

# 一个超混沌 Lorenz 吸引子及其电路实现<sup>\*</sup>

王光义 郑 艳 刘敬彪

(杭州电子科技大学电子信息学院 杭州 310018)

(2006 年 12 月 20 日收到 2007 年 3 月 8 日收到修改稿)

通过在三阶 Lorenz 系统中引入一个外加的状态变量构造了一个新的超混沌系统. 对系统的一些基本特性, 如耗散性、平衡点、稳定性、Hopf 分叉进行了详细分析, 且观察到了从周期到混沌、超混沌的演化. 系统超混沌的存在性通过 Lyapunov 指数谱得到了验证. 还设计了一个模拟电子电路, 从电路实验中观察到了各种超混沌吸引子.

关键词: Lorenz 系统, 超混沌吸引子, 电路实现

PACC: 0545

## 1. 引 言

与混沌相比, 超混沌系统具有两个或两个以上的正 Lyapunov 指数, 相轨在更多方向上分离, 其动力学行为更为复杂. 复杂的超混沌信号可以提高混沌保密通信和混沌信息加密的安全性. 因此, 对超混沌的研究将是信息工程领域中混沌应用的一个重要课题.

在诸如混沌通信、信息加密等利用超混沌的工程领域中, 超混沌的生成是一个关键技术, 但迄今还没有一个生成超混沌的系统方法. 自 Chen 利用混沌反控制(chaotification)方法成功实现一个新的连续混沌系统(后称之为 Chen 系统)以来<sup>[1]</sup>, 人们对混沌和超混沌的生成研究产生了极大兴趣<sup>[2-19]</sup>.

近来, 把一个状态反馈控制器或一个外部正弦激励施加于连续混沌系统从而获得超混沌的方法<sup>[9-11]</sup>引起了人们的注意. 利用状态反馈控制方法, 文献 10, 11 分别把一个广义 Lorenz 系统和一个改进的 Chen 系统(两者实际上是同一个改进的 Chen 系统)控制到超混沌状态; 文献 12, 13 则在 Lü 系统和一个改进的 Lü 系统中引入不同的控制器分别得到两个超混沌系统.

其实, 人们早就关注超混沌的研究, 并构造了一些高维超混沌系统, 如超混沌 Rössler 系统<sup>[20]</sup>和超混沌 Chua 电路<sup>[18]</sup>等, 但一直没有构造超混沌的系统方法.

Lorenz 吸引子是第一个混沌模型<sup>[21]</sup>, 并成为后来混沌研究的范例. 1999 年, Chen 在处于非混沌态的 Lorenz 系统中引入一个线性控制器并获得了一个新的 Chen 混沌系统<sup>[1]</sup>. 鉴于 Lorenz 系统的特殊地位, 本文对其超混沌行为做了进一步研究. 结果表明, 如果在原始的(非改进的)Lorenz 系统中引入一个简单的非线性控制器, 可将其控制到超混沌状态. 其超混沌特性通过理论分析、Lyapunov 指数谱、分岔图、计算机仿真及电路设计与实验都得到了验证. 同时, 对系统在周期、混沌和超混沌之间的转换也进行了分析.

## 2. 控制 Lorenz 系统到超混沌

著名的 Lorenz 系统为<sup>[21]</sup>

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(y - x), \\ \dot{y} = cx - y - xz, \\ \dot{z} = xy - bz. \end{cases} \quad (1)$$

当参数  $\alpha = 10$ ,  $b = 8/3$ ,  $c = 28$ , 该系统呈现混沌状态.

在 Lorenz 系统(1)中的第二个方程引入一个反馈控制器  $u$ , 并增加一个关于  $u$  的一阶微分方程, 可得到如下四阶自治系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(y - x), \\ \dot{y} = cx - y - xz + u, \\ \dot{z} = xy - bz, \\ \dot{u} = -kx, \end{cases} \quad (2)$$

<sup>\*</sup> 浙江省自然科学基金(批准号:Y105175)和杭州电子科技大学科研基金(批准号:KYS051505010)资助的课题.

其中  $k$  为待定常数.

四阶系统 (2) 保证了吸引子相空间的维数为 4, 且含有 2 个非线性乘积项, 满足了超混沌的必要条件.

