

一个赤道太平洋西部边界潜流 广义扰动机理的近似解法^{*}

莫嘉琪¹⁾²⁾⁴⁾ 林万涛³⁾ 林一骅³⁾

1) 安徽师范大学, 芜湖 241000)

2) 上海高校计算科学 E-研究院 SJTU 研究所, 上海 200240)

3) LASG, 中科院大气物理研究所, 北京 100029)

4) 湖州师范学院, 湖州 313000)

(2006 年 9 月 22 日收到, 2006 年 10 月 12 日收到修改稿)

研究了一类赤道太平洋西部边界潜流的扰动机理. 考虑了对应的广义控制方程. 首先引入了一个优化的同伦映射, 利用相应的映射求得了原模型的近似解. 最后, 通过一个例子说明了用同伦映射方法得到的近似解具有较好的精确度.

关键词: 潜流, 扰动, 近似解

PACC: 0545, 0200

1. 引 言

赤道太平洋西部边界潜流的存在启示着西部边界流动(WBC)具有斜压性. 研究其斜压的状态和动力学将对海洋流动的斜压理论具有很大的意义. 但是, 近来 WBC 斜流研究结果还不能成为海洋流动的斜压理论的重要部分^[1,2]. 少数深海流动的模型斜压的连续解在 WBC 的匹配内部还不能得到^[2]. 在深海底部附近少数深海循环模型说明酝酿着深度边界流的存在^[3]. 至今 WBC 的正压理论已经被成功地检验, 但是斜压仍然基于观察阶段, 没有形成较完整的理论^[4]. 本文就是在这个情况下提供一个潜流的动力系统的广义扰动机理的近似解法. 由此得出的近似解为基础, 就可能进一步研究赤道西部边界潜流的更深层的物理性态.

近来, 许多学者已经研究了相关的非线性问题. 近似求解的方法不断地在改进, 诸如平均法、边界层校正法、伸长变量法、匹配渐近展开法、多重尺度法等等^[5-8]. 莫嘉琪等^[9-19]也利用微分不等式等方法研究了一些大气物理、海洋科学等非线性模型. 本

文研究一个赤道太平洋西部边界潜流的非线性模型. 并用一个简单而有效的近似方法^[20,21], 得到了具有较高精度的近似解.

2. 广义扰动机理模型

考虑一个二维流体动力模型. 设 x 和 z 分别表示为垂直平面上的水平和垂直坐标. 令 z 轴为以海平面为零点且垂直于海平面. 本文是考虑如下的广义控制方程的弱非线性问题^[22]:

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} - fv = \epsilon F(x, z, v, p, p_x, p_z, \epsilon), \quad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} - hv + \rho g = \epsilon G(x, z, v, p, p_x, p_z, \epsilon), \quad (2)$$

$$p|_{z=\eta(x)} = P_0, \quad (3)$$

其中 ϵ 为正的小参数, v 为在 x, z 平面上的垂直速率, p 为压强, P_0 为常数, $\rho = \rho_1(x) + \rho_2(z)$ 为密度, ρ_0 为 ρ 的平均值, f, h 为 Coriolis 参数, g 为重力加速度, 方程(1), (2)的右端为弱扰动项, $F, G, \rho_i, i=1, 2, \eta(x)$, 为关于其变元为充分光滑的函数. 本文讨论 $\eta(x)=0$ 的情形.

^{*} 国家自然科学基金项目(批准号:40676016, 10471039) 国家重点基础研究发展计划项目(973 项目)(批准号:2003CB415101-03, 2004CB418304) 中国科学院创新方向性项目(批准号:KZCX3-SW-221), 上海市教育委员会 E-研究院建设计划项目(批准号: E03004) 和浙江省自然科学基金(批准号: Y606268) 资助的课题.

