

离子通道中环形成束流分布与场解的自治理论^{*}

王振宇 唐昌建[†]

(四川大学物理科学与技术学院, 成都 610064)
(2006 年 5 月 24 日收到, 2007 年 1 月 10 日收到修改稿)

考虑环形束流的空间电荷效应与相对论状态下的自磁效应对离子通道——环形束流系统的影响, 研究了通道中环形成束流的轨道与场解的自治平衡态. 利用动力学理论得到了电子平衡态分布函数以及环形束流的径向位置和通道内电磁场的自治解. 研究发现, 相对论束流的自场对系统平衡态有很大影响, 并证实了系统自治平衡态的存在. 数值计算给出了束流位置与通道半径间随能量的分布关系以及通道内场随半径分布的规律, 为相关器件的设计提供了重要的理论数据.

关键词: 离子通道, 环形束流, 动力学理论, 自治平衡态

PACC: 5110, 5260, 5240M

1. 引 言

以离子聚焦的方式(IFR)摇摆高能电子束而产生相干电磁辐射是近年来受到高度关注的研究课题^[1-5]. 当电子束通过等离子体空间时, 如果满足 $n_i \gg n_b / \gamma_0$ (n_b 是电子束密度, n_i 为等离子体密度, γ_0 是电子束的相对论因子), 则存在两个基本物理过程. 一是相对论电子束将推开等离子体电子, 在其传播的轨道柱上留下一相对静态的离子群, 被称为离子通道. 二是在满足一定的条件下, 通道中离子空间电荷场将稳定的对电子束聚焦而产生电磁相干辐射^[6]. 利用离子聚焦效应, 已经得到离子通道激光(ICL)和离子波纹激光(Ion-Ripple laser)等一类新型的电磁辐射源^[6-11]. 从注-波相互作用的效率考虑, 我国学者 Tang 提出了离子通道电子回旋脉塞(ICECM)的概念并得到了国际上广泛的研究^[12-24]. ICECM 的非线性理论研究表明, 束流位置、通道半径与 ICECM 特性密切相关^[15]. 考虑到电子传输与场的相互作用关系, 我们推测束流位置、通道半径和通道内的电磁场分布应该受束流空间电荷效应与相对论束流的自磁效应影响而被自治决定, 可能与其非自治解^[6]相比出现较大差异. 因此, 本文借助流体动力学理论瞄准这一问题展开了研究, 证实了其推测的

正确性, 并得到了的重要结论.

2. 电子平衡态分布函数

ICECM 的研究模型如图 1 所示. 假定: 1) 正离子保持均匀分布, 提供正电荷背景. 2) 系统各参量纵向梯度很小, 可暂略, 且系统轴对称. 3) 电子角向运动引起的径向自磁力与离子聚焦力相比甚小, 其所激发的纵向磁场自治效应可略^[16]. 该假设可由单粒子理论得出^[13]. 电子在离子通道内的 Lagrange 函数为

$$L = -m_e c^2 \sqrt{1 - \beta^2} + e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} - e\phi(r), \quad (1)$$

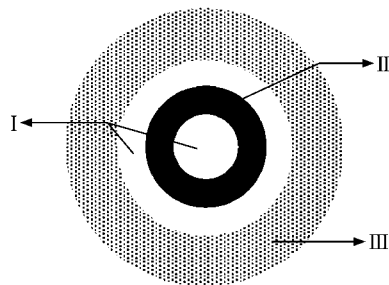


图 1 离子通道-环形束流系统 I 为离子通道; II 为相对论环形束流; III 为等离子体

其中, m_e , e 分别为电子静质量、电子电量, c 为真空中光速, $\beta = v/c$ 为电子归一化速度, \mathbf{A} 为磁矢势. 通

^{*} 国家自然科学基金委—中国工程物理研究院联合基金(批准号:10576019)资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: 542160287@sina.com.cn

道中的势函数为 $\phi(r) = \phi^s(r) + \phi^i(r)$, $\phi^s(r)$ 为环形束流电场的势函数, $\phi^i(r)$ 为正离子电场的势函数. 电子在通道内的 Hamilton 函数为

$$H = \sqrt{m_e^2 c^4 + c^2(p_r^2 + p_\theta^2 + p_z^2)} - e\phi(r), \quad (2)$$

其中 p_r, p_θ, p_z 分别为电子的径向、角向和纵向动量. 电子的 Hamilton 量不显含时间, 为运动常数. 由假设 $\partial L/\partial\theta = 0$ 且 $\partial L/\partial z = 0$, 据 Lagrange 方程, 电子的正则角动量 P_θ 正则纵向动量 P_z 为运动常数,

$$P_\theta = r p_\theta, \quad (3)$$

$$P_z = p_z + eA_z^s(r). \quad (4)$$

电子运动常数的任意函数都可构造平衡态分布函数^[25], 本文采用以下分布函数:

$$f_0 = \frac{n_b R_0}{2\pi\gamma_0} \delta(H - H_0) \delta(P_\theta - P_{\theta 0}) \delta(P_z - P_{z 0}), \quad (5)$$