系统 (2) 有四个 Lyapunov 指数, 有可能导致超混沌的产生. 为产生超混沌, 四个 Lyapunov 指数中需有两个为正, 一个为零, 一个为负. 计算机仿真表明,

若取参数  $a = 10, b = 8/3, c = 28, k = 5$ , 则四个 Lyapunov 指数为:  $LE_1 = 0.3997, LE_2 = 0.3113, LE_3 = 0, LE_4 = -14.3776$ , 此时系统 (2) 已达到超混沌状态, 其超混沌吸引子的计算机仿真图如图 1 所示. 为了叙述方便, 特把系统 (2) 称为超混沌 Lorenz 系统, 其吸引子称为超混沌 Lorenz 吸引子.

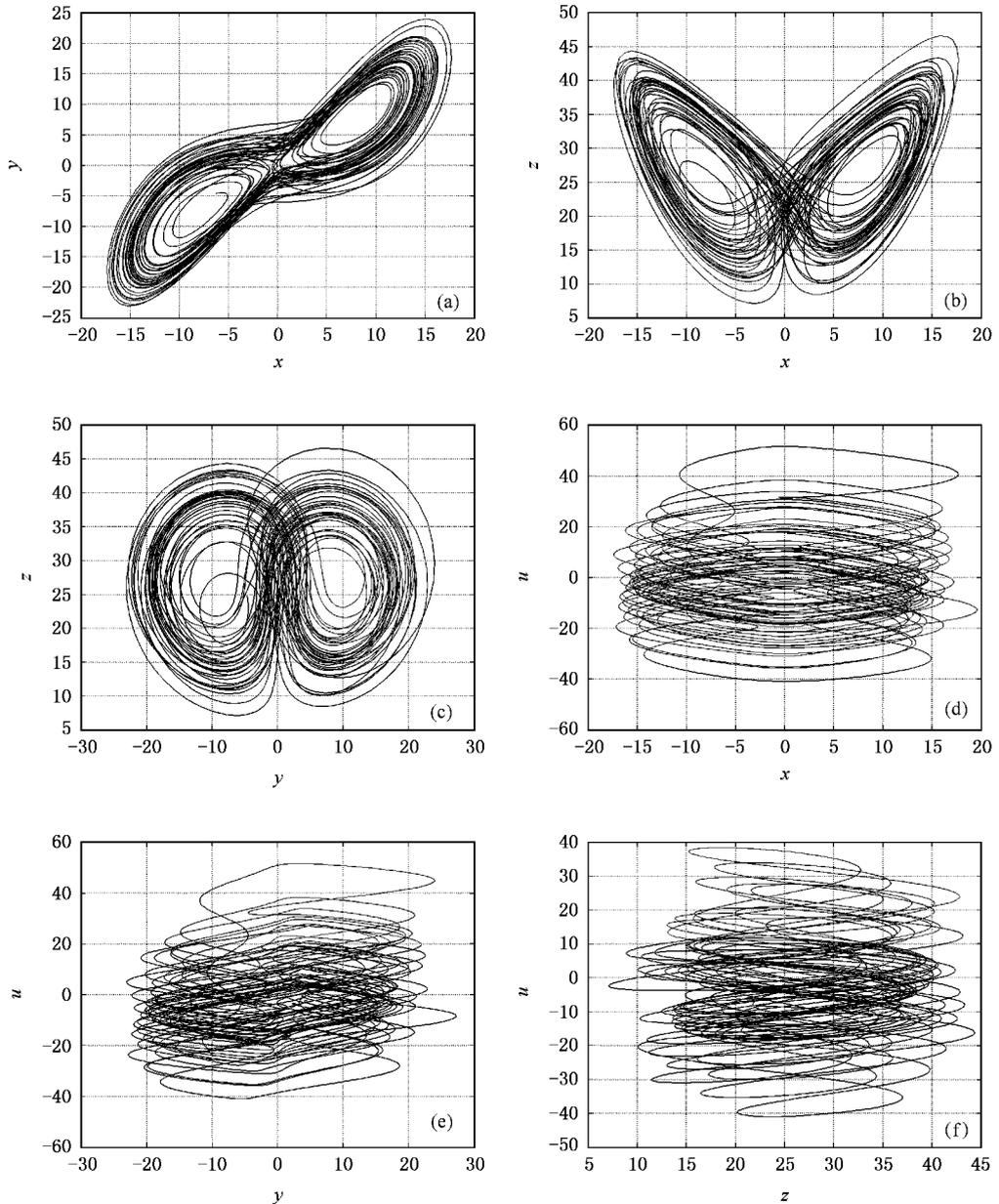


图 1 超混沌 Lorenz 吸引子在相平面上的投影 (a)  $x$ - $y$  平面 (b)  $x$ - $z$  平面 (c)  $y$ - $z$  平面 (d)  $x$ - $u$  平面 (e)  $y$ - $u$  平面 (f)  $z$ - $u$  平面

