

Langford 系统 Hopf 分叉的线性反馈控制*

刘素华^{1)†} 唐驾时¹⁾

1) 湖南大学力学与航空航天学院, 长沙 410082)

2) 安阳工学院, 安阳 455000)

(2006 年 7 月 18 日收到, 2006 年 10 月 5 日收到修改稿)

分析 Langford 系统的 Hopf 分叉现象, 并研究采用线性反馈控制方法控制该系统的 Hopf 分叉. 从理论上推导出受控系统产生 Hopf 分叉的条件, 给出了某些极限环的解析表达式, 对该系统进行了分叉点的转移与极限环的稳定性控制. 数值模拟说明本文采用的方法对 Langford 系统的 Hopf 分叉控制是有效的.

关键词: Langford 系统, 反馈控制, Hopf 分叉, 极限环

PACC: 0547

1. 引言

非线性动力系统的分叉控制具有十分重要的实际应用研究价值, 在电力系统、热传导、人造卫星、机器人、喷气式发动机以及磁力轴承等工程领域分叉控制都有着广阔的应用. 分叉控制的研究最早见著于 1986 年 Abed 和 1987 年 Fu^[1,2]的工作, 其主要研究了 n 维非线性系统的静态反馈稳定性控制; 后来 Wang 和 Abed^[3,4]等又提出了动态反馈的控制方法. Chen^[5]对分叉理论及控制方法做了全面的综述. 近年来许多科学工作者在分叉混沌理论及控制领域做了大量的研究工作, 如高维动力系统的周期轨道理论分析^[6-8]、极限环的幅值控制^[9]、分叉与混沌现象的各种分析控制方法^[10-16]等等.

分叉控制的主要任务是控制非线性动力系统的分叉行为, 从而得到系统所需要的输出特性, 具体工作有: 转移或消除系统原有的分叉点, 稳定分叉的周期轨道, 引入新的分叉行为, 改变极限环的幅值、频率及多重性等等. Hopf 分叉是动力系统的一类重要的动态分叉. 本文研究下列 Langford 系统的 Hopf 分叉控制:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (\mu - 1)x_1 - x_2 + x_1 x_3, \\ \dot{x}_2 = x_1 + (\mu - 1)x_2 + x_2 x_3, \\ \dot{x}_3 = \mu x_3 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2), \end{cases} \quad (1)$$

式中 μ 为系统实变参数, 该系统具有很强的非线性动力学行为, 丰富的分叉现象. 文献 [6] 给出了高维系统极限环稳定性的判定定理, 对 Langford 系统的一个 Hopf 分叉点极限环进行了稳定性分析. 文献 [7] 采用伪弧长算法实现了对 Langford 系统极限环轨道的数值追踪. 本文采用线性反馈控制方法对 Langford 系统 (1) 的 Hopf 分叉点的转移与极限环的稳定性进行控制. 通过数值模拟验证所设计的控制器对分叉点控制的有效性, 同时给出一些理论所未及的数值结果.

2. Langford 系统的 Hopf 分叉

2.1. 定性分析

容易验证, 系统 (1) 对于任意 μ 有平衡点 $(0, 0, 0)$ 和 $(0, 0, \mu)$.

在平衡点 $(0, 0, 0)$ 系统 (1) 的线性化矩阵为

$$DF_{(0,0,0)} = \begin{pmatrix} \mu - 1 & -1 & 0 \\ 1 & \mu - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix},$$

相应的特征值 $\lambda_1 = \mu$, $\lambda_{2,3} = \mu - 1 \pm i$. 当 $\mu < 0$ 时, 平衡点渐近稳定; 当 $\mu > 0$ 时平衡点不稳定. $(0, 0, 0)$ 为静态分叉点. 当 $\mu < 1$, $|\mu - 1| \ll 1$ 时, 系统 (1) 产生 Hopf 分叉, 极限环不稳定. $(0, 0, 0, 1, 0)$ 是

* 国家自然科学基金(批准号: 30672053)资助的课题.

† E-mail: liusuhua968@yahoo.com.cn

系统(1)的亚临界 Hopf 分叉点.

同理分析知 $(0, 0, 0.5, 0.5)$ 为系统的超临界 Hopf 分叉点, 极限环渐近稳定^[6].