[†] E-mail: mojiqi@mail.ahnu.edu.cn

3. 同伦映射

引入同伦映射^[20,21] $H_i(p, v, r): X^2 \times I \rightarrow R$,

$i = 1, 2$:

$$H_1(p, v, r) = L_1(p, v) - L_1(\bar{p}_0, \bar{v}_0) + r(L_1(\bar{p}_0, \bar{v}_0) - \epsilon F(x, z, p, v, p_x, p_z)), \quad (4)$$

$$H_2(p, v, r) = L_2(p, v) - L_2(\bar{p}_0, \bar{v}_0) + r(L_2(\bar{p}_0, \bar{v}_0) - \epsilon G(x, z, p, v, p_x, p_z)), \quad (5)$$

其中 $X = [0, \infty), I = [0, 1], R = (-\infty, +\infty)$ 而算子 $L_i, i = 1, 2$ 为

$$L_1(p, v) = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} - fv, \quad (6)$$

$$L_2(p, v) = \frac{\partial p}{\partial z} - hv + (\rho_1(x) + \rho_2(z))g, \quad (7)$$

且 (\bar{p}_0, \bar{v}_0) 为原模型(1)–(3)解的零次近似.

现选定 (\bar{p}_0, \bar{v}_0) 为如下线性问题:

$$L_i(\bar{p}_0, \bar{v}_0) = 0, i = 1, 2, \bar{p}_0(x, r(x)) = P_0 \quad (8)$$

的解.

由(8)式的偏微分系统可转换为

$$\frac{h}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} - f \frac{\partial p}{\partial z} = f(\rho_1(x) + \rho_2(z))g,$$

$$v = \frac{1}{f\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

上述前一式关于 p 满足的偏微分方程对应的特征方程为

$$\frac{\rho_0 dx}{h} = \frac{dz}{-f} = \frac{dp}{f(\rho_1(x) + \rho_2(z))g}.$$

不难看出,上述系统有如下两个首次积分:

$$x + \frac{h}{f\rho_0} z = C_1,$$

$$p - \frac{fg\rho_0}{h} \int_0^x \rho_1(x_1) dx_1 + g \int_0^z \rho_2(z_1) dz_1 = C_2,$$

其中 C_1, C_2 为任意常数. 因此系统(8)关于 p 的通解为

$$p = \frac{fg\rho_0}{h} \int_0^x \rho_1(x_1) dx_1 - g \int_0^z \rho_2(z_1) dz_1 + \Phi\left(x + \frac{h}{f\rho_0} z\right),$$

其中 Φ 为任意函数. 再由(8)式的相应的边界条件 $p(x, 0) = P_0$, 不难得到问题(8)的解为

$$\bar{p}_0(x, z) = P_0 - \frac{fg\rho_0}{h} \int_x^{x+\frac{h}{f\rho_0}z} \rho_1(x_1) dx_1 - g \int_0^z \rho_2(z_1) dz_1, \quad (9)$$

$$\bar{v}_0(x, z) = -\frac{g}{h} \left[\rho_1\left(x + \frac{h}{f\rho_0}z\right) - \rho_1(x) \right]. \quad (10)$$

显然,由(4)–(7)式, $H_i(p, v, 1) = \lim_{r \rightarrow 1} H_i(p, v, r) = 0, i = 1, 2$ 与系统(1), (2)相同. 故系统(1), (2)的解 $(p(x, z), v(x, z))$ 就是 $H_i(p, v, r) = 0, i = 1, 2$, 当 $r \rightarrow 1$ 时的解.

4. 构造近似解

令

$$p = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x, z)r^k, v = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(x, z)r^k. \quad (11)$$

将(11)式代入 $H_i(p, v, r) = 0, i = 1, 2$ 按 r 的幂展开, 比较 r 的同次幂的系数. 由 r 的零次幂的系数得

$$L_i(p_0, v_0) = L_i(\bar{p}_0, \bar{v}_0), i = 1, 2. \quad (12)$$

因此,考虑到(9), (10)式及 $p_0(x, 0) = P_0$, 得

$$p_0(x, z) = P_0 - \frac{fg\rho_0}{h} \int_x^{x+\frac{h}{f\rho_0}z} \rho_1(x) dx_1 - g \int_0^z \rho_2(z_1) dz_1, \quad (13)$$

$$v_0(x, z) = -\frac{g}{h} \left[\rho_1\left(x + \frac{h}{f\rho_0}z\right) - \rho_1(x) \right]. \quad (14)$$