### 3. 超混沌 Lorenz 系统的基本特性

Lorenz 系统有三个平衡点, 而超混沌 Lorenz 系统(2)则仅有一个平衡点:

$$S_0 = (0 \ 0 \ 0 \ 0). \quad (3)$$

在平衡点线性化系统(2), 得 Jacobian 矩阵

$$J = \begin{bmatrix} -a & a & 0 & 0 \\ c & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -b & 0 \\ -k & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

其特征方程为

$$\lambda^4 + (a + b + 1)\lambda^3 + (a + b + ab - ac)\lambda^2 + a(b - bc - k)\lambda + abk = 0. \quad (4)$$

利用方程(4)求解特征根或判断特征根的性质较困难. 为此, 解特征方程(4), 先得到一个特征根

$$\lambda_1 = -b, \quad (5)$$

和以下三次方程:

$$f(\lambda) = \lambda^3 + (a + 1)\lambda^2 + a(1 - c)\lambda + ak = 0. \quad (6)$$

如取参数  $b > 0$ , 则  $\lambda_1 < 0$ . 若使系统(2)在平衡点是稳定的, 由(4)式决定的另三个特征根(或特征根的实部)还需全部为负, 这可由(6)式来求解或判断. 因此, 根据(5)式、三次方程(6)和 Routh-Hurwitz 条件, 系统(2)在唯一平衡点  $S_0$  稳定的充分必要条件为

$$\begin{aligned} b > 0, a + 1 > 0, ak > 0, \\ a(a + 1)(1 - c) - ak > 0. \end{aligned} \quad (7)$$

若选择参数  $a > 0, k > 0$ , 则条件(7)为

$$c < 1 - k(a + 1). \quad (8)$$

为使系统(2)产生混沌或超混沌, 这个唯一平衡点  $S_0$  应为不稳定的. 因此, 根据(5)(7)和(8)式, 系统(2)出现混沌或超混沌的一个必要条件为: 系统参数范围的选择需使其唯一平衡点是不稳定的, 即

$$a, b, k > 0, c > 1 - k(a + 1). \quad (9)$$

这为系统(2)可能出现混沌或超混沌时参数的选择提供了一个参考范围.

显然, 系统(2)在此参数下发生了分岔:

$$c_h = 1 - k(a + 1). \quad (10)$$

下面将指出, 在(10)式确定的参数下, 系统(2)将发

生 Hopf 分岔.

从(6)(9)(10)式可以看出, 分岔参数  $c_h < 1$ ,  $(1 - c) > 0$ , 方程(6)的系数全为正. 因此, 对  $\lambda > 0$  有  $f(\lambda) > 0$ . 因为  $\lambda_1 < 0$ , 故系统(2)在平衡点若是稳定的, 三次多项式  $f(\lambda)$  的三个特征根应皆为负(或复特征根的实部为负). 若系统在平衡点出现不稳定, 则  $f(\lambda)$  必有两个实部为正的共轭复根, 即  $\text{Re}(\lambda) > 0$ . 因此, 在稳定和稳定的临界点, 必存在两个实部为零的共轭复根. 设这两个零实部的共轭复根为  $\lambda_{2,3} = \pm \omega i$ , 其中  $\omega$  为实数. 根据根与系数的关系, 在分岔点  $f(\lambda)$  的三根  $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  之和为

$$\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = -(a + 1). \quad (11)$$

由(11)式可得

$$\lambda_4 = -(a + 1). \quad (12)$$

把(12)式代入方程(6)中, 得

$$f(\lambda_4) = (c - 1)(a + 1) + k = 0. \quad (13)$$

(13)式为分岔点处参数  $c$  满足的关系, 由此解得 Hopf 分岔参数:

$$c_h = 1 - k(a + 1). \quad (14)$$

例如, 当  $a = 10, b = 8/3, c = 28, k = 5$  时, Hopf 分岔参数值  $c_h = 0.5455$ , 相应的特征根为  $\lambda_1 = -2.6667, \lambda_{2,3} = \pm 2.1320i, \lambda_4 = -11.0000$ , 系统处于 Hopf 分岔的临界点; 当  $c = 0.5456 > c_h$  时, 相应的特征根为  $\lambda_1 = -2.6667, \lambda_{2,3} = 0.0001 \pm 2.1320i, \lambda_4 = -11.0001$ , 系统的平衡点是不稳定的; 而当  $c = 0.5454 < c_h$  时, 相应的特征根为  $\lambda_1 = -2.6667, \lambda_{2,3} = -0.0002 \pm 2.1320i, \lambda_4 = -10.9996$ , 系统的平衡点是稳定的.