2.2. 极限环的定量分析

为获得系统的极限环解析解, 利用圆柱坐标转换 $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (r, \theta, x_3)$, 系统(1)可改写为

$$\begin{cases} \dot{r} = r(\mu - 1 + x_3), \\ \dot{\theta} = 1, \\ \dot{x}_3 = -r^2 + (\mu - x_3)x_3, \end{cases} \quad (2)$$

于是在 (r, x_3) 平面上找到系统周期为 $T = 2\pi$ 的平衡解, 即

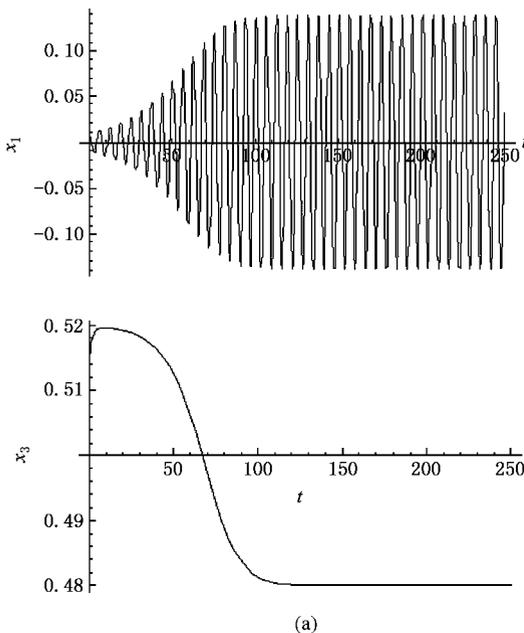
$$\begin{cases} x_3 = 1 - \mu, \\ r = \sqrt{(1 - \mu)(2\mu - 1)}, \end{cases} \quad (3)$$

上式即为系统(1)极限环解析解的极坐标表达式, 可见, 极限环发生在 $x_3 = 1 - \mu$ 的平面上 (3) 式中第

二式为极限环幅值, μ 取值应满足 $\frac{1}{2} < \mu < 1$. 相应地, 系统极限环解析解的笛卡儿坐标表达式为

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{(1 - \mu)(2\mu - 1)} \cos t, \\ x_2 = \sqrt{(1 - \mu)(2\mu - 1)} \sin t, \\ x_3 = 1 - \mu. \end{cases} \quad (4)$$

取 $\mu = 0.52$ 代入解析式(3)计算得到 $x_3 = 0.48$, $r = 0.1386$.



综合上述对系统的分析, 在极坐标下系统的三维分叉图如图 1 所示. 图中横向坐标为 μ , 纵向坐标为 x_3 , 竖向坐标为 r . 平衡点的坐标简写为 (r, x_3) 形式, 在 $\mu_0 = 0$ 处两平衡点 $(0, 0)$ 和 $(0, \mu)$ 的稳定性发生互换, 系统产生跨临界分叉. $\mu_1 = 1.0$ 和 $\mu_2 = 0.5$ 分别为系统的 Hopf 分叉值, 圆点曲线部分代表极限环幅值, 实线代表稳定的平衡点, 点画线代表不稳定的平衡点.

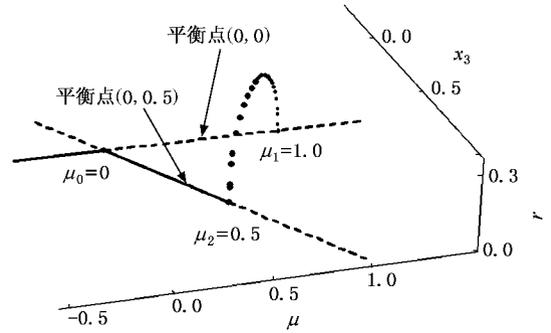


图 1 系统(1)的跨临界分叉图

2.3. 系统的数值模拟

为验证理论分析的结果, 对系统进行数值模拟. 数值模拟用 Mathematica 程序完成, 步长 $h = 0.005$.

图 2 为系统(1)的数值模拟时间历程图和相图, 取 $\mu = 0.52$, 初值 $x_1 = 0.01, x_2 = 0, x_3 = 0.515$, 图中