其中 n_b 为束流密度, R_0 为束流内径, γ_0 为束流电子初始相对论因子, P_θ 为初始正则角动量, P_z 为纵向初始正则动量. H_0 为电子入射前通道内的 Hamilton 函数:

$$H_0 = m_e \gamma_0 c^2 - e\phi^i(r). \quad (6)$$

将(6)式代入(5)式得到

$$f_0 = \frac{n_b R_0}{2\pi\gamma_0} \delta(\sqrt{m_e^2 c^4 + c^2(p_r^2 + p_\theta^2 + p_z^2)} - e\phi^s(r) - m_e \gamma_0 c^2) \delta(P_\theta - P_{\theta 0})$$

$$\times \delta(P_z - P_{z 0}). \quad (7)$$

分布函数在动量空间积分, 得到电子密度随半径分布为

$$n_e(r) = \int_{-\infty}^{\infty} f_0 d^3 p. \quad (8)$$

将(7)式代入(8)式可以有

$$n_e(r) = \begin{cases} 0 & 0 < r < R_0, \\ \frac{n_b R_0}{2\pi\gamma_0\beta_0 r} \left(1 + \frac{e\phi^s(r)}{m_e \gamma_0 c^2}\right) & R_0 < r < R_1, \\ 0 & R_1 < r < R_c, \end{cases} \quad (9)$$

其中 $\beta_0 = v/c$ 为电子归一化初速度, R_1, R_c 分别为束流外径和通道半径.

3. 电子轨道与场的自洽解

根据 ICECM 模型, 离子通道内存在的场为

$$\mathbf{E} = E_r^i(r)\mathbf{e}_r + E_z^s(r)\mathbf{e}_z, \quad (10)$$

$$\mathbf{B} = B_\theta^s(r)\mathbf{e}_\theta, \quad (11)$$

其中 $E_r^i(r)$ 为正离子电场, $E_z^s(r)$ 为环形束流的自洽电场, $B_\theta^s(r)$ 为束流电子纵向运动激发的角向磁场. 设正离子密度为 n_i , 则电场的 Gauss 分布为

$$E_r^i(r) = -\frac{Zen_i r}{2\epsilon_0}, \quad (12)$$

其中 Z 为正离子电荷数. 束流电场的 Poisson 方程为

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi^s(r)}{\partial r} \right) = \begin{cases} 0 & 0 < r < R_0, \\ \frac{m_e \omega_{pb}^2}{e} \frac{R_0}{2\pi\gamma_0\beta_0 r} \left(1 + \frac{e\phi^s(r)}{m_e \gamma_0 c^2}\right) & R_0 < r < R_1, \\ 0 & R_1 < r < R_c, \end{cases} \quad (13)$$

其中 $\omega_{pb}^2 = \frac{n_b e^2}{\epsilon_0 m_e}$ 为电子束振荡频率. 定义 $\delta = \frac{\gamma_0 \beta_0 c^2}{4\omega_{pb}^2 R_0}$, 将所有长度量对 δ 归一, 即 $\bar{r} = r/\delta$, $\bar{R}_0 = R_0/\delta$, $\bar{R}_1 = R_1/\delta$, 求解(13)式, 得到束流电场归一化电势

$$\frac{e\phi^s(r)}{m_e \gamma_0 c^2} = \begin{cases} A & 0 < r < R_0, \\ -1 + B \left[J_0(\bar{r}^{1/2}) - \frac{J_1(\bar{R}_0^{1/2})}{N_1(\bar{R}_0^{1/2})} N_0(\bar{r}^{1/2}) \right] & R_0 < r < R_1, \\ \text{Ch}(\bar{r}/R_c) & R_1 < r < R_c, \end{cases} \quad (14)$$