Hopf 分岔参数  $c_h$  随  $a$  变化的规律如图 2 所示.

为保证系统(2)的平衡点是不稳定的, 从而获得产生混沌或超混沌的可能性, (9)式给出了这种可能性的参数条件, 即  $a, b > 0$ , 则有

$$a + b + 1 > 0. \quad (15)$$

其实(15)式也是保证系统耗散性的条件. 因为系统的散度为

$$\nabla V = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial u} = -(a + b + 1) \quad (16)$$

因此, 要保证系统是耗散的, 须满足(15)式.

同时看出, 系统(2)在下面的变换下是不变的,

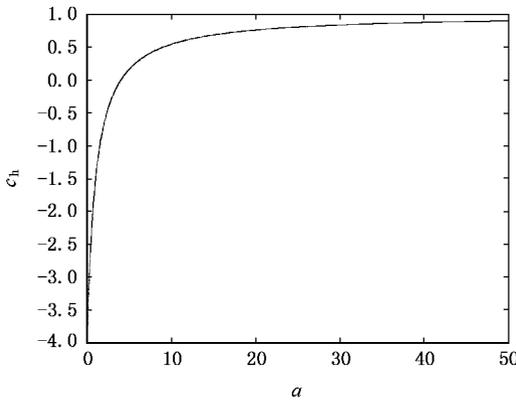


图2 Hopf 分岔参数  $c_h$  随参数  $a$  的变化

即

$$(x, y, iz, u) \rightarrow (-x, -y, iz, -u). \quad (17)$$

即系统对  $z$  轴是对称的.

### 4. Lyapunov 指数谱与分岔图

系统的主要动力学特性可通过其 Lyapunov 指数谱和分岔图来分析.  $k$  变化时, Lyapunov 指数谱和变量  $x$  的分岔图如图 3 所示. 此时,  $a = 10, b = 8/3, c = 28$ .

利用 Lyapunov 指数谱分析时, 对于平衡点有  $LE_4 < LE_3 < LE_2 < LE_1 < 0$ ; 对于周期轨有  $LE_1 = 0, LE_4 < LE_3 < LE_2 < 0$ ; 对于拟周期轨有  $LE_1 = LE_2 = 0, LE_4 < LE_3 < 0$ ; 对于混沌有  $LE_1 > 0, LE_2 = 0, LE_4 < LE_3 < 0, LE_1 + LE_3 + LE_4 < 0$ ; 而对于超混沌则有  $LE_1 > LE_2 > 0, LE_3 = 0, LE_4 < 0, LE_1 + LE_2 + LE_3 + LE_4 < 0$ .

从图 3(a) 可以看出, 当  $k \in [0, 16.6]$  时, 存在两个正的 Lyapunov 指数, 显然系统处于超混沌状态; 而  $k \in (16.6, 21.75]$  时, 系统只有一个正的 Lyapunov 指数, 表明随着  $k$  的增加系统由超混沌演化到混沌状态. 随着  $k$  的继续增加, 最大的 Lyapunov 指数最终等于零, 意味着系统的解演化为一个周期轨. 这在分岔图中对应一条线(周期 1), 如图 3(b) 所示.

若固定参数  $b = 8/3, c = 28, k = 5$ , 改变参数  $a$ , 则变量  $x$  随参数  $a$  变化的分岔图如图 4 所示. 观察图 3(b) 和图 4 后看出, 不同的周期窗口可有不同的特性,  $k$  较大(图 3(b)) 如  $k = 28$  和  $a$  较小(图

4 如  $a = 1.0$ ) 时的周期窗口有较大差异, 它们的周期轨如图 5 所示.