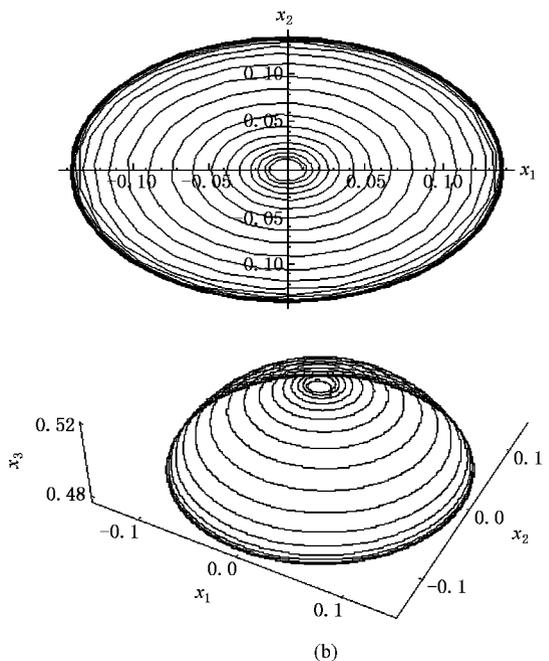


图 2 系统(1)的数值模拟图 ($\mu = 0.52$) (a) $x_1(t), x_3(t)$ 时间历程图; (b) x_1-x_2 相图及三维相图

显示,系统从初值点逐渐趋近于在平衡点(0,0,0.5)邻域的极限环,绕点(0,0,0.48)作周期运动,检验了 2.1 节关于点(0,0,0.5,0.5)的系统定性分析结果.对比图 2 的显示数据与 2.2 节 $\mu = 0.52$ 时极限环的解析计算结果 $x_3 = 0.48, r = 0.1386$,二者吻合,进一步地可以通过在 $\mu > 0.5, |\mu - 0.5| \ll 1$ 域内选取不同的值,对比各数值模拟结果与极限环解析计算结果,二者均吻合,从而验证了 2.2 节关于极限环解析解的分析结果(3)式.

3. 线性反馈控制

采用线性反馈控制器,不改变系统(1)的平衡点,转移 Hopf 分叉点.

系统(1)的受控系统可写为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (\mu - 1)x_1 - x_2 + x_1x_3 + k_1x_1, \\ \dot{x}_2 = x_1 + (\mu - 1)x_2 + x_2x_3 + k_2x_2, \\ \dot{x}_3 = \mu x_3 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + k_3x_3, \end{cases} \quad (5)$$

其中 $k_i (i = 1, 2, 3)$ 为待定控制参数.假设系统(5)在原系统(1)平衡点邻域的线性化方程系数矩阵有一个实特征值 $\lambda_1(\mu, k_i)$ 和一对复特征值 $\lambda_{2,3}(\mu, k_i) = \alpha(\mu, k_i) + \beta(\mu, k_i)i$,使其满足在 $\mu = \mu^*$ 时产生 Hopf 分叉的条件式: $\lambda_1(\mu^*, k_i) < 0, \alpha(\mu^*, k_i) = 0, \beta(\mu^*, k_i) > 0$ 及 $\frac{\partial \alpha(\mu, k_i)}{\partial \mu} \Big|_{\mu=\mu^*} > 0$,得到 μ^* 与 k_i 之间的关系式,从而确定达到控制目标的 k_i 值,得到相应的受控系统.简明起见,以下分析将条件式中的 μ^* 简写为 μ .

3.1. 对分叉点(0,0,0,1.0)的控制

利用受控系统(5), $k_i (i = 1, 2, 3)$ 均取为静态参数值,不改变原系统(1)的平衡点(0,0,0),转移其 Hopf 分叉值 $\mu = 1.0$.显然(0,0,0)仍然是受控系统(5)的一个平衡点,即施加控制器后没有改变原系统的平衡点(0,0,0).

受控系统(5)在原点的线性化矩阵为

$$DF_{(0,0,0)} = \begin{pmatrix} \mu - 1 + k_1 & -1 & 0 \\ 1 & \mu - 1 + k_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu + k_3 \end{pmatrix},$$

相应的特征值为 $\lambda_1 = \mu + k_3,$

$$\begin{aligned} \lambda_{2,3} = & [\mu - 1 + 0.5(k_1 + k_2)] \\ & \pm [(\mu - 1 + 0.5(k_1 + k_2))^2 - 1]^{1/2}, \end{aligned}$$

$-(\mu - 1 + k_1)(\mu - 1 + k_2) - 1]^{1/2},$ 则受控系统(5)在原点产生 Hopf 分叉的条件是

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 2(1 - \mu), \\ (\mu - 1 + k_1)(\mu - 1 + k_2) + 1 > 0, \\ k_3 < -\mu. \end{cases} \quad (6)$$

下面分几种情形讨论条件(6),

若所取参数使 $k_1 + k_2 = 0$,则控制系统不能改变分叉值 $\mu = 1.0$;

