

线性与非线性波的 Chebyshev 广义有限谱模拟*

詹杰民^{1)†} 林 东¹⁾ 李毓湘²⁾

1) 中山大学应用力学与工程系, 广州 510275)

2) 香港理工大学土木及结构工程系, 香港九龙)

3) 中山大学近岸海洋工程广东省重点实验室, 广州 510275)

(2006 年 9 月 15 日收到, 2006 年 12 月 19 日收到修改稿)

给出求解二维线性与非线性波的 Chebyshev 广义有限谱模拟方法. 结合时间层次的高精度预报-校正方法, 模拟了二维线性浅水驻波和波在浅滩的非线性变形. 方法能够准确模拟水波的物理特征.

关键词: Chebyshev 广义有限谱, 线性波, 非线性波

PACC: 0200, 0340K

1. 引 言

谱方法具有计算精度高、稳定性好、滤短波较彻底的突出优点. 然而, 传统的谱方法运算量和存储量均较大, 较小规模的电子计算机不易实现. 由于谱方法对不同尺度问题有较好的分辨率, 谱元法在过去二十年得到了快速发展.

Gottlieb 和 Orszag^[1]的研究工作是谱方法数值分析理论的早期最系统的工作之一. Canuto 和 Quarteroni^[2]研究了几种常用的谱方法(如 Fourier, Chebyshev, Legendre 方法)中的正交多项式系在 Sobolev 空间中的逼近性质. 这些结果对谱方法的误差估计所起的作用是奠基性的. Patera^[3]和他的同事^[4]系统阐述了如何应用谱元法. Giraldo^[5]针对浅水方程提出了强和弱 Lagrange-Galerkin 谱元法. 谱元法结合了谱方法和有限元法的优点. 同时, 也在一定程度上克服了传统的谱方法运算量和存储量大的缺点. 另一种能有效提高计算效率的谱展开方法是 Wang^[6]提出的有限谱方法. 他的谱方法是按节点而不是按区域进行离散, 处理过程中使用了有限个节点和有限个基函数. 与传统的谱元法相比较, 有限谱方法的离散过程更接近有限差分法或多项式展开法. 即在所研究节点的某个领域内, 未知函数表示为 $N+1$ 项“基函数”的和, 其各阶导数值由该领域各节点的函数值确定.

以勒让德多项式、切比雪夫多项式和埃尔米特多项式为代表的正交特殊函数或多项式具有精度高的特点. 由它们作为基函数来构造广义傅里叶级数或多项式, 更能适应非周期和非线性的物理问题. 本文结合有限谱思想, 以线性浅水方程和非线性扩展型 Boussinesq 方程^[7]为例, 给出求解二维数学物理问题的 Chebyshev 广义有限谱方法的基本思路. 方法像传统有限谱方法那样, 保持了有限差分法具有的灵活性. 同时, 由于使用了正交特殊函数或多项式, 方法具有较高的精度.

浅水流动是地球表面上最常见的水流现象之一. 研究浅水波动问题具有很大的现实意义. 河口潮汐、风暴潮、污染物输运扩散、盐水入侵、海上油膜扩散、近海工程、河道流量及洪水预报、河流发电、灌溉系统、平原河网、入库洪水、溃坝决堤、河流输沙、河床演变、都市排水, 总之与近岸和河流有关的水环境、水工问题, 都需要对浅水流动进行研究. 浅水方程的数值模拟主要有五种方法: 有限差分法、特征线法、有限元法、有限体积法和谱方法. 由于近岸海域地形复杂多变, 还有结构物的影响, 将发生浅水变形、折射、绕射和反射等现象, 尤其计算非线性的问题时, 发展高精度的方法尤为必要^[8].

2. 广义有限谱格式

对于一维问题, 假设未知量 $u(x)$ 可以用 $2N+1$

* 国家自然科学基金(批准号: 40476012)资助的课题.