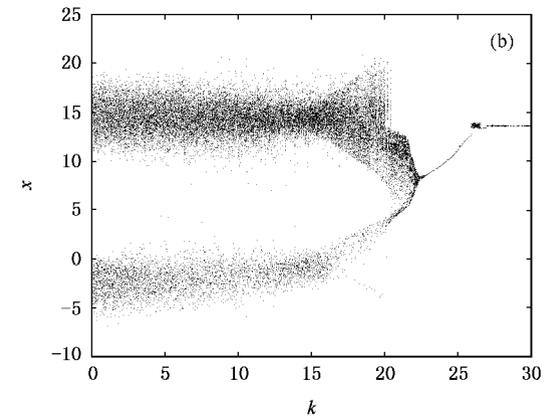
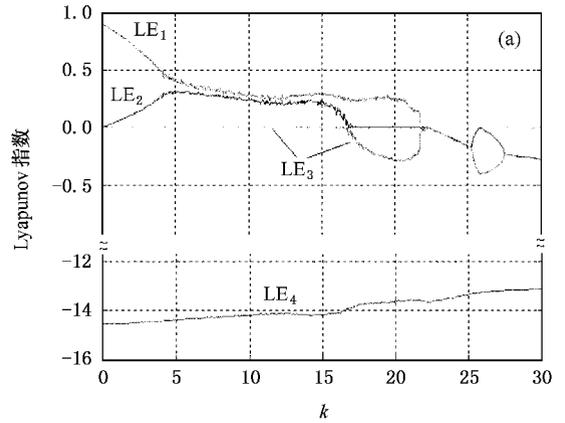


图3 系统(2)的 Lyapunov 指数谱和分岔图 (a) Lyapunov 指数谱; (b)  $x-k$  分岔图

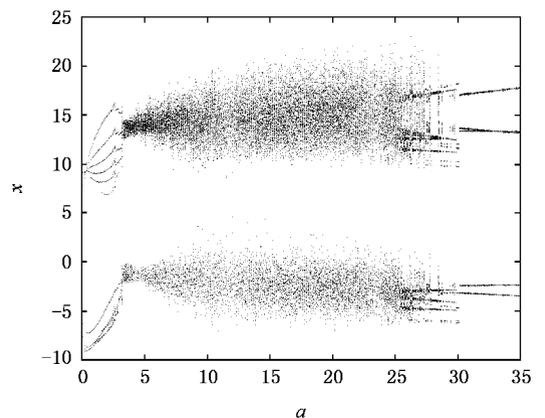


图4  $x-a$  分岔图

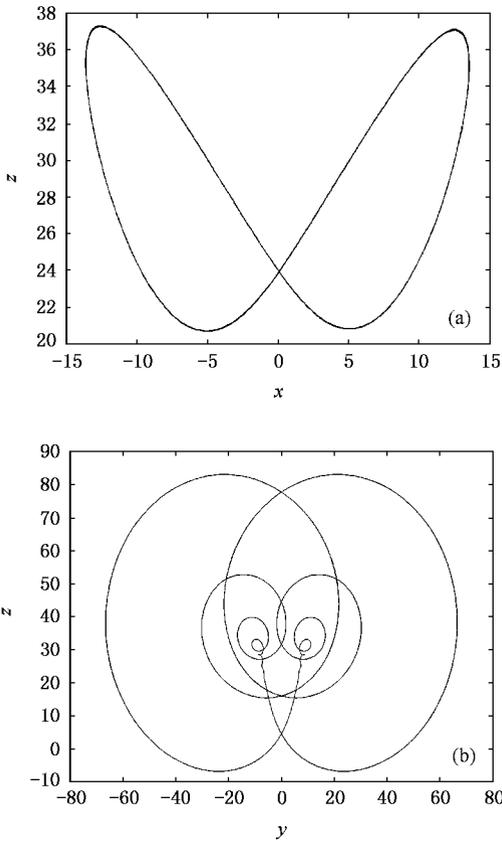


图 5 系统 (2) 的周期轨 (a)  $a = 10, b = 8/3, c = 28, k = 28$ ; (b)  $a = 1.0, b = 8/3, c = 28, k = 5$

### 5. 超混沌 Lorenz 系统的实验验证

为了验证系统 (2) 的超混沌性, 我们设计了一个模拟电子电路, 如图 6 所示。

电路由集成运放构成的积分器、反相加法器、反相器和乘法器构成, 分别实现系统 (2) 中的求导、加减、负号和乘积运算。运放采用 LF347, 乘法器选用 AD633, 电源电压为  $\pm 14\text{ V}$ 。