若取 $k_3 < 0$,则得到分叉值 $\mu > 0$;

若取参数 $k_2 = \alpha$ (或 $k_1 = 0$) 则条件(6)简化为

$$\begin{cases} k_1 = 2(1 - \mu), \\ -2 < k_1 < 2, \\ k_3 < -\mu, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} k_2 = 2(1 - \mu), \\ -2 < k_2 < 2, \\ k_3 < -\mu, \end{cases} \quad (7)$$

由上式可见,当 $k_2 = \alpha$ (或 $k_1 = 0$) 时只能将分叉值控制到 $0 < \mu < 2$ 范围;

若取参数 $k_1 = k_2$,则条件(6)简化为

$$\begin{cases} k_1 = k_2 = 1 - \mu, \\ k_3 < -\mu, \end{cases} \quad (8)$$

此外,对于 $k_1 = k_2$ 的情形,还可以推导出相应受控系统极限环的解析解.当 $k_1 = k_2$ 时受控系统(5)经圆柱坐标转换得到

$$\begin{cases} \dot{r} = r(\mu - 1 + k_1 + x_3), \\ \dot{\theta} = 1, \\ \dot{x}_3 = -r^2 + (\mu + k_3 - x_3)x_3, \end{cases} \quad (9)$$

其周期解为($\theta = t$)

$$\begin{cases} x_3 = 1 - \mu - k_1, \\ r = \sqrt{(1 - \mu - k_1)[2\mu - 1 + k_1 + k_3]}. \end{cases} \quad (10)$$

根据 Hopf 分叉的条件(7)(8),取参数 1) $k_1 = -1.8, k_2 = 0, k_3 = -3$; 2) $k_1 = k_2 = -0.5, k_3 = -0.8$,第 1)组参数对应的受控系统(5)将原系统分叉值 $\mu = 1.0$ 延迟到 $\mu = 1.9$;第 2)组参数将分叉值前置转移到 $\mu = 0.5$;取 $\mu = 0.52$,将第 2)组参数 $k_1 = -0.5, k_3 = -0.8$,代入极限环解析式(10),得到极限环的解析解

$$x_3 = -0.02, r = 0.0721. \quad (11)$$

图 3 为上述第 2)组参数 $k_1 = k_2 = -0.5, k_3 = -0.8$ 对应受控系统(5)的三维分叉图,坐标轴与线型含义与原系统分叉图 1 相同.图中平衡点的坐标简写为(r, x_3)形式,系统有平衡点(0,0)和(0, $\mu - 0.8$)当 $\mu = 0.5$ 时在平衡点(0,0)产生超临界

Hopf 分叉. $\mu_{k1} = 0.5$ 为对原系统分叉值 $\mu_1 = 1.0$ 的前置转移分叉值.

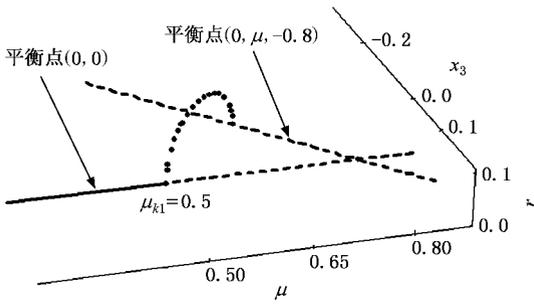


图3 受控系统(5)的分叉图 ($k_1 = k_2 = -1.0, k_3 = -2.8$)

3.2. 对分叉点(0 0 0.5 0.5)的控制

(0 0, μ)是原系统的另一平衡点. 在 $\mu = 0.5$ 时原系统产生超临界 Hopf 分叉. 不改变平衡点(0, 0, 0.5), 为实现 Hopf 分叉点(0, 0, 0.5, 0.5)的转移控制. 取受控系统(5)中 k_3 为动态控制参数 $k_3 = 0.5 - \mu$, 受控系统(5)转变为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (\mu - 1)x_1 - x_2 + x_1 x_3 + k_1 x_1, \\ \dot{x}_2 = x_1 + (\mu - 1)x_2 + x_2 x_3 + k_2 x_2, \\ \dot{x}_3 = \mu x_3 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + (0.5 - \mu)x_3, \end{cases} \quad (12)$$