于是有

$$L_1(p_1, v_1) = \epsilon F(x, z, v_0, p_0, p_{0x}, p_{0z}),$$

$$L_2(p_1, v_1) = \epsilon G(x, z, v_0, p_0, p_{0x}, p_{0z}), \quad (15)$$

$$p_1(x, 0) = 0, \quad (16)$$

这里的 p_0, v_0 由(13), (14)式决定, 并有

$$L_1(p_k, v_k) = \epsilon \bar{F}_k,$$

$$L_2(p_k, v_k) = \epsilon \bar{G}_k,$$

$$p_k(x, 0) = 0, k = 2, 3, \dots, \quad (17)$$

其中

$$\bar{F}_k = \left[\frac{1}{(k-1)!} \frac{\partial^{k-1} F}{\partial r^{k-1}} \right]_{r=0},$$

$$\bar{G}_k = \left[\frac{1}{(k-1)!} \frac{\partial^{k-1} G}{\partial r^{k-1}} \right]_{r=0}, k = 2, 3, \dots.$$

它们依次是已知函数, 其结构从略.

由(15)–(17)式, 能依次地得到 $(p_k, v_k), k = 1, 2, \dots$. 因此由(11)式, 令 $r = 1$, 这时有模型(1)–(3)的第 n 次近似解 $(\bar{p}_n(x, z), \bar{v}_n(x, z))$ 为^[21, 22]

$$\bar{p}_n(x, z) = \sum_{k=0}^n p_k(x, z),$$

$$\bar{v}_n(x, z) = \sum_{k=0}^n v_k(x, z).$$

5. 举 例

考虑一个特殊的非线性摄动潜流模型. 它的潜流方程的扰动项为 $F = \varepsilon x^2$, $G = \varepsilon p_z^2$, 而 $\eta(x) = 0$, $\rho_1 = a\rho_0$, $\rho_2 = b\rho_0 z$, a, b 为正常数. 利用上述同伦映射解法, 由(13), (14)式不难得到模型(1)–(3)的零次近似解为

$$p_0 = P_0 - g\rho_0 \left(az + \frac{b}{2} z^2 \right), \quad v_0 = 0. \quad (18)$$

由(15), (16)式 (p_1, v_1) 满足

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial x} - f v_1 = \varepsilon x^2.$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial z} - h v_1 = \varepsilon g^2 \rho_0^2 (a + bz)^2, \quad (19)$$

$$p_1(x, 0) = 0. \quad (20)$$

由(19)式, 关于 p 满足的偏微分方程可转换为

$$\frac{h}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial x} - f \frac{\partial p_1}{\partial z} = \varepsilon h x^2 - \varepsilon f g^2 \rho_0^2 (a + bz)^2. \quad (21)$$

它对应的特征方程为

$$\frac{\rho_0 dx}{h} = \frac{dz}{-f} = \frac{dp_1}{\varepsilon h x^2 - \varepsilon f g^2 \rho_0^2 (a + bz)^2}.$$

上述系统有如下两个首次积分：

$$x + \frac{h}{f\rho_0} z = \bar{C}_1,$$

$$p_1 - \frac{\varepsilon\rho_0}{3} \left(x^3 + \frac{g^2\rho_0}{b} (a + bz)^2 \right) = \bar{C}_2,$$

其中 \bar{C}_1, \bar{C}_2 为任意常数. 因此(21)式的通解为

$$p_1 = \frac{\varepsilon\rho_0}{3} \left(x^3 + \frac{g^2\rho_0}{b} (a + bz)^2 \right) + \bar{\Phi} \left(x + \frac{h}{f\rho_0} z \right),$$