为了减少电路中的可调参数, 除  $R_1 \sim R_9$  外, 其他电阻都选为  $10\text{ k}\Omega$ , 而  $R_1$  与  $R_2, R_7, R_3, R_9$  分别对应系统 (2) 中的参数  $a, b, c, k$ , 且有一一对应的关系。

图 7 为实验中在示波器上观察到的超混沌吸引子 (实线为吸引子在不同相平面上的投影, 用数码相机在黑暗的环境下拍摄)。其中,  $R_1 = R_2 = 10\text{ k}\Omega$ , 对应  $a = 10$ ;  $R_7 = 37\text{ k}\Omega$ , 对应  $b = 8/3$ ;  $R_3 = 3.6\text{ k}\Omega$ , 对应  $c = 28$ ;  $R_9 = 20\text{ k}\Omega$ , 对应  $k = 5$ 。其他电路元件参数如图 6 所示。

图 8 为从示波器上观察到的两个周期轨道, 与图 5 的计算机仿真周期轨道相对应。其中图 8 (a) 的  $R_9 = 3.6\text{ k}\Omega$ , 对应  $k = 28$ , 其他参数与图 7 相同; 图 8 (b) 的  $R_1 = R_2 = 100\text{ k}\Omega$ , 对应  $a = 1.0$ , 其他参数与图 7 相同。