† E-mail: stszjm@mail.sysu.edu.cn

个正交基函数 $\phi_n(x)$ 表示

$$u(\xi_j^i) = \sum_{n=0}^{2N} C_n^i \phi_n(\xi_j^i), \quad (1)$$

其中 ξ_j^i 为局部坐标 定义如下:

$$\xi_j^i = l \frac{x_{i+j} - x_i}{N\Delta x},$$

$$\begin{bmatrix} \phi_0(\xi_{-N}^i) & \phi_1(\xi_{-N}^i) & \dots & \phi_{2N-1}(\xi_{-N}^i) & \phi_{2N}(\xi_{-N}^i) \\ \phi_0(\xi_{-N+1}^i) & \phi_1(\xi_{-N+1}^i) & \dots & \phi_{2N-1}(\xi_{-N+1}^i) & \phi_{2N}(\xi_{-N+1}^i) \\ \phi_0(\xi_{N-1}^i) & \phi_1(\xi_{N-1}^i) & \dots & \phi_{2N-1}(\xi_{N-1}^i) & \phi_{2N}(\xi_{N-1}^i) \\ \phi_0(\xi_N^i) & \phi_1(\xi_N^i) & \dots & \phi_{2N-1}(\xi_N^i) & \phi_{2N}(\xi_N^i) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_0^i \\ C_1^i \\ \vdots \\ C_{2N-1}^i \\ C_{2N}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x_{i-N}) \\ u(x_{i-N+1}) \\ \vdots \\ u(x_{i+N-1}) \\ u(x_{i+N}) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

系数 C_n^i 可以通过求解上述方程组得到. $u(x)$ 的一阶导数是

$$u_x^i(x_{i+j}) = \sum_{n=0}^{2N} C_n^i \frac{d}{dx} \phi_n(\xi_j^i), \quad (4)$$

$$u_{xx}^i(x_{i+j}) = \sum_{n=0}^{2N} C_n^i \frac{d^2}{dx^2} \phi_n(\xi_j^i), \quad (5)$$

$$u_{xxx}^i(x_{i+j}) = \sum_{n=0}^{2N} C_n^i \frac{d^3}{dx^3} \phi_n(\xi_j^i). \quad (6)$$

本文采用的正交基函数是切比雪夫多项式 $T_n(x)$. 这里采用递推关系, 使得描述更为简捷、清晰. 因为 $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$, 所以

$$\frac{d}{dx} T_n(\xi_j^i) = \frac{nl}{N\Delta x} \frac{1}{\sqrt{1-(\xi_j^i)^2}} \sin(n\theta). \quad (7)$$

利用第一类 Chebyshev 方程, 有

$$\frac{d^2}{dx^2} T_n(\xi_j^i) = \left(\frac{l}{N\Delta x}\right)^2 \frac{1}{1-(\xi_j^i)^2} \times [\xi_j^i T_n'(\xi_j^i) - n^2 T_n(\xi_j^i)], \quad (8)$$

$$\frac{d^3}{dx^3} T_n(\xi_j^i) = \left(\frac{l}{N\Delta x}\right)^3 \frac{1}{1-(\xi_j^i)^2} \times [3\xi_j^i T_n''(\xi_j^i) - (n^2 - 1)T_n'(\xi_j^i)] \quad (9)$$

其中 $\theta_j^i = \arccos(\xi_j^i)$. (10)

对于二维问题, 显然方程 (1)~(10) 不仅可以用于 x 方向, 而且可以推广应用于 y 方向, 包括求解 $u(x, y)$ 在 y 方向各阶偏导数. 对于交叉导数 u_{xy} , 只需分别在 x 和 y 方向, 使用一次一阶求导公式即可.

3. 线性浅水方程和非线性扩展型 Boussinesq 方程

对于线性波, 本文采用的无量纲线性浅水方程

$$j = -N, -(N-1), \dots, 1, \dots, N-1, N, \quad (2)$$

x_i 为节点坐标 ($i = 0, 1, \dots, M$). Δx 为网格空间步长, 参数 l 的值小于 1. 靠近边界处的节点坐标可采用不同的向前或向后格式处理. 为了得到 C_n^i , 方程

(1) 可改写为

为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (13)$$

$x \in [0, 2\pi], y \in [0, 2\pi], t \geq 0$. 无量纲平均水深为 1, ζ 是相对平均水面的水位, u, v 是流速.

