12} a_{21} > 0, a_{22} = 0$ , 仅仅是系统的非线性特性有所改变, 可见这四个系统都属于广义 Lorenz 系统族<sup>[21]</sup>, 因此, 这类系统是相互关联的并且可以互相切换, 这种关联性不仅为系统的电路实现带来了方便, 而且使系统具有一定的实际应用价值<sup>[1-5, 9, 13]</sup>.

下面对这类三维混沌系统的特性进行分析.

由系统(1)~(4)得到

$$\nabla V = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = -a - c, \quad (5)$$

很显然  $-a - c < 0$ , 即保证四个系统都具有耗散性. 四个系统都具有平衡点  $P^0(0, 0, 0)$ , 系统的 Jacobian 矩阵在平衡点  $P^0$  处的特征值皆为  $\lambda_1 = -c, \lambda_{2,3} = \frac{1}{2}(-a \pm \sqrt{a^2 + 4ab})$ , 三个特征值皆为实数, 且有一个特征值大于零, 二个特征值小于零, 因而平衡点  $P^0$  是不稳定的鞍点.

以系统(1)为例, 对系统的其他平衡点进行分析. 系统(1)的 Jacobian 矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} -a & a+z & y \\ b-10z & 0 & -10x \\ 10y & 10x & -c \end{bmatrix}. \quad (6)$$

令  $-ax + ay + yz = 0, bx - 10xz = 0, -cz + 10xy = 0$ , 可得系统(1)的另二个平衡点  $P^+(x_0, y_0, z_0), P^-( -x_0, -y_0, -z_0)$ , 其中  $x_0 = \frac{1}{100} \times \sqrt{\frac{bc}{a(100a+10b)}}, y_0 = \sqrt{\frac{abc}{100a+10b}}, z_0 = \frac{b}{10}$ . 同理可分析系统(2)~(4)的平衡点. 系统(2)的另二个平衡点  $P^+(x_{10}, y_{10}, z_0), P^-( -x_{20}, -y_{20}, z_0)$ ; 系统(3)的另二个平衡点  $P^+(x_0, y_0, z_0), P^-( -x_0, -y_0, z_0)$ , 其中  $x_0 = \sqrt{\frac{bc}{100}}, y_0 = \frac{ax_0}{10a+b}, z_0 = \frac{b}{10}$ ; 系统(4)的另二个平衡点  $P^+(x_0, y_{10}, z_0), P^-( -x_0, -y_{20}, z_0)$ , 其中  $x_0 = \sqrt{\frac{bc}{100}}, y_{10} = \frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + 4ax_0}), y_{20} = \frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 - 4ax_0}), z_0 = \frac{b}{10}$ .

系统的分形维数可由  $D_L = j + \frac{1}{|\lambda_{L(j+1)}|} \sum_{i=1}^j \lambda_{L_i}$  求出.

当系统参数为时  $a = 10, b = 40, c = 2.5$ , 四个三维系统的特性分析如表 1.

由表 1 可知, 四个三维系统的最大 Lyapunov 指

表 1 四个三维混沌系统特性分析表

| 系统  | 平衡点                         | 特征值                               | Lyapunov 指数               | 分形维数    |
|-----|-----------------------------|-----------------------------------|---------------------------|---------|
| (1) | $P^+(1.1832, 0.8452, A)$    | $(-14.7095, 1.1048 \pm 13.7526i)$ | $(2.00234, 0, -20.19724)$ | 2.09914 |
|     | $P^-( -1.1832, -0.8452, A)$ | $(-14.7095, 1.1048 \pm 13.7526i)$ |                           |         |
| (2) | $P^+(1.0480, 0.9542, A)$    | $(-14.2820, 0.8910 \pm 12.6288i)$ | $(1.59353, 0, -19.78802)$ | 2.08053 |
|     | $P^-( -0.9456, -1.0575, A)$ | $(-13.3617, 0.4309 \pm 11.2136i)$ |                           |         |
| (3) | $P^+(1, 0.7143, A)$         | $(-19.3928, 3.4464 \pm 11.5111i)$ | $(3.19805, 0, -21.39456)$ | 2.14949 |
|     | $P^-( -1, -0.7143, A)$      | $(-19.3928, 3.4464 \pm 11.5111i)$ |                           |         |
| (4) | $P^+(1, 0.9162, A)$         | $(-18.2413, 2.8707 \pm 11.0222i)$ | $(2.9219, 0, -21.1172)$   | 2.11384 |
|     | $P^-( -1, -1.1272, A)$      | $(-15.5315, 4.0157 \pm 9.1441i)$  |                           |         |