从图 1, 5, 7 和 8 看出, 实验结果与计算机仿真结果符合的很好。

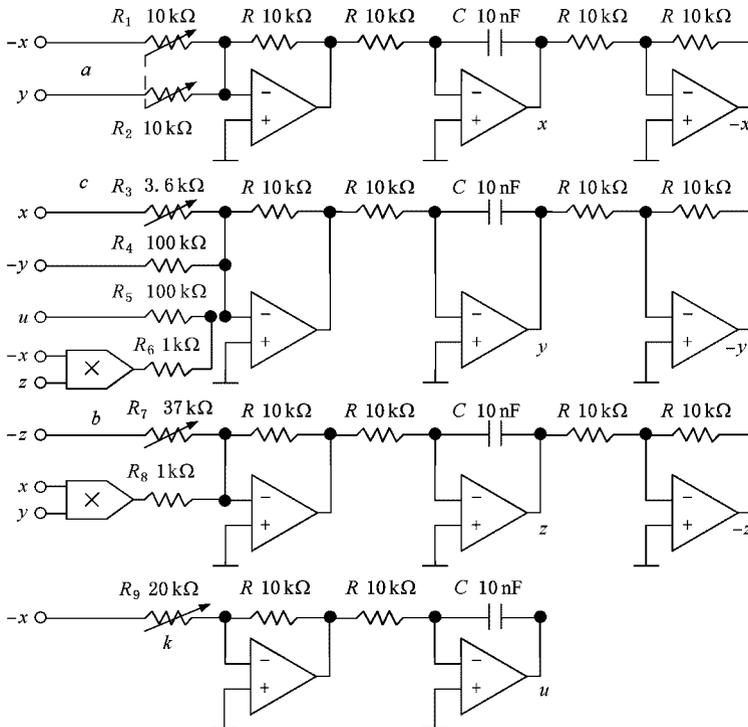


图 6 超混沌 Lorenz 电路

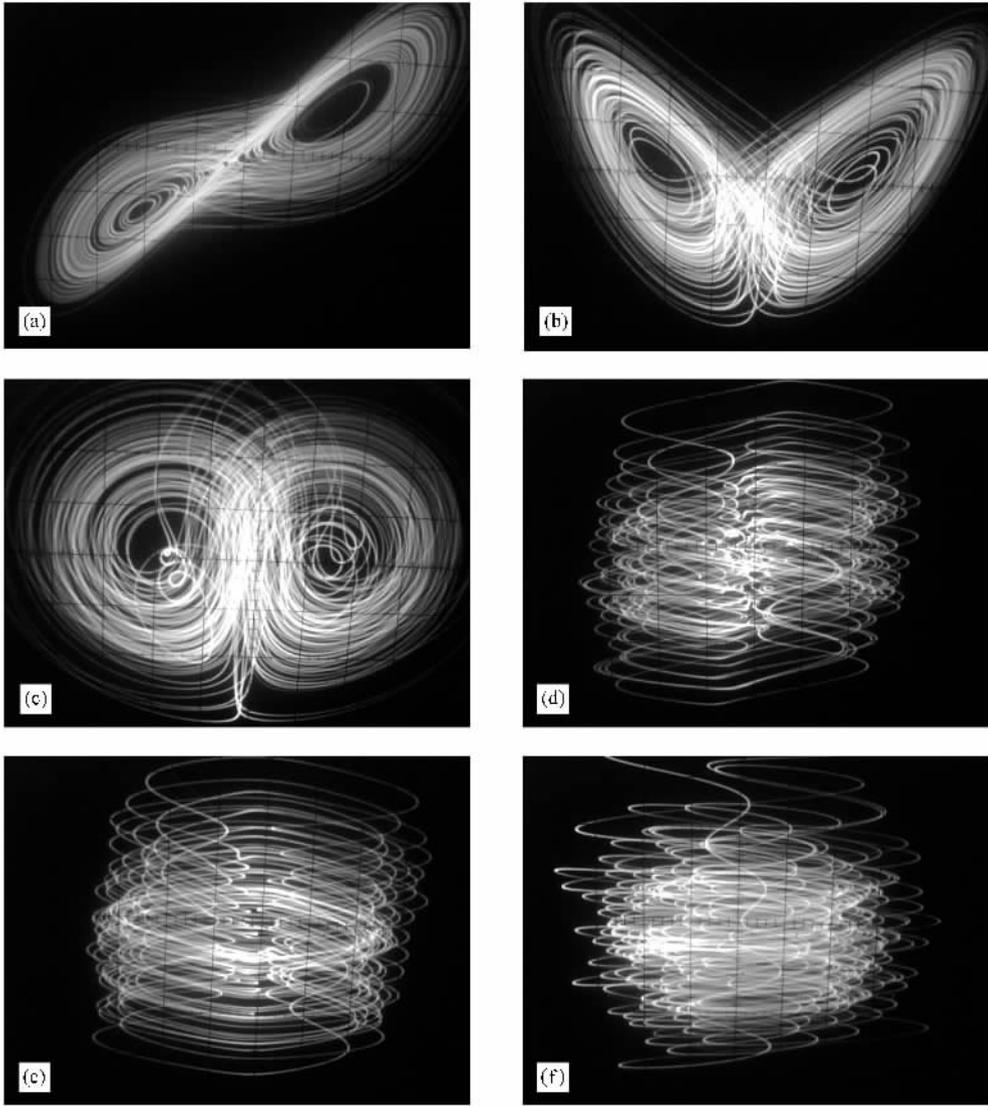


图 7 实验中观察到的系统(2)的超混沌吸引子相图 (a)  $x-y$  平面 ;(b)  $x-z$  平面 ;(c)  $y-z$  平面 ;(d)  $x-u$  平面 ;(e)  $y-u$  平面 ;(f)  $z-u$  平面

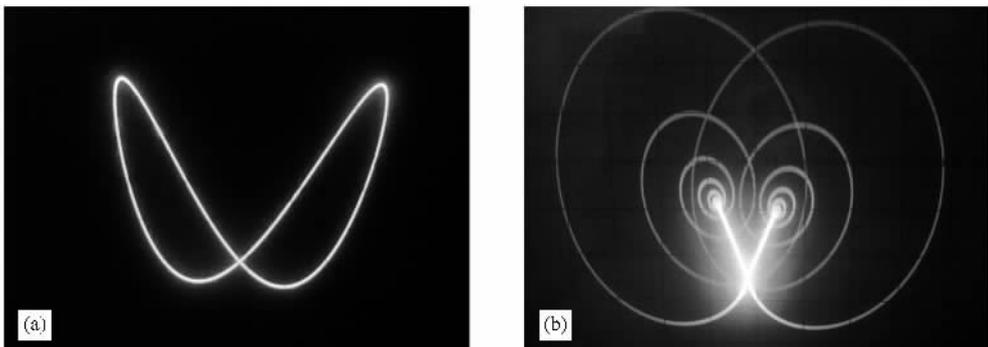


图 8 实验中观察到的系统(2)的周期轨道 (a)  $x-z$  平面 (b)  $y-z$  平面

## 6. 结 论

本文通过在 Lorenz 混沌系统中引入状态反馈控制器的方法构造了一个超混沌 Lorenz 系统, 系统的超混沌性通过 Lyapunov 指数计算得到了验证. 对其动力学特性分析后发现, 系统具有一个平衡点, 在一定条件下发生 Hopf 分岔. 通过 Lyapunov 指数谱和分

岔图, 对系统在混沌、超混沌和周期轨之间的转换进行了分析, 发现系统在较大参数范围内 ( $k \in [0, 16.6]$ ) 存在超混沌轨道, 这使得超混沌 Lorenz 系统具有潜在的实际工程应用前景.