结合如下的初、边值条件:

$$h(x, y, 0) = A \sin x \sin y, \quad (14)$$

$$h_t(x, y, 0) = 0, \quad (15)$$

$$h(0, y, t) = h(2\pi, y, t) = 0, \quad (16)$$

$$h(x, 0, t) = h(x, 2\pi, t) = 0. \quad (17)$$

方程的分析解为

$$h(x, y, t) = A \cos\sqrt{2}t \sin x \sin y, \quad (18)$$

$$u(x, y, t) = -\frac{A}{\sqrt{2}} \sin\sqrt{2}t \cos x \sin y, \quad (19)$$

$$v(x, y, t) = -\frac{A}{\sqrt{2}} \sin\sqrt{2}t \sin x \cos y. \quad (20)$$

对于非线性波, 本文采用的如下改进型 Boussinesq 方程^[7]:

$$\zeta_t = E(\zeta, u, v), \quad (21)$$

$$u_t + b_1 h \frac{\partial^2 u_t}{\partial x^2} + b_2 \frac{\partial^2(hu_t)}{\partial x^2} = F(\zeta, u, v) + [F_1(v)]_x, \quad (22)$$

$$v_t + b_1 h \frac{\partial^2 v_t}{\partial y^2} + b_2 \frac{\partial^2(hv_t)}{\partial y^2} = G(\zeta, u, v) + [G_1(u)]_y, \quad (23)$$

其中 ζ 为水位, u 和 v 是在 $z = z_0 = -0.531 h$ 处的

水平速度. E, F, F_1, G 和 G_1 是 ξ, u 和 v 的函数, 由下列式子表示:

$$\begin{aligned}
 E(\xi, u, v) = & -[(h + \xi)u]_x - [(h + \xi)v]_x \\
 & - \{a_1 h^3(u_{xx} + v_{yy}) \\
 & + a_2 h^2[(hu)_{xx} + (hv)_{yy}]\}_x \\
 & - \{a_1 h^3(v_{yy} + u_{xx}) \\
 & + a_2 h^2[(hv)_{yy} + (hu)_{xx}]\}_y, \quad (24)
 \end{aligned}$$

$$F(\xi, u, v) = -g\xi_x - (uu_x + vv_y), \quad (25)$$

$$G(\xi, u, v) = -g\xi_y - (vv_y + ww_x), \quad (26)$$

$$F_1(v) = -h[b_1 hv_{xy} + b_2(hv)_{xy}], \quad (27)$$

$$G_1(u) = -h[b_1 hu_{xy} + b_2(hu)_{xy}], \quad (28)$$

常数 a_1, a_2, b_1 和 b_2 由下列式子给定:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{\beta^2}{2} - \frac{1}{6}; \\
 a_2 &= \beta + \frac{1}{2}; \\
 b_1 &= \frac{\beta^2}{2}; \\
 b_2 &= \beta.
 \end{aligned} \quad (29)$$

对于非线性波 本文使用了下列边界条件:

1) 在入射边界, 给定波高 ξ_l , 而速度分量由线性理论给出, 即

$$\begin{aligned}
 u_l &= \frac{\omega}{kh} \xi_l \cos \theta, \\
 v_l &= \frac{\omega}{kh} \xi_l \sin \theta,
 \end{aligned} \quad (30)$$

其中 θ 波相对于 x 轴的传播方向.

2) 在吸收边界和开边界上, 波能被充分吸收. 本文采用了一维分向消波方法^[9].

4. 数值方法

4.1. 空间离散

通过求解方程组(3), 可求得方程(1)的系数, 进而求出物理量的各阶导数. 对于多项式(1), 要求 $|\xi_j^l| \leq 1$. 因为方程(1)不仅可以用于计算区域的内部, 而且可以用于边界, 因此 l 的值在边界处不大于 0.5. 在计算中, 我们发现数值稳定性和精度基本不依赖于 l 的取值. 我们取 $l = 0.48$.