(0, 0, 0.5)仍然是受控系统(12)的一个平衡点. 在(0, 0, 0.5)受控系统(12)的线性化矩阵为

$$DF_{x(0,0,0.5)} = \begin{pmatrix} \mu - 0.5 + k_1 & -1 & 0 \\ 1 & \mu - 0.5 + k_2 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 \end{pmatrix},$$

相应的特征值为 $\lambda_1 = -0.5$,

$$\begin{aligned} \lambda_{2,3} = & [\mu - 0.5 + 0.5(k_1 + k_2)] \\ & \pm [(\mu - 0.5 + 0.5(k_1 + k_2))^2 \\ & - (\mu - 0.5 + k_1)(\mu - 0.5 + k_2) - 1]^{1/2}, \end{aligned}$$

则受控系统(12)在平衡点(0, 0, 0.5)产生 Hopf 分叉的条件为

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 1 - 2\mu, \\ (\mu - 0.5 + k_1)(\mu - 0.5 + k_2) + 1 > 0, \end{cases} \quad (13)$$

下面分几种情形讨论条件(13):

若所取参数使 $k_1 + k_2 = 0$, 则控制系统不能改变分叉值 $\mu = 0.5$;

若取参数 $k_2 = \alpha$ (或 $k_1 = 0$) 则条件(13)简化为

$$\begin{cases} k_1 = 1 - 2\mu, \\ -2 < k_1 < 2, \end{cases} \quad (\text{或}) \quad \begin{cases} k_2 = 1 - 2\mu, \\ -2 < k_2 < 2, \end{cases} \quad (14)$$

由上式可见, 当 $k_2 = \alpha$ (或 $k_1 = 0$) 时分叉值只能控制到 $-0.5 < \mu < 1.5$ 范围;

若取参数 $k_1 = k_2$, 则条件(13)简化为

$$k_1 = k_2 = 0.5 - \mu, \quad (15)$$

与 3.1 节方法相同, 对于受控系统(12) $k_1 = k_2$ 的情形, 可推导出其极限环极坐标表达式 ($\theta = t$)

$$\begin{cases} x_3 = 1 - \mu - k_1, \\ r = \sqrt{(1 - \mu - k_1)(\mu - 0.5 + k_1)}, \end{cases} \quad (16)$$

根据 Hopf 分叉条件(14)(15), 可取参数 1) $k_1 = 1.0, k_2 = 0.2$ 2) $k_1 = k_2 = -2.5$. 第 1) 组参数对应的受控系统(12) 将分叉点(0, 0, 0.5, 0.5)控制到了(0, 0, 0.5, 0), 第 2) 组参数将分叉点控制到了(0, 0, 0.5, 3.0). 取 $\mu = 3.1$ 将第 2) 组参数 $k_1 = -2.5$ 代入极限环解析式(16), 得到极限环的解析解

$$x_3 = 0.4, r = 0.2. \quad (17)$$

图 4 为上述第 2) 组参数 $k_1 = k_2 = -2.5$ 对应的受控系统(11) 的三维分叉图, 坐标轴与线型含义与原系统分叉图 1 相同. 图中平衡点的坐标简写为形式 (r, x_3), 系统有平衡点(0, 0.5) 和(0, 0), 当 $\mu = 3.0$ 时在平衡点(0, 0.5) 产生超临界 Hopf 分叉, $\mu_{k2} = 3.0$ 为对原系统分叉值 $\mu_2 = 0.5$ 延迟控制后的分叉值.

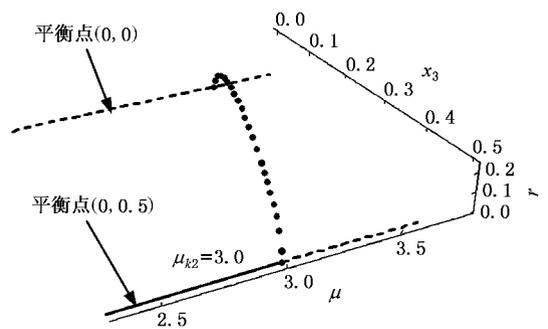


图4 受控系统(12)的分叉图 ($k_1 = k_2 = -2.5$)

3.3. 受控系统 Hopf 分叉点邻域极限环的稳定性分析

上述所选参数对应的受控系统(5), 利用中心流形方法可以得到它们降维后的方程, 选取正定的 Liapunov 函数 $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ 可以验证, 降维后方程的平衡点(0, 0) 为渐近稳定, 从而相应受控系统

(5)的平衡点(0,0,0)亦为渐近稳定,因此在平衡点邻域某 μ 值处均产生超临界Hopf分叉,极限环渐近稳定^[6].对于受控系统(12),结论相同,证明过程从略.