数皆大于零, 因此四个系统都处于混沌状态. 四个三维混沌系统的 Jacobian 矩阵在平衡点  $P^+$  和  $P^-$  处的特征值中, 皆有一个特征值为小于零的实数, 另两个特征值为实部大于零的复数, 因而平衡点  $P^+$  和  $P^-$  都是不稳定的鞍焦点, 且都满足  $r_{11} \sigma_{11} < 0, |r_{11}| > |\sigma_{11}| > 0$ , 所以四个混沌系统都是双细胞奇异吸

引子<sup>[22]</sup> 相图具有双涡卷特征, 如图 1—4. 图 1—4 是用电路仿真软件 EWB 在计算机上绘制的系统相图和系统的实际电路(如图 5)在模拟示波器上显示的系统相图<sup>[23]</sup>, 其坐标系设置和坐标轴的单位为 (a)  $x - y$  (1V/格, 1V/格) (b)  $x - z$  (1V/格, 0.5V/格), (c)  $y - z$  (1V/格, 0.5V/格).

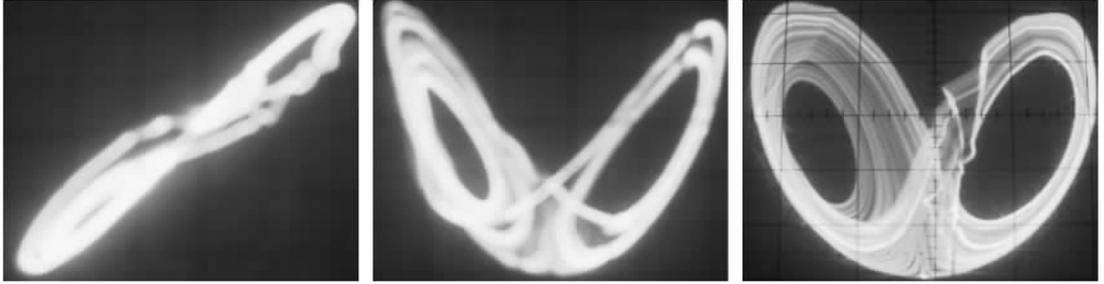
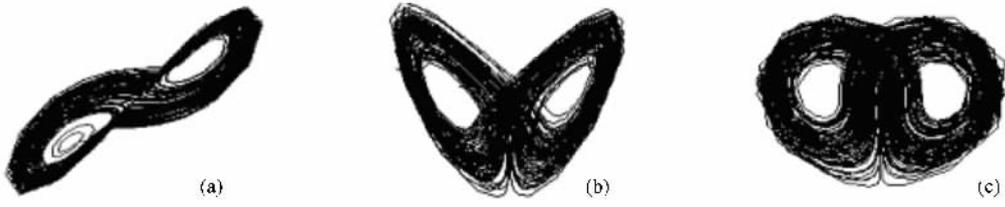


图 1 系统 1 的相图

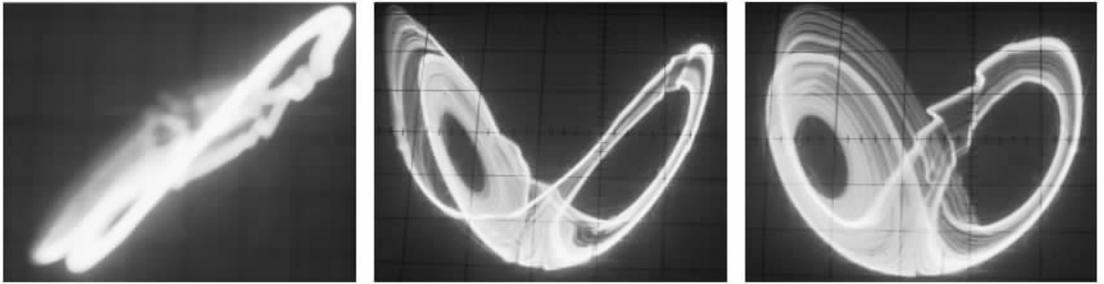
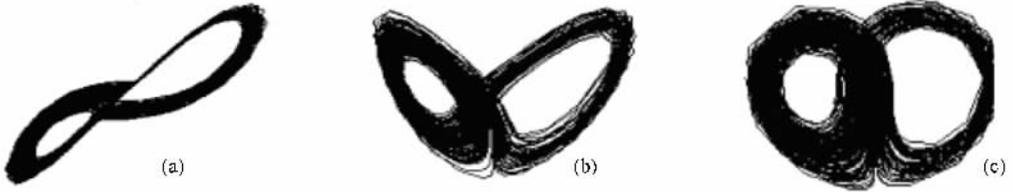