4.2. 时间离散

首先, 在 $n + 1$ 时刻, ξ, u 和 v 的值可用 Adams-Bashforth 显格式^[10, 11]从它们在 $n, n - 1$ 和 $n - 2$ 时

刻的值求得. 以 ξ 为例, 有

$$\begin{aligned}
 \bar{\xi}_{i,j}^{n+1} = & \xi_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{12} \left[23 \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)_{i,j}^n \right. \\
 & \left. - 16 \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)_{i,j}^{n-1} + 5 \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)_{i,j}^{n-2} \right]. \quad (31)
 \end{aligned}$$

预报值 $\bar{\xi}^{n+1}, \bar{u}^{n+1}$ 和 \bar{v}^{n+1} 可用一个迭代过程来校正. 利用第 k 次迭代的结果, ξ_t^{n+1}, u_t^{n+1} 和 v_t^{n+1} 的值可分别用连续性方程(11)(21), x 方向的动量方程(12)(22) 和 y 方向的动量方程(13)(23)更新已知 ξ_t^{n+1}, u_t^{n+1} 和 v_t^{n+1} 后, ξ^{n+1}, u^{n+1} 和 v^{n+1} 可用四阶 Adams-Moulton 校正格式求得. 以 ξ 为例, 该格式为

$$\begin{aligned}
 (\xi_{i,j}^{n+1})^{k+1} = & \xi_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{24} \left\{ 9 \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)_{i,j}^{n+1} \right]^k \right. \\
 & + 19 \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)_{i,j}^n - 5 \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)_{i,j}^{n-1} \\
 & \left. + \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)_{i,j}^{n-2} \right\}, \quad (32)
 \end{aligned}$$

这里当 $k = 0$ 时, $\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)_{i,j}^{n+1} \right]^0 = \left(\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial t} \right)_{i,j}^{n+1}$.

当每个时间步的迭代过程完成时 $(\xi_{i,j}^{n+1})^{k+1}$ 变成 $\xi_{i,j}^{n+1}, u^{n+1}$ 和 v^{n+1} 的值以相似的方式得到. 当 u, v 和 ξ 两次迭代值之差的绝对值小于 10^{-5} , 一个时间步的迭代过程完成.

5. 数值结果

算例 1 线性驻波

采用上述方法, 我们求解了方程(11)–(13). 计算中, 采用 101×101 个节点, 时间步长取为 $\Delta t = 0.01$. 模拟结果如图 1 和图 2 所示. 为了检验方法在长时间模拟过程中能否保持准确性, 我们进行了长达 1000 个无量纲单位时间(相当于模拟了 10 万个时间步)的模拟. 图 1 显示了最后 20 个无量纲单位时间的模拟效果, 可以看出, 方法能在时空上用于准确模拟线性波的长期变化规律.

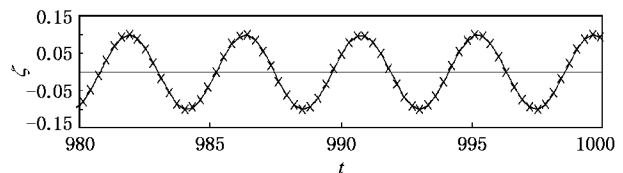


图 1 $x = 1.5\pi, y = 1.5\pi$ 处水位随时间的变化规律(一数值解, \times 分析解)

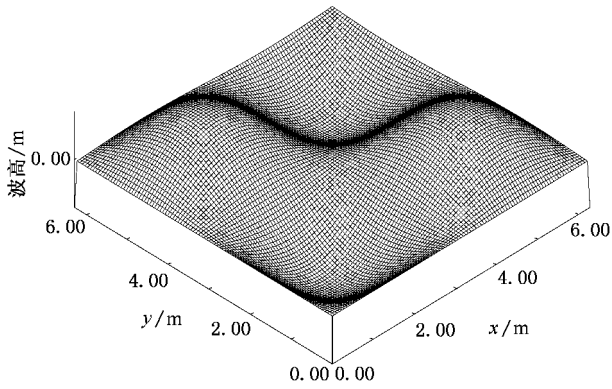


图2 $t = 60$ 时的线性驻波的波面特征

算例2 波在浅滩的绕射和反射

Vincent 和 Briggs^[12]报道了它们的浅滩实验. 其中, 椭圆的浅滩边界由下式定义:

$$\left(\frac{X'}{3.05}\right)^2 + \left(\frac{Y'}{3.96}\right)^2 = 1, \quad (33)$$

其中 X' 和 Y' 为局部坐标. 水深为

$$h = \begin{cases} 0.9144 - 0.7620 \left[1 - \left(\frac{X'}{3.81}\right)^2 + \left(\frac{Y'}{4.95}\right)^2 \right]^{1/2}, & \text{浅滩,} \\ 0.4572, & \text{其他.} \end{cases} \quad (34)$$

在 Vincent 和 Briggs^[12]的实验中, 6.10 m 宽 15.24 m 长的测量区域被定位在造波机前, 波高沿着 1 至 9 断面被记录(见图3).