由以上分析可见,3.1节和3.2节的控制不仅实现了转移,同时实现了由不稳定到稳定的极限环控制.

4. 受控系统的数值模拟

对受控系统(5)、受控系统(12)Hopf分叉点邻域产生的极限环进行数值模拟,验证受控系统对原

系统Hopf分叉点转移或延迟并产生稳定极限环的有效性.在以下各组数值模拟图形中(图5—8)(a)为 $x_1(t)$ 时间历程图,(b)为 $x_3(t)$ 时间历程图,(c)为在Hopf分叉点邻域产生的极限环轨迹图.

图5为控制参数 $k_1 = -1.8, k_2 = 0, k_3 = -3$ 对应的受控系统(5)的数值模拟图(取 $\mu = 2.0$),初值 $x_1 = 0.01, x_2 = 0, x_3 = -0.01$.图中显示,系统从初值点逐渐趋近于在平衡点(0,0,0)邻域的极限环,绕点(0,0,-0.1)作周期运动.若取 $\mu = 1.8$,得不到极限环,(0,0,0,1.9)是控制后系统的Hopf分叉点,在其邻域极限环稳定.

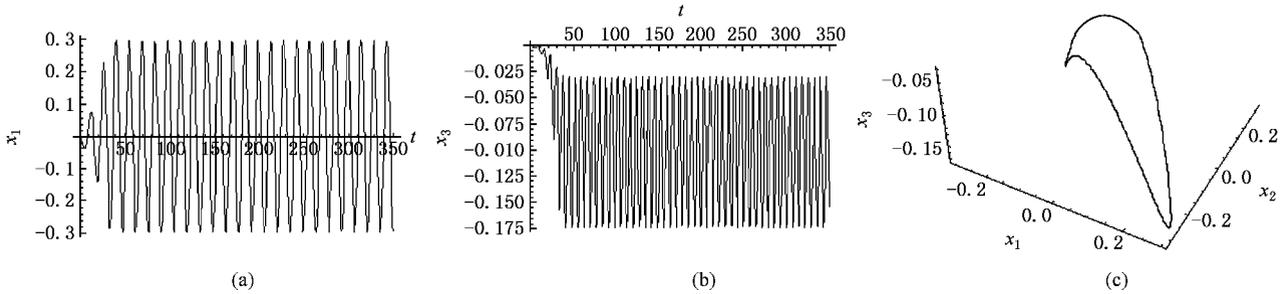


图5 受控系统(5)数值模拟图($k_1 = -1.8, k_2 = 0, k_3 = -3.0, \mu = 2.0$) (a) $x_1(t)$ 时间历程图;(b) $x_3(t)$ 时间历程图;(c)在Hopf分叉点(0,0,0,1.9)邻域产生的极限环

图6为控制参数 $k_1 = k_2 = -0.5, k_3 = -0.8$ 对应的受控系统(5)的数值模拟图(取 $\mu = 0.52$),初值 $x_1 = 0.14, x_2 = 0, x_3 = -0.03$.图中显示,系统从初值点逐渐趋近于在平衡点(0,0,0)邻域的极限环,绕

点(0,0,-0.02)在平面 $x_3 = -0.02$ 上作周期运动,若取 $\mu = 0.49$,得不到极限环,(0,0,0,0.5)是控制后系统的Hopf分叉点,在其邻域极限环稳定.

图7为控制参数 $k_1 = 1.0, k_2 = 0$ 对应的受控系

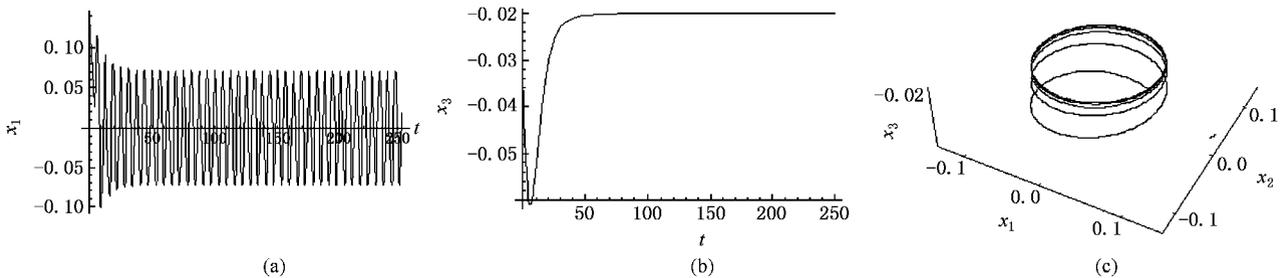


图6 受控系统(5)数值模拟图($k_1 = k_2 = -0.5, k_3 = -0.8, \mu = 0.52$) (a) $x_1(t)$ 时间历程图;(b) $x_3(t)$ 时间历程图;(c)在Hopf分叉点(0,0,0,0.5)邻域产生的极限环