其中 $\bar{\Phi}$ 为任意函数. 再由边界条件(20), 不难得到(19)–(20)式的解为

$$p_1 = \frac{\varepsilon\rho_0}{3} \left[\left(x^3 - \left(x + \frac{h}{f\rho_0} z \right)^3 \right) + \frac{g^2\rho_0}{b} \left((a + bz)^2 - a^2 \right) \right],$$

$$v_1 = -\frac{\varepsilon}{f} \left(x + \frac{h}{f\rho_0} z \right)^2.$$

于是得到了原模型(1)–(3)关于 p 的一次近似解

$$\bar{p}_1(x, z) = P_0 - g\rho_0 \left(az + \frac{b}{2} z^2 \right) + \frac{\varepsilon\rho_0}{3} \left[\left(x^3 - \left(x + \frac{h}{f\rho_0} z \right)^3 \right) + \frac{g^2\rho_0}{b} \left((a + bz)^2 - a^2 \right) \right],$$

$$\bar{v}_1(x, z) = -\frac{\varepsilon}{f} \left(x + \frac{h}{f\rho_0} z \right)^2.$$

还可继续用同样的方法得到更高次的近似解.

为了看出上面的结果的精度, 比较一个特殊的情形. 给出一组参数如下: $\rho_0 = 1.04 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $f = h = 2 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$, $g = 9.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $P_0 = 0 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2}$, $\varepsilon = 0.1$, $a = b = \frac{1}{2}$, $z \in [-2.0, -0.0] \text{ km}$. 作为一个例子, 用本同伦映射方法计算出的近似解和用数值模拟计算得出的近似解, 分别在 $x = 0.5 \text{ km}$ 和 $x = 1.0 \text{ km}$ 的垂直剖面上的压强曲线作一个比较. 其计算结果对应的图形见图 1.

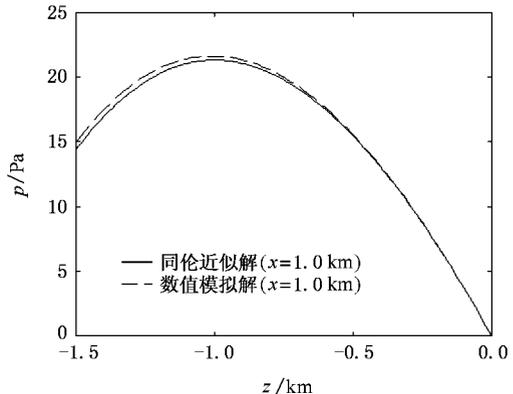
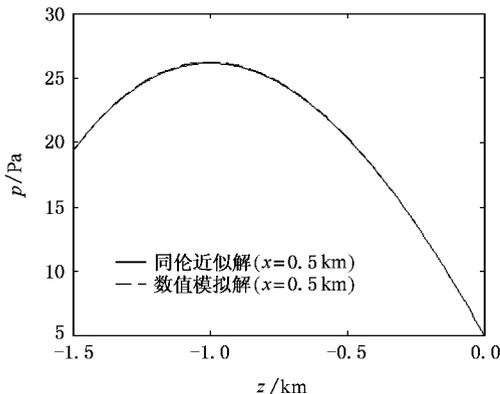


图 1 同伦映射近似解和数值模拟解的压强曲线精度比较

由图 1 可以看出,模型的压强用同伦映射方法计算出的近似解和用数值模拟计算得出的近似解具有较高的精确度.

6. 结 语

赤道太平洋西部边界潜流的扰动机理是一个很复杂的自然现象.因此需要对它作必要的简化,创建

出它的动力学模型,并用数学上的近似的方法去求出它的解.同伦映射方法就是一个简单而有效的方法.

同伦映射解法不同于一般的数值解法,它是一个解析求解方法.它可以将解进行进一步解析运算,从而可以以得到的解为基础,通过解析运算来得到其他相关的物理量.关于这方面的研究,将另文讨论.