计算区域为 25 m × 23.76 m, 并具有 201 × 201 个节点. 入射波是正弦波, 波高为 $H_i = 0.0254$ m, 周期为 $T = 1.3$ s. 时间步长取为 $\Delta t = 0.025$ s. 不同断面上的

数值与实验结果如图4所示, 可以看出, 由计算得到的波高与实验值^[13]相当符合. 从图3可以看出, 断面6和断面8在几何上和边界条件上都是对称的. 计算结果(图4)反映了这一点. 实验结果的对称性有所破坏, 对于如此小振幅的入射波, 这不是精确的结果. 一方面说明实验存在一定程度的误差, 另一方面也再次说明了计算方法的可靠性和准确性. 图5则显示了 $t = 30$ s 时的波面形态. 波的较强的绕射和折射特征可从图中清晰地看出. 由于对反射波采用了反向消波处理, 入射边界附近反射波被彻底吸收.

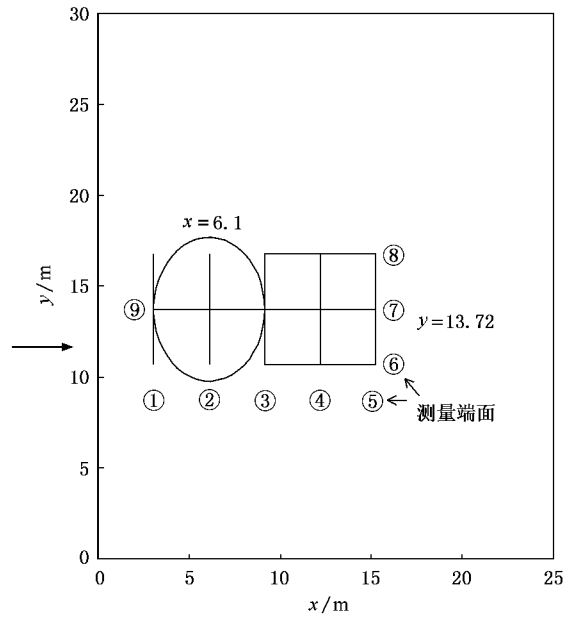


图3 椭圆浅滩的位置和测量端面

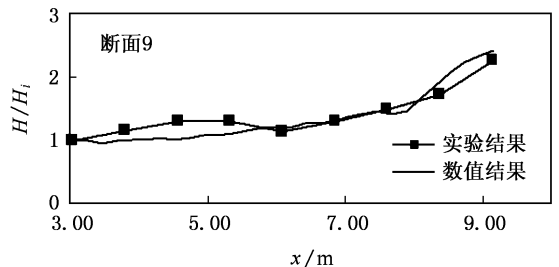
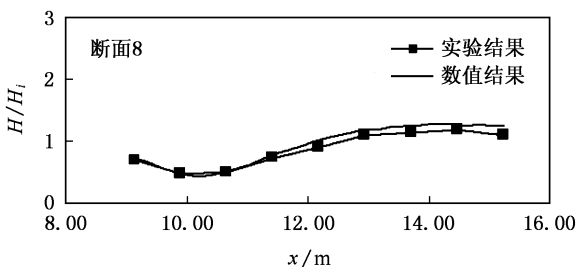
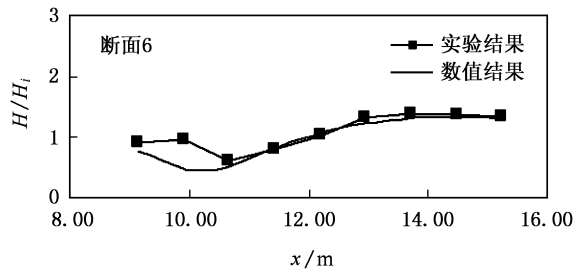
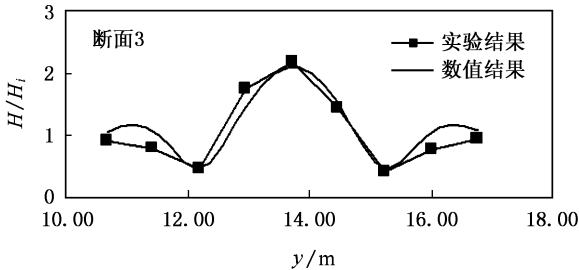