统(12)的数值模拟图(取 $\mu = 0.1$),初值 $x_1 = 0.01, x_2 = 0, x_3 = 0.02$.图8为控制参数 $k_1 = k_2 = -2.5$ 对应的受控系统(12)的数值模拟图(取 $\mu = 3.1$),初值

$x_1 = 0.01, x_2 = 0, x_3 = 0.01$.图中所显示Hopf分叉点及极限环状态与上述分析类同.

此外,由图5、图7可见,只对原系统(1)的第

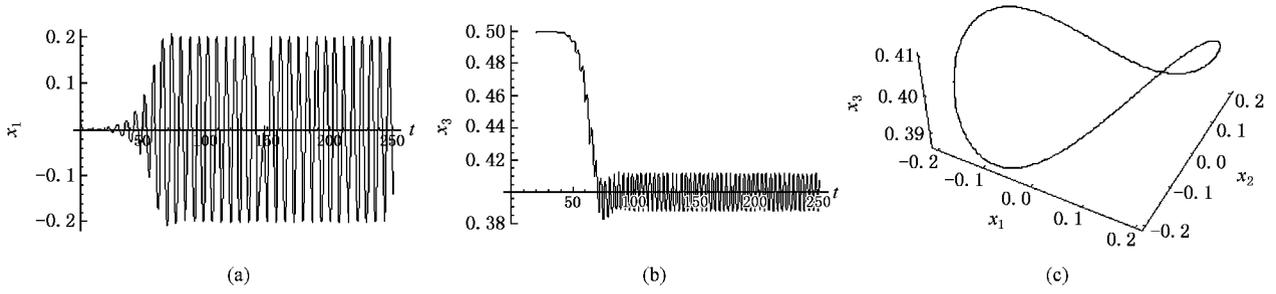


图 7 受控系统(12)数值模拟图 ($k_1 = 1.0, k_2 = 0, \mu t = 0.1$) (a) $x_1(t)$ 时间历程图 ; (b) $x_3(t)$ 时间历程图 ; (c) 在 Hopf 分叉点 $(0, 0, 0.5, 0)$ 邻域产生的极限环

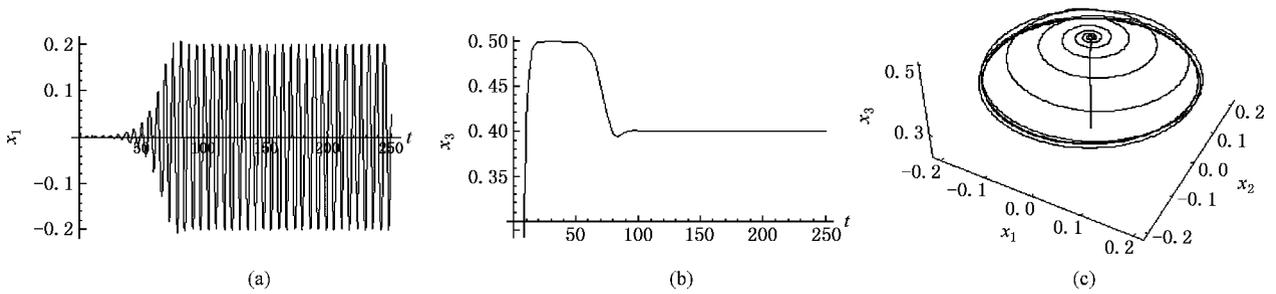


图 8 受控系统(12)数值模拟图 ($k_1 = k_2 = -2.5, \mu t = 3.1$) (a) $x_1(t)$ 时间历程图 ; (b) $x_3(t)$ 时间历程图 ; (c) 在 Hopf 分叉点 $(0, 0, 0.5, 3.0)$ 邻域产生的极限环

一、第三两个方程实施控制时,第一、二两个方程不再对称,极限环在 x_3 方向的振幅不为零.对原系统(1)的第一、第二两个方程施加相同的控制系数,第一、二两个方程仍然对称,由图 6、图 8 可见,极限环在 x_3 方向的振幅为零,极限环发生在 x_3 为某定值的平面上.同时,数据结果显示,受控系统(5)和(11)在取 $k_1 = k_2$ 的情况下(如图 6 和图 8),极限环数值模拟结果与 3.1 节和 3.2 节利用极限环表达式得到相应的(11)及(17)式的解析结果一致,验证了理论上极限环表达式的正确.