其中

$$A = B \left[J_0(\bar{R}_0^{1/2}) - \frac{J_1(\bar{R}_0^{1/2})}{N_1(\bar{R}_0^{1/2})} N_0(\bar{R}_0^{1/2}) \right] - 1,$$

$$B = \frac{1}{\left[J_0(\bar{R}_1^{1/2}) - DN_0(\bar{R}_1^{1/2}) \right] - \frac{1}{2} \ln(R_1/R_c) - \bar{R}_1^{1/2} J_1(\bar{R}_1^{1/2}) + D\bar{R}_1^{1/2} N_0(\bar{R}_1^{1/2})},$$

$$C = \left(\ln(R_1/R_c) + 2 \frac{[J_0(\bar{R}_1^{1/2}) - DN_0(\bar{R}_1^{1/2})]}{[\bar{R}_1^{1/2} J_1(\bar{R}_1^{1/2}) - D\bar{R}_1^{1/2} N_1(\bar{R}_1^{1/2})]} \right)^{-1},$$

$$D = \frac{J_1(\bar{R}_0^{1/2})}{N_1(\bar{R}_0^{1/2})},$$

其中 J_0, J_1 分别为零阶、一阶第一类 Bessel 函数, N_0, N_1 为零阶、一阶第二类 Bessel 函数。(14) 式经过适当处理, 得到归一化束流电场:

$$\delta \frac{eE_r^s(r)}{m_e \gamma_0 c^2} = \begin{cases} 0 & 0 < r < R_0, \\ \frac{B}{2} [\bar{r}^{-1/2} J_1(\bar{r}^{-1/2}) - \bar{r}^{-1/2} DN_1(\bar{r}^{-1/2})] & R_0 < r < R_1, \\ C/\bar{r} & R_1 < r < R_c. \end{cases} \quad (15)$$

由 Maxwell 方程和运输电流的定义, 束流磁矢势应满足

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} A_z^s(r) = -\mu_0 en_e(r) v_z, \quad (16)$$

其中 μ_0 为真空中磁导率, v_z 为电子纵向速度, 由模型可知 $v_z \approx v = \beta_0 c$. 将 (9) 式带入 (16) 式, 并经过数学推导, 得到归一化束流磁场

$$\delta \frac{eB_\theta^s(r)}{m_e \gamma_0 c} = \begin{cases} 0 & 0 < r < R_0, \\ \frac{B}{2} \beta_0 [\bar{r}^{-1/2} J_1(\bar{r}^{-1/2}) - \bar{r}^{-1/2} DN_1(\bar{r}^{-1/2})] & R_0 < r < R_1, \\ \beta_0 C/\bar{r} & R_1 < r < R_c. \end{cases} \quad (17)$$

将 (12) 式描述的正离子电场做相同的归一化处理, 有

$$\delta \frac{eE_r^i(r)}{m_e \gamma_0 c^2} = -\frac{1}{2} \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{pb}^2} \frac{r\beta_0}{4R_0}, \quad (18)$$

其中 $\omega_{pi}^2 = \frac{n_i e^2}{m_e \epsilon_0}$ 为离子振荡频率。(15) 式与 (18) 式叠加决定通道内电场。在边界 R_1, R_c 处, 束流电场与正离子电场对电子的作用力平衡, 考虑到 $\frac{\omega_{pb}^2}{\omega_{pi}^2} = \frac{n_b}{n_i}$, 由 (15) (18) 式得到能确定 R_1, R_c 与 R_0 关系的超越方程

$$\bar{r} = \sqrt{CR_0 \frac{8n_b}{Zn_i \beta_0}}. \quad (19)$$

4. 数值结果与分析

本文对上述理论结果作了必要的数值计算。考虑束流很薄的情况 ($\frac{R_1 - R_0}{R_c} \leq 0.05$), 令 $R_M = \frac{(R_0 + R_1)}{2}$ 为束流等效半径。选取参数 $\frac{n_b}{n_i} = 1.2, Z =$

1, 利用关系 $\gamma_0 = \sqrt{1 - \beta_0^2}$ 得到的 R_M, R_c 与 γ_0 关系如图 2 所示。根据 $\frac{R_1^2 - R_0^2}{R_c^2} = \frac{n_i}{n_b}$, 图中标出了通道半径非自洽解^[6]的直线, 以便与自洽解进行比较。