图 2 系统 2 的相图

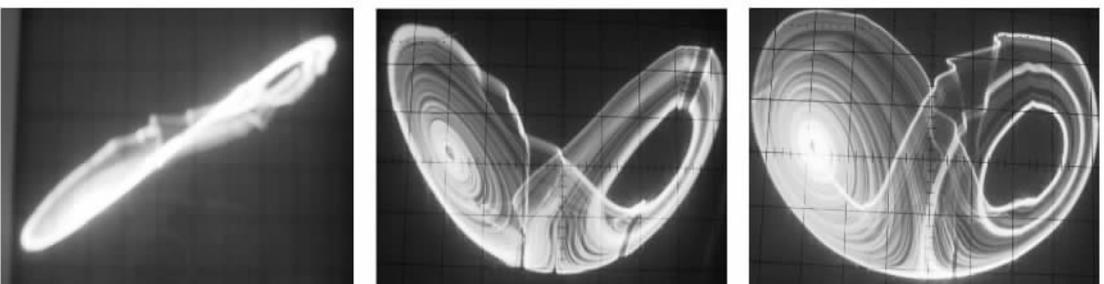
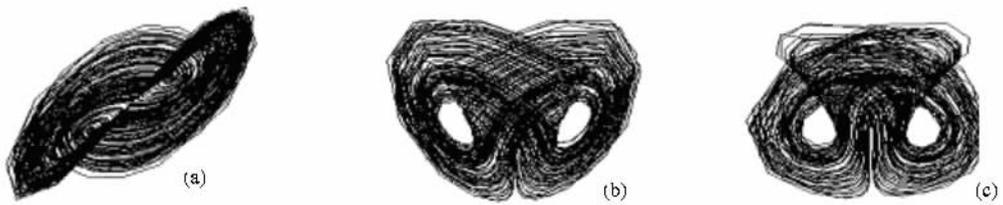