5. 结 论

对 Langford 系统的分叉现象进行了定性定量分

析,采用线性反馈控制方法对系统的 Hopf 分叉点控制进行了研究.从理论上推导出受控系统控制参数的取值条件,获得转移 Hopf 分叉点的有效控制,确定受控系统极限环的稳定性.对原系统及某类受控系统给出极限环的解析表达式.采用数值模拟方法验证了所实施控制的正确与有效性,验证了所给出极限环的解析表达式,同时给出一些理论所未及的结果.Langford 系统具有丰富的动态分叉行为,本文只采用了线性控制器控制了 Hopf 分叉点,诸如非线性控制器的利用,极限环幅值的控制等工作,尚需进一步深入系统的研究与探讨.

[1] Abed E H , Fu J H 1986 *Syst. Cont. Lett.* **7** 11
 [2] Abed E H , Fu J H 1987 *Syst. Cont. Lett.* **8** 467
 [3] Wang H O , Abed E H 1994 *IEEE Trans. Circuits Syst.* **41** 294
 [4] Wang H O , Abed E H 1995 *Automatica* **31** 1213
 [5] Chen G , Moiola J L , Wang H O 2000 *Int. J. Bifur. Chaos.* **10** 511
 [6] Ma Z E , Zhou W C 2003 *Quality and stability methods of ordinary differential equations* (Beijing : Science Press) p205 (in Chinese) [马知恩、周文仓 2003 常微分方程定性及稳定性方法 (北京 : 科学出版社) p205]
 [7] Wu J K , Zhou K 1994 *Science in China series A* **24** 269 (in Chinese) [武际可、周 1994 中国科学 A **24** 269]

- [8] Li B X 1984 *Periodic orbits of high-dimensional dynamic system : theory and application* (Shanghai : Science and technology of Shanghai) p121 (in Chinese) [李炳熙 1984 高维动力系统的周期轨道 : 理论和应用 (上海 : 上海科学技术) p151]
- [9] Tang J S , Chen Z L 2006 *Int. J. Bifur. Chaos* . **16** 1
- [10] Qian C Z , Tang J S 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 617 (in Chinese) [钱长照、唐驾时 2006 物理学报 **55** 617]
- [11] Chen D S , Wang H O , Chen G R 2001 *IEEE Tran. Circuits Syst. I* **48** 661
- [12] Fu W B , Tang J S 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2889 (in Chinese) [符文彬、唐驾时 2004 物理学报 **53** 2889]
- [13] Yassen M T 2005 *Chaos Solitions and Fractals* **26** 913
- [14] Li R H , Xu W , Li S 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 598 (in Chinese) [李瑞红、徐伟、李爽 2006 物理学报 **55** 598]
- [15] Ali H N , Dean T M 1979 *Nonlinear Oscillations* (New York : Wiley-Interscience) p264
- [16] Ma S J , Xu W , Li W , Fang Tong 2006 *Chin. Phys.* **15** 1231

Linear feedback control of Hopf bifurcation in Langford system *

Liu Su-Hua¹ 刘素华¹ † Tang Jia-Shi¹ 唐嘉时¹

¹ College of Mechanics and Aerospace , Hunan University , Changsha 410082 , China)

² Anyang Institute of Technology , Anyang 455000 , China)

(Received 18 July 2006 ; revised manuscript received 5 October 2006)

Abstract

The Hopf bifurcation characteristic in Langford system is analyzed and the control of Hopf bifurcation in this system is investigated by means of the method of linear state feedback control. The condition in which Hopf bifurcation occurs in the controlled system is arrived at in analysis and the analytical expressions of the limit cycles are obtained. Hopf bifurcation points are transformed and the stability of the limit cycles is controlled. The analytical results on controlling Hopf bifurcation points via the controllers agree well with the numerical results.

Keywords : Langford system , feedback control , Hopf bifurcation , limit cycle

PACC : 0547

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10672053).

† E-mail : liusuhua968@ yahoo. com. cn