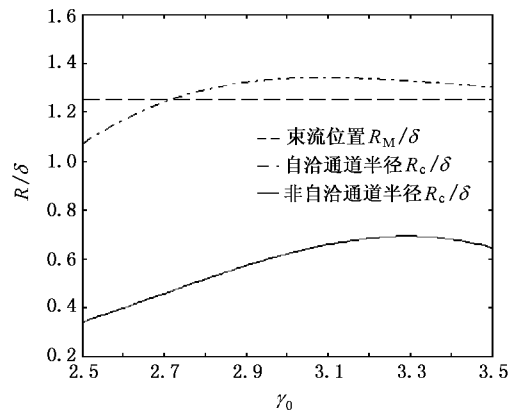


图 2 束流位置、通道半径与 γ_0 的关系

计算结果表明, 通道半径及束流位置随 γ_0 的变化呈现非线性关系, 在中等束流能量 ($2.5 < \gamma_0 < 3.5$) 情形下, 环形束流位置随 γ_0 增加外移, 当 γ_0 较大时, 由于电子束流的箍缩效应, 束流内移。这样, 存

在一特殊 γ_0 , 使束流在通道内相对位置最远. 当 γ_0 增大到一定程度后, 通道半径 R_c 相对于 γ_0 不再有明显的变化, 该系统出现自洽的饱和特征.

取 $\gamma_0 = 3, R_0 = 0.45, R_1 = 0.48, R_c = 0.99$, 对通道内场分布进行计算. 电场分布如图 3. 在 $0 < r < R_0$ 范围内, 通道内仅存在正离子电场. 在环形束流内部 ($R_0 < r < R_1$) 束流电场影响起主要作用, 电场强度沿径向呈近似直线迅速增长; 在 $R_1 < r < R_c$ 范围内, 正离子电场和束流电场均对通道内电场有影响. 与纯离子电场对比发现, 加入束流后, 束流及其附近电场畸变较大, 但考察整个通道半径上电场分布, 发现束流对通道内的电场影响较小. 由于正离子电场在通道内占主导地位, 离子通道对环形束流也会有很好的聚焦效应. 通道内正离子均匀分布, 故只存在束流磁场, 分布如图 4, 磁场的强度也较小.

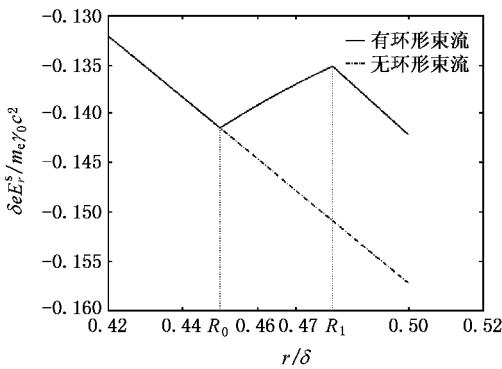


图 3 环形束流对通道内电场的影

5. 结 论

本文利用动力学理论研究了离子通道——环形束流系统的电子轨道和场分布的自治解情况. 通过

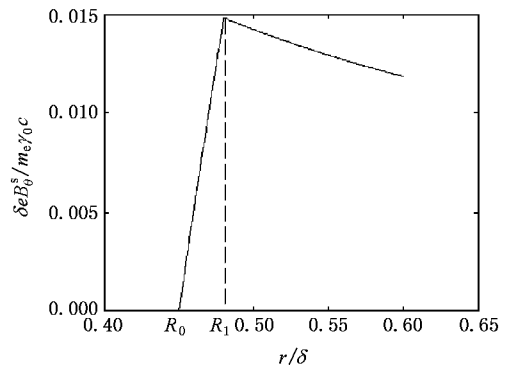


图 4 通道内磁场分布

求解 Poisson 方程, 得到通道内电磁场随半径的分布. 根据离子通道的平衡条件, 得到了能描述通道半径、束流位置与各参量间关系的超越方程. 对理论结果进行了数值计算, 得到束流位置和通道半径随束流相对论因子的变化曲线, 发现通道半径与束流相对论因子 γ_0 之间存在自洽的饱和现象. 对比发现通道半径的自洽解与非自洽解差距明显. 根据通道内电场与磁场的分布发现, 考虑束流空间电荷效应与相对论自磁效应影响后, 束流及其附近电场畸变较大, 但通道内离子电场仍占主导地位. 同时, 束流在通道内激发一弱磁场. 通过本文研究, 得出系统的自洽平衡态, 发现系统处于自洽平衡态时通道中存在很强的离子静电聚焦力. 通过上文给出的电磁场自洽分布, 可以确定电子在通道内未扰态下的动力学情况, 为进一步研究 ICECM 的注-波互作用、色散关系、不稳定性 and 实际器件设计打下了基础. 诚然, 本文中并未涉及形成离子通道的动态过程及正离子分布与束流分布的耦合等问题, 这些问题对系统平衡态分布的影响, 还有待研究.