图 3 系统 3 的相图

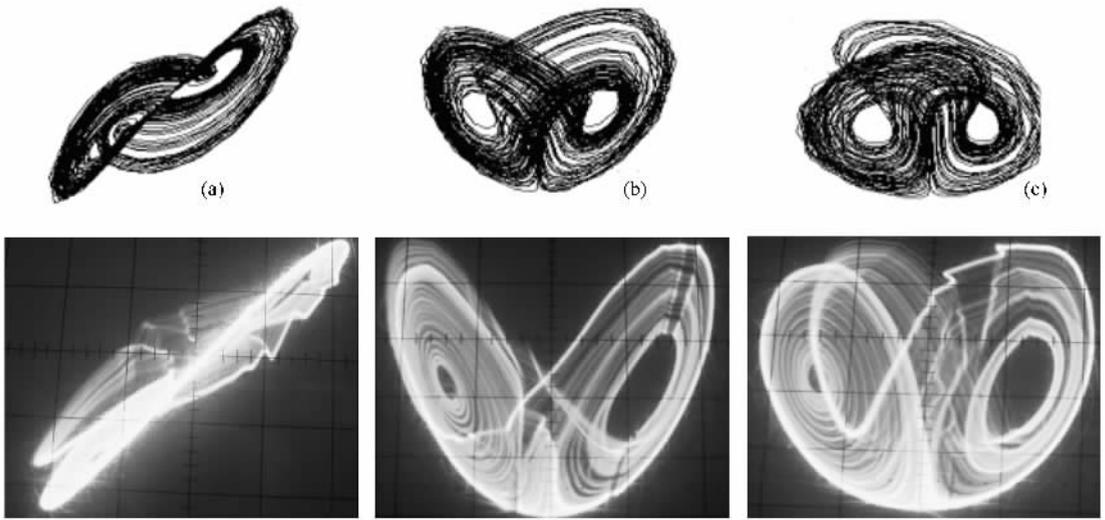


图 4 系统 4 的相图

### 3. 系统的电路实现

从上述分析可知,四个三维混沌系统之间存在一定的差异,同时也存在着密切的联系.根据(1)~(4)式设计了一个能实现四个三维混沌系统功能的实际电路,如图 5 所示.图中的运算放大器皆为 LF324,电路中各元件的数值如图中标示,它们由系统的参数决定,其中所有电阻的单位为  $k\Omega$ .由于系

统中的非线性函数都是系统变量的二次函数,可由模拟乘法器(图中用  $\times$  表示)实现.模拟乘法器选用 AD633JN.通过电路中开关的切换可进行系统间非线性函数的转换,开关  $k_1$  的切换实现非线性函数  $yz$  和  $y^2$  的切换,开关  $k_2$  的切换实现非线性函数  $xy$  和  $x^2$  的切换.利用图中开关的切换,一个电路可以实现四个三维混沌系统的功能,操作非常简便,因此该电路系统具有重要的使用价值和广泛的应用前景.

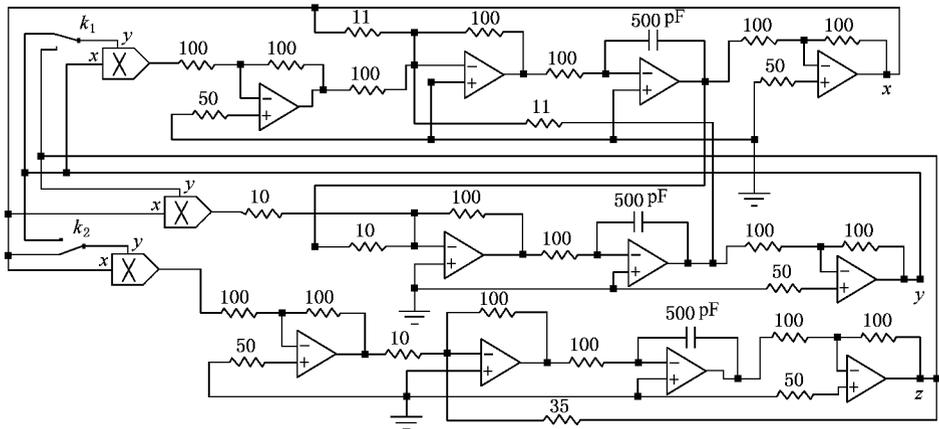


图 5 四个系统的实际电路图

上述四个系统的线性部分相同,只是非线性特性不同,从系统的相图可以看出,系统流的演化方式和演化速度存在一定的差异.这类系统的可切换性和内在的差异性,为增强混沌同步保密通信的安全性性能提供了新的实现途径.

### 4. 结 论

本文建构了一类关联且可切换的三维混沌系统,这类系统有别于 Lorenz 系统族中的各种系统,因

此,这类系统的建立不仅为广义 Lorenz 系统族增添了新的成员,而且系统间切换方便,变化多样,具有重要的实用价值.作者将就如何实现这类系统的切

换混沌同步和基于这类系统切换混沌同步的保密通讯等问题作进一步的研究.