图4 波高的比较

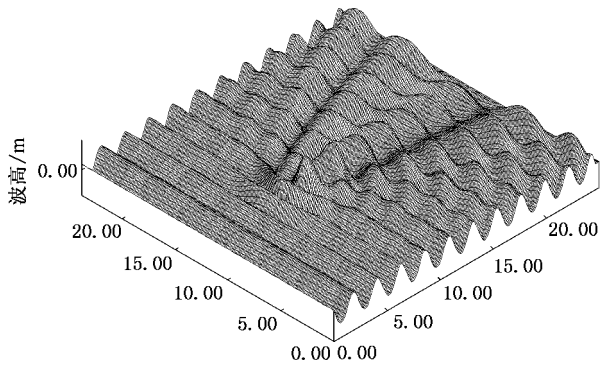


图5 在 $t = 30 \text{ s}$ 时的波面形态

因此,我们的方法,无论对于线性波还是非线性波,都是相当有效和准确的方法,可以进一步推广到其他复杂的物理问题。

6. 结 论

本文给出的二维广义有限谱方法具有高精度的优点,能很好地用于求解线性与非线性波动问题。方法可以推广到其他数学物理问题。

-
- [1] Gottlieb D , Orszag S A 1977 Numerical Analysis of Spectral Methods : Theory and Applications , CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics Vol.26 , SIAM , Philadelphia
- [2] Canuto C , Quarteroni A 1982 *Mathematics of Computation* **38** 67
- [3] Patera A T 1984 *Journal of Computational Physics* **54** 468
- [4] Ghaddar N K , Kamiadakis G E , Patera A T 1986 *Num. Heat Transfer* **9** 277
- [5] Giraldo F X 2003 *Computers and Mathematics with Applications* **45** 97
- [6] Wang J P 1998 *Computers & Fluids* **27** 639
- [7] Nwogu O 1993 *J. Waterw. Port Coastal Ocean Eng.* ASCE **119** 618
- [8] Hu J L 2005 *Chinese Physics* **14** 455
- [9] Zhan J M , Li Y S , Wei O W H 2003 *Ocean Engineering* **30** 23
- [10] Press W H , Flannery B P , Teukolsky S A , Vetterling W T 1989 *Numerical Recipes* (Cambridge University Press , New York , N. Y.) 569—572
- [11] Wei G , Kirby JT 1995 *J. Waterw. Port Coastal Ocean Eng.* ASCE **121** 251
- [12] Vincent C L , Briggs M J 1989 *J. Waterw. Port Coastal Ocean Eng.* ASCE **115** 269
- [13] Panchang V G , Pearce B R , Wei G , Briggs M J 1990 *J. Waterw. Port Coastal Ocean Eng.* ASCE **116** 324

Chebyshev generalized finite spectral method for linear and nonlinear waves^{*}

Zhan Jie-Men^{1)†} Lin Dong¹⁾ Li Yok-Sheng²⁾

¹⁾ Department of Applied Mechanics and Engineering, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China)

²⁾ Department of Civil & Structural Engineering, The Hong Kong Polytechnic University, Hong Kong, China)

³⁾ Guangdong Province Key Laboratory of Coastal Ocean Engineering, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China)

(Received 15 September 2006 ; revised manuscript received 19 October 2006)

Abstract

A Chebyshev generalized finite spectral method is proposed for 2-D linear and nonlinear waves. To attain high accuracy in time discretization, the fourth-order Adams-Bashforth-Moulton predictor and corrector scheme was used. The proposed numerical scheme is validated by applications to the linear shallow water equations and extended Boussinesq equations, where analytical solution and experimental data are available for comparison respectively. Numerical results agree very well with the corresponding analytical solution or experimental data in all cases.

Keywords : Chebyshev generalized finite spectrum, linear wave, nonlinear wave

PACC : 0200, 0340K

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No.40476012).

[†] E-mail :stszjm@mail.sysu.edu.cn