为了验证系统的超混沌行为, 还设计了一个模拟电子电路并进行了实验, 实验结果与计算机仿真结果完全一致.

- 
- [ 1 ] Chen G, Ueta T 1999 *Int. J. Bifurcation Chaos* **9** 1465
- [ 2 ] Lü J, Chen G 2002 *Int. J. Bifurcation Chaos* **12** 659
- [ 3 ] Lü J, Chen G, Čelikovský S 2002 *Int. J. Bifurcation Chaos* **12** 2917
- [ 4 ] Qi G, Chen G 2006 *Phys. Lett. A* **352** 386
- [ 5 ] Liu W, Chen G 2003 *Int. J. Bifurcation Chaos* **13** 261
- [ 6 ] Wang G Y, Qiu S S, Li H W, Li C F, Zheng Y 2006 *Chin. Phys.* **15** 2878
- [ 7 ] Wang G Y, Qiu S S, Xu Z Y 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3295 ( in Chinese ) 王光义、丘水生、许志益 2006 物理学报 **55** 3295 ]
- [ 8 ] Wang F Q, Liu C X 2006 *Chin. Phys.* **15** 2878
- [ 9 ] Li Y, Chen G, Tang W K S 2005 *IEEE Trans. Circuits Systems II* **52** 204
- [ 10 ] Li Y, Tang W K S, Chen G 2005 *Int. J. Circ. Theor. Appl.* **33** 235
- [ 11 ] Li Y, Tang W K S, Chen G 2005 *Int. J. Bifurcation Chaos* **15** 3367
- [ 12 ] Chen A, Lu J, Lü J, Yu S 2006 *Physica A* **364** 103
- [ 13 ] Wang G, Zhang X, Zheng Y, Li Y 2006 *Physica A* **371** 260
- [ 14 ] Wang F Q, Liu C X 2006 *Chin. Phys.* **15** 1971
- [ 15 ] Yu S M 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1500 ( in Chinese ) 禹思敏 2005 物理学报 **54** 1500 ]
- [ 16 ] Zhang Y H, Qi G Y, Liu W L, Yan Y 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3307 ( in Chinese ) 张宇辉、齐国元、刘文良、阎彦 2006 物理学报 **55** 3307 ]
- [ 17 ] Yu S M, Ma Z G, Qiu S S, Peng S G, Lin Q H 2004 *Chin. Phys.* **13** 317
- [ 18 ] Thamilaran K, Lakshmanan M, Venkatesan A 2004 *Int. J. Bifurcation Chaos* **14** 221
- [ 19 ] Liu Y Z, Liu Y Z 2007 *Chin. Phys.* **16** ( in press )
- [ 20 ] Rössler O E 1979 *Phys. Lett. A* **71** 155
- [ 21 ] Lorenz E N 1963 *J. Atmos. Sci.* **20** 130

# A hyperchaotic Lorenz attractor and its circuit implementation<sup>\*</sup>

Wang Guang-Yi Zheng Yan Liu Jing-Biao

( *Institute of Electronics Information, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310018, China* )

( Received 20 December 2006 ; revised manuscript received 8 March 2007 )

## Abstract

In this paper, a new hyperchaotic system is constructed by introducing an additional state variable into the third-order Lorenz system. Some basic properties, including dissipativity, equilibria, stability and Hopf bifurcation, of this hyperchaotic system are analyzed in detail, and the bifurcation routes to hyperchaos from periodic, chaotic evolutions are observed. The existence of hyperchaos is verified with Lyapunov exponent spectrum. Moreover, an analog electronic circuit is designed, and various hyperchaotic attractors of this system are observed from the circuit experiments.

**Keywords** : Lorenz system, hyperchaotic attractor, circuit implementation

**PACC** : 0545

---

<sup>\*</sup> Project supported by the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China ( Grant No. Y105175 ) and the Science Investigation Foundation of Hangzhou Dianzi University, China ( Grant No. KYS051505010 ).