- [ 1 ] Liu Y Z , Fei S M 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1035 ( in Chinese ) [ 刘扬正、费树岷 2006 物理学报 **55** 1035 ]
- [ 2 ] Zhang J S , Xiao X C 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2121 ( in Chinese ) [ 张家树、肖先赐 2001 物理学报 **50** 2121 ]
- [ 3 ] Zhang Y , Chen T Q 2005 *J. UEST China* **34** 763 ( in Chinese ) [ 张勇、陈天麒 2005 电子科技大学学报 **34** 763 ]
- [ 4 ] Liu Y Z , Ling C S , Fei S M 2006 *Sys. Engin. Elect.* **28** 591 ( in Chinese ) [ 刘扬正、林长圣、费树岷 2006 系统工程与电子技术 **28** 591 ]
- [ 5 ] Liu Y Z , Fei S M , Li P 2005 *Syst. Engin. Elect.* **27** 1448 ( in Chinese ) [ 刘扬正、费树岷、李平 2005 系统工程与电子技术 **27** 1448 ]
- [ 6 ] Ueta T , Chen G 2000 *Int J. Bifur. Chaos* **10** 1917
- [ 7 ] Lü J , Chen G 2002 *Int J. Bifur. Chaos* **12** 659
- [ 8 ] Lü J , Chen G , Zhang S 2002 *Chaos Solitons Fract.* **14** 669
- [ 9 ] Liu Y Z , Jiang C S , Lin C S 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 707 ( in Chinese ) [ 刘扬正、姜长生、林长圣 2007 物理学报 **56** 707 ]
- [ 10 ] Liu C , Liu T , Liu L , Liu K 2004 *Chaos Solitons Fract.* **22** 1031
- [ 11 ] Wang J Z , Chen Z Q , Yuan Z Z 2006 *Chin. Phys.* **15** 1216
- [ 12 ] Chen H K , Lee C I 2004 *Chaos Solitons Fract.* **21** 957
- [ 13 ] Wang G R , Yu X L , Chen S G 2001 *Chaos Control , synchronization and it application* ( Beijing : National Defense Industry Publishing House ) ( in Chinese ) [ 王光瑞、于熙龄、陈式刚混沌的控制、同步与利用 [ M ] 北京 : 国防工业出版社 2001 ]
- [ 14 ] Wang G Y , Qiu S S , Xu Z Y 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3295 ( in Chinese ) [ 王光义、丘水生、许志益 2006 物理学报 **55** 3295 ]
- [ 15 ] Liu L , Su Y C , Liu C X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3933 ( in Chinese ) [ 刘凌、苏燕辰、刘崇新 2006 物理学报 **55** 3933 ]
- [ 16 ] Wang J Z , Chen Z Q , Yuan Z Z 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3956 ( in Chinese ) [ 王杰智、陈增强、袁著祉 2006 物理学报 **55** 3956 ]
- [ 17 ] Wang F Z , Qi G Y , Chen Z Q , Zhang Y H , Yuan Z Z 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4005 ( in Chinese ) [ 王繁珍、齐国元、陈增强、张宇辉、袁著祉 2006 物理学报 **55** 4005 ]
- [ 18 ] Lorenz E N 1963 *J Atoms Sci.* **20** 130
- [ 19 ] Lian K Y , Liu P 2000 *IEEE Trans. Circ. Syst.* [ **47** 1418
- [ 20 ] Cuomo K M , Oppenheim A V 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 65
- [ 21 ] Lü J , Chen G , Cheng D , Celikovskiy 2002 *Int J. Bifur. Chaos* **12** 2917
- [ 22 ] Qiu S S 1996 *J. South China Univ. Tech.* ( Natural Science Edition ) **24** 134 ( in Chinese ) [ 丘水生 1996 华南理工大学学报 ( 自然科学版 ) **24** 134 ]
- [ 23 ] Wang F Q , Liu C X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5061 ( in Chinese ) [ 王发强、刘崇新 2006 物理学报 **55** 5061 ]

# A class of switchable 3D chaotic systems

Liu Yang-Zheng<sup>1</sup>  <sup>†</sup> Jiang Chang-Sheng<sup>2</sup> Lin Chang-Sheng<sup>1</sup> Xiong Xing<sup>1</sup> Shi Lei<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Institute of Nonlinear Physics, Nanjing Institute of Technology, Nanjing 211167, China*

<sup>2</sup> *College of Automatic Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China*

( Received 25 August 2006 ; revised manuscript received 20 October 2006 )

## Abstract

A class of switchable three-dimensional chaotic systems is built. These systems have seven terms on the right-hand side, three of which are quadratic nonlinear. Some of its basic dynamical properties are studied detailedly, such as the feature of equilibrium, the chaos attractor, Lyapunov exponent and fractal dimension. A practical circuit is designed to realize these systems.

**Keywords** : chaotic system, Lyapunov exponent, switchable

**PACC** : 0545

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 90405011 ), the Natural Science Foundation of Jiangsu Province, China ( Grant No. 05KJD120083 ) and the Natural Science Foundation of Nanjing Institute of Technology, China ( Grant No. KXJ06047 ).

<sup>†</sup> E-mail :lyz64@njit.edu.cn,lyz\_6410@163.com