[1] Tang C J , Gong Y B , Yang Y Z 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1145 [in Chinese] 唐昌建、宫玉彬、杨宇芷 2004 *物理学报* **53** 1145]
 [2] Whittum D H , Lampe M , Joyce G *et al* 1992 *Phys. Rev. A* **46** 6684
 [3] Whittum D H 1992 *Phys. Fluids* . B **4** 730
 [4] Jhay P , Kumar P 1998 *Phys. Rev. E* **57** 2256
 [5] Dai Z M 2005 *Nuclear Science and Techniques* **16** 65
 [6] Whittum D H , Sessler A M , Dawson J M 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 2511
 [7] Liu P K , Xiong C D 1997 *Int. J. IR/MW.* **18** 633
 [8] Chen K R , Dawson J M 1992 *Phys. Rev. A* **45** 4077

[9] Chen K R , Dawson J M 1992 *Phys. Rev. Lett.* **68** 29
 [10] Chen K R , Dawson J M 1993 *IEEE Trans. Plasma. Sci.* **21** 151
 [11] Dai Z M 1994 *J. Phys. D (Appl. Phys.)* **27** 1114
 [12] Tang C J , Liu P K , Liu S G 1996 *J. Phys. D (Appl. Phys.)* **29** 90
 [13] Liu P K 1997 *Acta Scientiarumnaturalium Universitatis Pekinensis* **33** 93 [in Chinese] 刘濮鲲 1997 *北京大学学报(自然科学版)* **33** 93]
 [14] Tang C J , Liu P K , Liu S G 1995 *J. Infrared. Millimeter. Waves* **14** 407 [in Chinese] 唐昌建、刘濮鲲、刘盛纲. 1995 *红外与毫米波学报* **14** 407]

- [15] Tang C J , Gong Y B , Hao B L 2005 *Int . J . Electronics* **92** 489
- [16] Tang C J , Gong Y B , Qian S J 2003 *High Power Laser and Particle Beams* **15** 262 (in Chinese) [唐昌建、宫玉彬、钱尚介 2003 强激光与粒子束 **15** 262]
- [17] Tang C J , Qian S J 2002 *Acta Phys . Sin .* **51** 1256 (in Chinese) [唐昌建、钱尚介 2002 物理学报 **51** 1256]
- [18] Liu P K , Xiong C D , Liu S G *et al* 1997 *Acta Phys . Sin .* **46** 892 (in Chinese) [刘濮鲲、熊彩东、刘盛刚等 1997 物理学报 **46** 892]
- [19] Liu P K 1997 *Contributions to Plasma Science* **37** 451
- [20] Whittum D H 1992 *Phys . Fluids . B* **4** 476
- [21] Whittum D H , Ebihara K , Hiramatsu S 1993 *IEEE Trans . Plasma . Sci .* **21** 736
- [22] Liu S G , Barker R J , Gao H *et al* 2000 *IEEE Trans . Plasma . Sci .* **28** 1016
- [23] Wang S Q , Clayton C E , Blue B E 2001 *Proc . the 2001 Particle Accelerator Conf .* **5** 3999
- [24] Kostyukov I , Kiselev S , Pukhov A 2003 *Phys . Plasmas .* **10** 4818
- [25] Liu S G *Relativistic Electronics* (Beijing : Science Press) p228

The self-consistent theory of the electron distribution and electro-magnetic field of a relativistic hollow electron beam in ion-channel^{*}

Wang Zhen-Yu Tang Chang-Jian[†]

(College of Physical Science and Technology , Sichuan University , Chengdu 610064 , China)

(Received 24 May 2006 ; revised manuscript received 10 January 2007)

Abstract

The effect of space-charge and relativistic self magnetic-field on the self-consistent equilibrium of the system with a relativistic hollow electron beam and ion-channel is studied. The distribution function and the relationship between location and energy of electron beam are derived by use of kinetic theory. The self-consistent field in ion-channel has also been established. It is clearly shown that the self-consistent equilibrium of the system exists. The relation of location of beam and radius of ion-channel was presented using numerical calculation. The distribution of electro-magnetic field in ion-channel is also given. The theory which is used in apparatus design is afforded by the research.

Keywords : ion-channel , hollow electron beams , kinetic theory , self-consistent equilibrium

PACC : 5110 , 5260 , 5240M

^{*} Project supported by the Joint Foundation of the National Natural Science Foundation Committee of China and China Academy of Engineering Physics (Grant No. 10576019).

[†] Corresponding author. E-mail 542160287@sina.com.cn