- [1] Qu T, Kagimoto T, Yamagata T 1997 *Deep. Sea. Res.* **44** 413
- [2] Welander P 1988 *J. Phys. Oceanogr* **8** 107
- [3] Stommel H 1958 *Deep. Sea. Res.* **5** 80
- [4] Wang F, Hu D X 1998 *Chin. J. Oceanol. Limnol* **16** 122
- [5] De Jager E M, Jiang F R 1996 *The Theory of Singular Perturbation* (Amsterdam : North-Holland Publ. Co)
- [6] Ni W M, Wei J C 2006 *J. Diff. Eqns.* **221** 158
- [7] Khasminskii R Z, Yin G 2005 *J. Diff. Eqns.* **212** 85
- [8] Marques I 2005 *Nonlinear Anal.* **61** 21
- [9] Mo J Q, Lin W T, Zhu J 2004 *Progress Natural. Sci.* **14** 550
- [10] Mo J Q, Lin W T, Zhu J 2004 *Progress Natural Sci.* **14** 1126
- [11] Mo J Q, Wang H, Lin W T 2005 *Acta Oceanol. Sinica* **24** 35
- [12] Mo J Q, Lin W T, Zhu J 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3245 (in Chinese)[莫嘉琪、林万涛、朱 江 2004 物理学报 **53** 3245]
- [13] Mo J Q, Lin W T 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 993 (in Chinese)[莫嘉琪、林万涛 2005 物理学报 **54** 993]
- [14] Mo J Q, Wang H, Lin W T, Lin Y H 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 6 (in Chinese)[莫嘉琪、王 辉、林万涛 2006 物理学报 **55** 6]
- [15] Mo J Q, Wang H, Lin W T 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3229 (in Chinese)[莫嘉琪、王 辉、林万涛 2006 物理学报 **55** 3229]
- [16] Mo J Q, Lin W T 2005 *Chin. Phys.* **14** 875
- [17] Mo J Q, Wang H, Lin W T, Lin Y H 2006 *Chin. Phys.* **15** 671
- [18] Mo J Q, Wang H, Lin W T 2006 *Chin. Phys.* **15** 1450
- [19] Mo J Q, Wang H, Lin W T 2006 *Chin. Phys.* **15** 1927
- [20] He J H 2002 *Approximate Nonlinear Analytical Methods in Engineering and Sciences* (Shengzhou : Henan Sci. Techn. Publ. (in Chinese)[何吉欢 2002 工程和科学计算中的近似非线性分析方法(郑州 河南科学技术出版社)]
- [21] Liao S J 2004 *Beyond Perturbation : Introduction to the Homotopy Analysis Method* (New York , CRC Press Co)
- [22] Wang Fan, Hu Dunsin 1999 *Chin. J. Oceanol. Limnol.* **17** 1

Approximate solving method for a generalized perturbed mechanism of western boundary undercurrents in equator pacific^{*}

Mo Jia-Qi^{1 2 3 4 †} Lin Wan-Tao³ Lin Yi-Hua³

¹ *Anhui Normal University, Wuhu 241000, China*

² *Division of Computational Science, E-Institutes of Shanghai Universities, at SJTU, Shanghai 200240, China*

³ *LASG, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029, China*

⁴ *Huzhou Teacher College, Huzhou 313000, China*

(Received 22 September 2006 ; revised manuscript received 12 October 2006)

Abstract

A class of perturbation mechanisms for the western boundary undercurrents in the equator Pacific is considered. The generalized governing equations are studied. Firstly, an optimal homotopic mapping is introduced. And the approximate solution is obtained for original model using the corresponding method of the homotopic mapping. Finally, an example shows that a good precision is attained for the approximate solution using the method of homotopic mapping.

Keywords : undercurrents , perturbation , approximate solution

PACC : 0545 , 0200

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 40676016 , 10471039), the State Key Program for Basics Research of China (Grant Nos. 2003CB415101-03 , 2004CB418304), the Key Project of the Chinese Academy of Sciences (Grant No. KZCX3-SW-221) and in part by E-Institutes of Shanghai Municipal Education Commission (Grant No. E03004) and the Natural Science Foundation of Zhejiang Province , China (Grant No. Y606268).

[†] E-mail : mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn