

多模干涉耦合器中重叠像相干相消现象分析^{*}

孙一翎^{1)†} 潘剑侠²⁾

1) 深圳大学工程技术学院, 深圳 518060)

2) 杭州电子科技大学电子信息学院, 杭州 310027)

(2006 年 10 月 1 日收到, 2006 年 10 月 16 日收到修改稿)

根据多模干涉耦合器的自映像原理和重叠成像的规律, 首次提出多模干涉耦合器中存在重叠像相干相消现象, 推导了重叠像相干相消现象出现的条件. 在此基础上, 对对称干涉和成对干涉两种特殊重叠成像做出解释, 得出对称干涉和成对干涉成像个数及成像位置的表达式. 用实例证明了重叠像相干相消现象并不只存在于成对干涉和对称干涉两种特殊情况, 并总结了重叠像相干相消随位置数变化的规律. 用导模传输分析法验证了所得表达式和成像规律的正确性.

关键词: 集成光学, 多模干涉耦合器, 相干相消, 导模传输分析法

PACC: 4282, 4210J

1. 引言

集成光学经过 30 多年的发展已取得令人瞩目的成就^[1,2]. 利用多模波导自映像效应^[3]制成的多模干涉 (multimode interference, MMI) 耦合器^[4,5]具有插入损耗小、结构紧凑、制作容差性好及对偏振不敏感等优点, 被广泛地应用于集成光学回路中. 其中采用成对干涉和对称干涉的多模干涉耦合器结构更为紧凑^[6].

Bachmann 提出重叠成像的概念^[7], 当输入场位置满足一定条件时, 多模波导终端将出现重叠像, 所得的像的个数减少并形成新的强度分布.

本文根据多模干涉耦合器的自映像原理, 在重叠成像基础上提出多模干涉耦合器中存在重叠像相干相消的现象. 从一个新的角度对成对干涉和对称干涉两种特殊重叠成像做出解释. 在此基础上, 推导了对称干涉和成对干涉成像个数和成像位置的表达式, 并用导模传输法验证了分析结果. 最后, 本文用实例证明了相干相消并不只存在于成对干涉和对称干涉两种特殊情况.

2. 一般成像的成像位置和相位关系

根据导模传输分析法^[8], 长度为 L 的多模波导终端的横向场分布可表示为

$$\psi(x, L) = \sum_{v=0}^{m-1} C_v \psi_v(x) \exp\left(j \frac{v(v+2)\pi}{3L_\pi} L\right), \quad (1)$$

其中 $\psi_v(x)$ 为 v 次模的光场分布, C_v 为场激励系数, $L_\pi = \frac{4n_c W^2}{3\lambda_0}$, λ_0 为真空中的波长, n_c 是波导的折射率, W 为多模波导的宽度.

当 L 满足 $3L_\pi/N$ 整数倍, 即 $L = s(3L_\pi/N)$ 时, 一般情况下多模波导终端得到输入场的 N 重像. 这里 s 和 N 为自然数, 且 s, N 互质. 将 $3L_\pi/N$ 看成一个长度单元, s 为该长度单元重复的个数, 称为位置数.

为便于数学处理, 文献[9]将实际区域 $[0, W]$ 扩展到 $[-sW, sW]$, 将输入场 $\psi(x, 0)$ 扩展成反对称形式 $f_{in}(x, 0)$, 多模波导输出场分布可写成如下形式:

$$f_{out}(x, L) = \frac{1}{C} \sum_{q=0}^{N-1} f_{in}(x - x_q) \exp(j\theta_q), \quad (2)$$

式中 C 为复归一化系数, $q = 0, 1, 2, \dots, N-1$, x_q 和 θ_q 是第 q 个像的相对成像位置和相位关系.

^{*} 深圳大学科研启动基金项目(批准号: 200506)资助的课题.

[†] E-mail: syling39@szu.edu.cn

$$x_q = (2q - N)sW/N, \tag{3}$$

$$\theta_q = q(N - q)\pi s/N. \tag{4}$$

(2)式表明在区域 $[-sW, sW]$ 内有 N 个 $f_{in}(x, 0)$ 的像,也就意味着有 $2N$ 个输入场 $\psi(x, 0)$ 的像,其中 N 个为正像, N 个为反像,如图 1 所示.

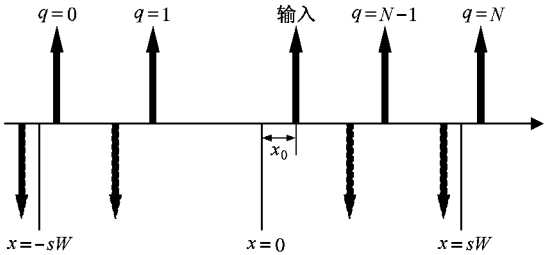


图 1 在 $[-sW, sW]$ 区间上成像位置示意图

其中正像的成像位置和相位关系为

$$x_q^+ = x_q + x_0, \theta^+ = \theta_q + \theta_c, \tag{5}$$

反像的成像位置和相位关系为

$$x_q^- = x_q - x_0, \theta^- = \theta_q + \theta_c \pm \pi, \tag{6}$$

(5)(6)两式中 $x_0(0 < x_0 < W)$ 为输入波导的初始位置,如图 1 所示, $\theta_c = j\ln(|C|/|C|)$.

3. 重叠像相干相消的条件

当 x_0 为 W/N 整数倍时,将出现重叠像^[7],多模波导终端所得的像的个数小于 N 并形成新的强度分布.由文献[10]的分析可知,正像与正像或反像与反像是不可能出现重叠,但正像与反像可以出现重叠.设强度都为 $1/N$,相位分别为 θ^+ 和 θ^- 的第 q_2 个正像和第 q_1 反像发生重叠,相干叠加后得到的重叠像的振幅为 r ,强度为 r^2 ,相位为 Φ ,这些量之间的相互关系可用方程(7)来描述,即

$$r \exp(j\Phi) = \frac{2}{\sqrt{N}} \cos\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \exp(j\bar{\varphi}), \tag{7}$$

其中 $\Delta\varphi = \theta^+ - \theta^-$, $\bar{\varphi} = (\theta^+ + \theta^-)/2$,重叠像的强度为

$$r^2 = \frac{4}{N} \cos^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right), \tag{8}$$

由上式可得,要产生重叠像相干相消情况,发生重叠的两个像的相位差 $\Delta\varphi$ 需为 π 的奇数倍.要使发生重叠的正像和反像的相位差为 π 的奇数倍,由(5)(6)两式可得,只要

$$\theta_{q_2} - \theta_{q_1} = 2k\pi, \tag{9}$$

上式中 k 为整数,将 θ_{q_2} 和 θ_{q_1} 的表达式代入(9)式

得

$$(q_1 - q_2)(q_1 + q_2 - N) = \frac{2kN}{s}, \tag{10}$$

由文献[10],输入波导初始位置和成像位置可以写成如下形式:

$$x_0 = iW/N, \tag{11}$$

$$x_{out} = W - jW/N, \text{ 当 } i + j + s \text{ 为奇数时} \tag{12}$$

当 $s = 1$ 时,可以证明

$$i = q_1 - q_2, \tag{13}$$

$$N - j = q_1 + q_2 - N, \tag{14}$$

所以 $s = 1$ 时,重叠像相干相消条件(10)可化简为

$$(N - j) = 2Nk. \tag{15}$$

4. 特殊重叠成像个数和成像位置公式推导

对称干涉和成对干涉两种特殊重叠成像,由于相干相消,使得多模波导终端所得的像的个数比一般重叠成像更少.

4.1. 对称干涉

N 为 4 的整数倍,且 $i = N/2$ (即 $x_0 = W/2$),输入波导关于多模波导对称设置.令 $N = 4h$,其中 h 为整数,则 $i = 2h$, i 为偶数,由一般重叠成像的公式^[10]得:成像个数为 $(N - 2)/2$.考虑 $s = 1$ 时的成像位置,由公式(15)得,满足 $4h - j = 4k$ 的重叠像相干相消. $j = 4, 8, 12, \dots, N - 4$,共有 $(N - 4)/4$,对称干涉成像个数为 $(N - 2)/2 - (N - 4)/4 = N/4$.对称干涉的成像位置为

$$x_{out} = W - jW/N, \quad j = 2, 6, 10, \dots, N - 2. \tag{16}$$

以 $N = 24$,输入场位置为 $W/2$ 为例,根据对称干涉成像个数和成像位置公式,输出端得到输入场的 6 重像,成像位置分别是: $11W/12, 9W/12, 7W/12, 5W/12, 3W/12, W/12$.根据导模传输分析法,直接利用(1)式模拟多模波导终端输出场分布,如图 2 所示,图中的成像位置与由表达式(16)求解得到的结果完全一致.

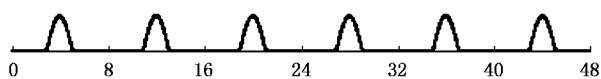


图 2 $N = 24, W = 48 \mu\text{m}, x_0 = W/2$ 时成像位置示意图

4.2. 成对干涉

N 为 3 的整数倍, 且 $i = N/3$ (即 $x_0 = W/3$) 或 $i = 2N/3$ (即 $x_0 = 2W/3$) 输入波导关于 $1/3$ 或 $2/3$ 多模波导宽度对称设置. 按 N 的奇偶性及输入位置, 分 4 种情况进行讨论.

(1) N 为奇数, 输入位置 $x_0 = W/3$

令 $N = 3h$, 则 h 为奇数. 由 $x_0 = iW/N = W/3$ 得: $i = h$, 因此 i 为奇数. 由一般重叠成像的公式得: 成像个数为 $(N-1)/2$. 考虑 $s=1$ 时的成像位置, 由(15)式得: 满足 $3h-j=6k$ 的重叠像相干相消. $j=3, 9, 15, \dots, N-6$, 共有 $(N-3)/6$ 个, 这样成对干涉成像个数为 $(N-1)/2 - (N-3)/6 = N/3$. 位置数为奇数时, 成像位置为

$$x_{\text{out}} = W - jW/N,$$

$$j = 1, 5, 7, 11, 13, \dots, N-8, N-4, N-2.$$

(17)

(2) N 为奇数, 输入位置 $x_0 = 2W/3$

令 $N = 3h$, 则 h 为奇数. 由 $x_0 = iW/N = 2W/3$ 得: $i = 2h$, 因此 i 为偶数. 由一般重叠成像的公式得: 成像个数为 $(N-1)/2$. 考虑 $s=1$ 时的成像位置, 由(15)式得: 满足 $3h-j=3k$ 的重叠像相干相消. $j=6, 12, 18, \dots, N-3$, 有 $(N-3)/6$ 个, 这样成对干涉成像个数为 $(N-1)/2 - (N-3)/6 = N/3$. 位置数为奇数时, 成像位置为

$$x_{\text{out}} = W - jW/N,$$

$$j = 2, 4, 8, 10, \dots, N-7, N-5, N-1. \quad (18)$$

以 $N=15$, 输入位置为 $W/3$ 和 $2W/3$, 根据上述的成对干涉成像个数和成像位置公式, 输出端得到输入场的 5 重像, 成像位置分别是: $2W/15, 4W/15, 8W/15, 10W/15, 14W/15$ 和 $W/15, 5W/15, 7W/15, 11W/15, 13W/15$. 根据导模传输分析法, 直接利用(1)式模拟多模波导终端输出场分布, 如图 3 所示. 不难验证图中成像位置与由表达式求解得到的结果完全一致.

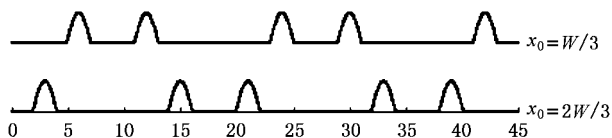


图 3 $N=15, W=45 \mu\text{m}$, $x_0 = W/3$ 和 $x_0 = 2W/3$ 时成像位置示意图

(3) N 为偶数, 输入位置 $x_0 = W/3$

令 $N = 3h$, 则 h 为偶数. 由 $x_0 = iW/N = W/3$ 得: $i = h$, 因此 i 为偶数. 由一般重叠成像的公式得: 成像个数为 $(N-2)/2$. 考虑 $s=1$ 时的成像位置, 由(15)式得: 满足 $3h-j=6k$ 的重叠像相干相消. $j=6, 12, 18, \dots, N-6$, 共有 $(N-6)/6$ 个, 这样成对干涉成像个数为 $(N-2)/2 - (N-6)/6 = N/3$, 成像位置为

$$x_{\text{out}} = W - jW/N,$$

$$j = 2, 4, 8, 10, \dots, N-8, N-4, N-2. \quad (19)$$

(4) N 为偶数, 输入位置 $x_0 = 2W/3$

令 $N = 3h$, 则 h 为偶数. 由 $x_0 = iW/N = 2W/3$ 得: $i = 2h$, 因此 i 为偶数. 由一般重叠成像的公式得: 成像个数为 $(N-2)/2$. 考虑 $s=1$ 时的成像位置, 由(15)式得: 满足 $3h-j=3k$ 的重叠像相干相消. $j=6, 12, 18, \dots, N-6$, 共有 $(N-6)/6$ 个, 这样成对干涉成像个数为 $(N-2)/2 - (N-6)/6 = N/3$, 成像位置为

$$x_{\text{out}} = W - jW/N,$$

$$j = 2, 4, 8, 10, \dots, N-8, N-4, N-2. \quad (20)$$

以 $N=18$, 输入位置为 $W/3$ 和 $2W/3$, 根据成对干涉成像个数和成像位置公式, 输出端得到输入场的 6 重像, 成像位置分别是: $2W/18, 4W/18, 8W/18, 10W/18, 14W/18$ 及 $16W/18$. 根据导模传输分析法, 直接利用(1)式模拟多模波导终端输出场分布, 如图 4 所示.

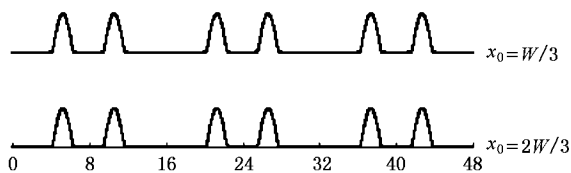


图 4 $N=18, W=48 \mu\text{m}$, $x_0 = W/3$ 和 $x_0 = 2W/3$ 时成像位置示意图

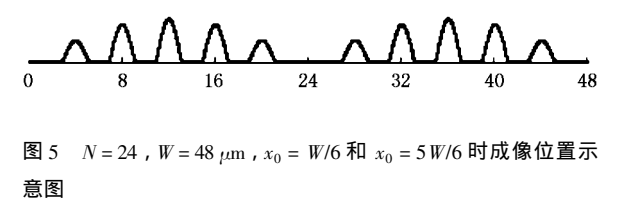
综合以上的四种情况, 成对干涉成像个数为 $N/3$. 当 N 为奇数时, $x_0 = W/3$ 对应的成像位置与 $x_0 = 2W/3$ 所对应的成像位置的和为 W ; 当 N 为偶数时, $x_0 = W/3$ 和 $x_0 = 2W/3$ 所对应的成像位置相同.

5. 其他相干相消的例子

重叠像相干相消不是对称干涉和成对干涉特有的例子, 以 $N=24$ 为例, 将输入波导的初始位置 x_0

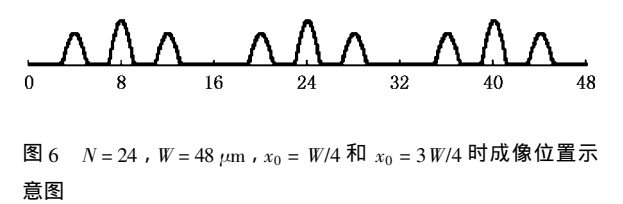
和成像位置 x_{out} 分别写成 $x_0 = iW/N$ ($i = 1, 2, \dots, N-1$) 和 $x_{out} = W - jW/N$ 的形式. 对称干涉 : $x_0 = W/2$ (对应 $i = 12$) ;成对干涉 : $x_0 = W/3$ ($i = 8$) 或 $x_0 = 2W/3$ ($i = 16$).

除了上面两种情况还有以下相干相消的例子 :
(1) 当 $i = 4$ 或 $i = 20$ 时, 根据相干相消条件 (15), 有一个对应 $j = 12$ 的重叠像相干相消, 即发生相干相消的重叠像的位置在 $x_{out} = W/2$.



根据导模传输分析法, 直接利用 (1) 式模拟多模波导终端输出场分布, 如图 5 所示. 按一般重叠成像公式, 成像个数 11 个. 但输入位置为 $x_0 = W/6$ (对应 $i = 4$) 或 $x_0 = 5W/6$ (对应 $i = 20$) 时, 有一个位置为 24 (对应 $j = 12$) 的重叠像相干相消, 输出像的个数因此减少到 10 个.

(2) 当 $i = 6$ 或 $i = 18$ 时, 根据相干相消条件 (15), 有两个分别对应的 $j = 8$ 和 $j = 16$ 重叠像相干相消, 即发生相干相消的重叠像的位置在 $x_{out} = W/3$ 和 $x_{out} = 2W/3$ 处.



直接利用 (1) 式模拟多模波导终端输出场分布, 如图 6 所示. 输入位置为 $x_0 = W/4$ (对应 $i = 6$) 或 $x_0 = 3W/4$ (对应 $i = 18$) 时, 有两个位置为 $3W/4$ (对应 $j = 8$) 和 $1W/4$ (对应 $j = 16$) 的重叠像相干相消, 输出像的个数减少到 9 个.

6. 重叠像相干相消的一些规律

上述例子说明相干相消并不只存在于成对干涉和对称干涉两种特殊情况. 进一步研究发现相干相消是一种较为普遍的现象, 只有以下两种情况不出现重叠像相干相消 :

(1) N 为质数, 如 $2, 3, 5, 7, \dots$;

(2) N 为某个质数的 2 倍, 如 $4, 6, 10, 14, \dots$.
这两种情况下没有合适的 i 和 j , 使得相干相消条件成立, 也就是说, 对以上的 N , 无论输入位置如何选择都不会出现相干相消现象. 对其余的 N , 总能找到合适的 i 和 j , 使得相干相消条件成立. 而且有的 N 出现相干相消现象的输入位置不止一个; 有的 N 对同一个输入位置, 输出端有多个重叠像相干相消.

以上研究的是位置数为 1 时的重叠像相干相消现象. 当位置数不等于 1 时, 通过分析, 发现重叠像相干相消有如下的规律 :

(i) N 为偶数时, s 只能是奇数. 当输入位置相同时, 对所有的奇位置数, 发生重叠像相干相消的位置相同, 如图 7 所示. 图 7 是根据导模传输分析法, 直接利用 (1) 式获得的多模波导终端输出场分布.

(ii) N 为奇数时, s 可以是奇数, 也可以为偶数. 当输入位置相同时, 对所有的奇位置数, 发生重叠像相干相消的位置相同; 对所有的偶位置数, 发生重叠像相干相消的位置也相同; 并且偶位置数发生重叠像相干相消的位置与奇位置数发生重叠像相干相消的位置的和为 W , 如图 8 所示. 图 8 中, 偶位置数 $s = 2$ 和 $s = 4$ 位置为 28 的重叠像相干相消; 奇位置数 $s = 1$ 和 $s = 5$ 位置为 14 的重叠像相干相消.

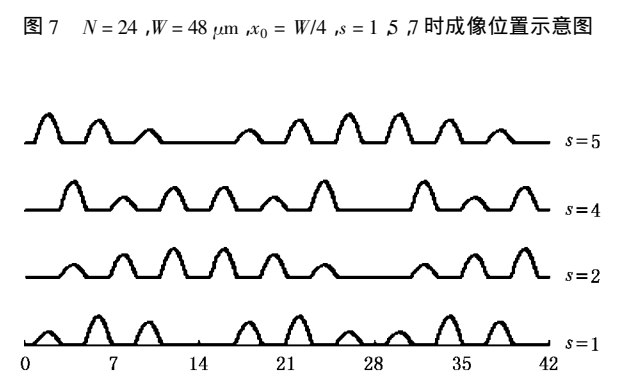
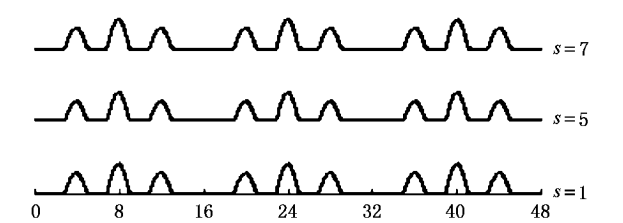


图 8 $N = 21, W = 42 \mu\text{m}, x_0 = 2W/7, s = 1, 2, 4, 5$ 时成像位置示意图

7. 结 论

长度为 $s(3L_\pi/N)$ 的多模波导, 若输入位置等于 W/N 整数倍时, 多模波导的终端将出现重叠像. 如果发生重叠的两个像的相位差为 π 的奇数倍, 将产生重叠像相干相消现象. 本文推导了相干相消的条件, 从相干相消的角度出发, 推导了两种特殊重叠成像的成像个数和成像位置公式. 对称干涉成像个数为 $N/4$, 成对干涉成像个数为 $N/3$.

本文用实例证明了相干相消并不只存在于成对干涉和对称干涉两种特殊情况. 除了 N 为质数和质数的 2 倍两种情况, 其余的 N 都存在出现相干相消现象的输入位置. 而且有的 N , 出现相干相消现象的输入位置不止一个; 有的 N , 对同一个输入位置, 输出端有多个重叠像相干相消. 本文总结出重叠像相干相消随位置数变化的规律, 并用导模传播分析法证实以上的分析结果. 本文的分析结果为一维和二维限制的多模干涉耦合器的设计提供了理论基础.

- [1] Yu H J, Xia J S, Yu J Z 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1023 (in Chinese) [余和军、夏金松、余金中 2006 物理学报 **55** 1023]
- [2] Zhao Q, Pan J Q, Zhang J, Zhou G T, Wu J, Zhou F, Wang B J, Wang L F, Wang W 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 261 (in Chinese) [赵 谦、潘教青、张 靖、周光涛、伍 剑、周 帆、王宝军、王鲁峰、王 圩 2006 物理学报 **55** 261]
- [3] Ulrich R, Ankele G 1975 *Appl. Phys. Lett.* **27** 337
- [4] Xia J S, Yu J Z, Fan Z C, Wang Z T, Chen S W 2004 *Chin. Phys. Lett.* **21** 104

- [5] Zhou H F, Jiang X Q 2007 *Chin. Phys.* **16**
- [6] Sun Y L, Jiang X Q, Yang J Y, Wang M H 2005 *Chin. Phys. Lett.* **22** 2595
- [7] Bachmann M, Besse P A, Melchior H 1995 *Appl. Opt.* **34** 6898
- [8] Lucas B S, Erik C M P 1995 *J. Lightwave Technol.* **13** 615
- [9] Bachmann M, Besse P A, Melchior H 1994 *Appl. Opt.* **33** 3905
- [10] Sun Y L, Jiang X Q, Wang M H 2004 *J. of Optoelectronics · Laser* **15** 134 (in Chinese) [孙一翎、江晓清、王明华 2004 光电子·激光 **15** 134]

Analysis of the fully destructive interference of overlapping-images in MMI couplers^{*}

Sun Yi-Ling^{1)†} Pan Jian-Xia²⁾

1) *College of Engineering and Technology, Shenzhen University, Shenzhen 518060, China*

2) *Electronic Information Institute, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310027, China*

(Received 1 October 2006 ; revised manuscript received 16 October 2006)

Abstract

Based on self-imaging effect and overlapping-imaging properties of multimode interference couplers, the phenomenon of fully destructive interference of overlapping-images in MMI couplers is revealed, for the first time. The condition for overlapping-image fully destructive interference is derived. From the point of view of overlapping-image fully destructive interference, we explain the paired interference and the symmetric interference. The expressions of the positions and number of output images for two especial overlapping-images are also given. We prove that this kind of phenomena exists not only in the paired interference and the symmetric interference by way of an example. The influence of the positional number on the fully destructive interference images is also analyzed. And the guided-mode propagation analysis method is used to confirm the analytical results.

Keywords : integrated optics, multimode interference couplers, fully destructive interference, guided-mode propagation analysis method

PACC : 4282, 4210J

^{*} Project supported by the Scientific Research Startup Foundation of Shenzhen University, China (Grant No. 200506).

[†] E-mail : syling39@szu.edu.cn