

# 人造地球卫星运动方程的代数 动力学算法数值解<sup>\*</sup>

卢伟涛 王顺金<sup>†</sup> 张 华

(四川大学物理科学与技术学院理论物理中心, 成都 610064)

(2006 年 11 月 18 日收到, 2006 年 12 月 11 日收到修改稿)

代数动力学算法首次被用于求人造地球卫星运动方程的数值解, 在四阶算法下, 与 Runge-Kutta 算法和辛算法的计算结果作了比较. 结果表明, 代数动力学算法对于人造地球卫星长期轨道的计算有较高的精度, 并讨论了地球四极和八极带谐项对卫星轨道的影响.

关键词: 人造地球卫星运动方程, 代数动力学算法数值解, 地球四极和八极带谐项对卫星轨道的影响

PACC: 0200, 9480R

## 1. 引 言

自 1957 年第一颗人造地球卫星进入太空以来, 各类人造卫星在经济、军事、通讯、气象、科研、文化生活等众多领域产生了巨大影响, 成为人类探索、开发太空和地球资源的主要工具, 也是天体动力学研究的重要对象<sup>[1-5]</sup>. 由于卫星运动方程是非线性的, 而实际运动又受到诸多摄动因素的影响, 对卫星轨道运动的高精度数值求解并不容易, 成为人们关心的问题. 本文提供一种新的、精度较高的算法, 即常微分演化方程的代数动力学算法, 对人造地球卫星运动方程进行了数值计算与研究, 并与 Runge-Kutta 算法和辛算法的计算结果作了比较. 我们还研究了地球四极和八极带谐项对卫星轨道的影响.

## 2. 人造地球卫星运动方程<sup>[6]</sup>

影响人造地球卫星运动的摄动因素很多, 这里我们只考虑主要的摄动因素——地球形状的摄动影响. 在初级近似下, 地球为旋转对称椭球; 若再考虑地球密度分布的高阶多极形变(带谐项)的摄动影响, 则在球坐标系中, 人造地球卫星的 Hamilton 量可

写为

$$H(r, \varphi, \theta, p_r, p_\varphi, p_\theta) = \frac{1}{2} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \cos^2 \theta} \right) - \frac{1}{r} \left( 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{J_n}{r^n} P_n(\sin \theta) \right), \quad (1a)$$

其中  $r, \varphi, \theta$  为球坐标,  $p_r, p_\varphi, p_\theta$  为相应的广义动量,  $\theta, \varphi$  分别为人造地球卫星的地理纬度和经度,  $P_n(\sin \theta)$  是以  $\sin \theta$  为变量的勒让德多项式,  $J_n$  为  $n$  阶多极形变系数, 是可由地球观测定出的常数.

若只考虑主要的四极带谐项  $\frac{J_2}{r^3} P_2(\sin \theta)$ , 其中  $J_2 = -1.082636 \times 10^{-3}$ , 则 Hamilton 量为

$$H = \frac{1}{2} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \cos^2 \theta} \right) - \left( \frac{1}{r} + \frac{J_2}{r^3} \left( \frac{3}{2} \sin^2 \theta - \frac{1}{2} \right) \right), \quad (1b)$$

其哈密顿正则方程为

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{\partial H}{\partial p_r} = p_r, \\ \dot{p}_r &= -\frac{\partial H}{\partial r} \\ &= \frac{p_\theta^2}{r^3} + \frac{p_\varphi^2}{r^3 \cos^2 \theta} \end{aligned} \quad (2a)$$

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号: 10375039, 90503008), 教育部博士点基金和兰州重离子加速器国家实验室核理论中心基金资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯作者. E-mail: sjwang@home.swjtu.edu.cn

$$-\frac{1}{r^2} - \frac{3J_2}{2r^4}(3\sin^2\theta - 1), \quad (2b)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{r^2}, \quad (2c)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_\theta &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} \\ &= \frac{3J_2}{r^3}\sin\theta\cos\theta - \frac{p_\varphi^2\sin\theta}{r^2\cos^3\theta}, \end{aligned} \quad (2d)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{r^2\cos^2\theta}, \quad (2e)$$

$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0. \quad (2f)$$

### 3. 代数动力学算法<sup>[7-9]</sup>

先简要介绍非线性常微分方程的代数动力学算法. 由于高阶常微分方程可以通过引进新的变量降阶为一阶的, 所以这里我们考虑一阶常微分方程. 对任意  $n$  个变量、 $p$  个参数的一阶常微分方程组可写为

$$\dot{X}_i = F_i(\alpha_\mu(t), X_i), \quad (3)$$

其中  $\alpha_\mu(t)$  是方程包含的参数, 构成  $p$ -维参数空间,  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $\mu = 1, 2, \dots, p$ .

考虑自治系统, 参数  $\alpha_\mu$  与时间无关. 基于  $F_i$  引进时间平移算子  $\hat{L}(X, \partial_X)$  确定方程的局域微分结构  $\hat{L}(X, \partial_X) = \sum_{i=1}^n F_i(\alpha_\mu, X_i) \partial_{X_i}$ , 则原常微分方程组可提升为偏微分方程组, 其矢量形式为

$$\dot{X} = \hat{L}X, \quad (4a)$$

其严格解为

$$X(X_0, t) = \hat{U}[X_0, t]X_0, \quad (4b)$$

其中时间演化算子为

$$\hat{U}[X_0, t] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \hat{L}^n[X_0, \partial_{X_0}]. \quad (4c)$$

基于严格解, 四阶朴素代数动力学算法的设计如下:

$$\begin{aligned} \hat{U}_4[X_0, \Delta t] &= 1 + \Delta t \hat{L} + \frac{(\Delta t)^2}{2!} \hat{L}^2 \\ &\quad + \frac{(\Delta t)^3}{3!} \hat{L}^3 + \frac{(\Delta t)^4}{4!} \hat{L}^4, \end{aligned} \quad (5a)$$

$$X(X_0, \Delta t) = \hat{U}_4[X_0, \Delta t]X_0. \quad (5b)$$

如果考虑能量的高精度修正, 则近似的时间演化算子还应作如下修正: 四阶近似下轨道迭代格式为

$$\begin{pmatrix} q_1^n \\ p_1^n \end{pmatrix} = \hat{U}_4 \begin{pmatrix} q_1^{n-1} \\ p_1^{n-1} \end{pmatrix}, \text{修正后的轨道迭代格式为}$$

$$q_1^n = q_1^{n-1} - \epsilon_q, \quad p_1^n = p_1^{n-1} - \epsilon_p,$$

其中,

$$\epsilon_q = (H(q_1^n, p_1^n) - E_0) \left| \frac{\partial H(q, p)}{\partial q} \right|_{q_1^n, p_1^n},$$

$$\epsilon_p = (H(q_1^n, p_1^n) - E_0) \left| \frac{\partial H(q, p)}{\partial p} \right|_{q_1^n, p_1^n}.$$

### 4. 人造地球卫星运动方程的代数动力学算法与其他算法计算结果的比较

为检验代数动力学算法(alge4)的精度, 我们把代数动力学算法计算结果与 Runge-Kutta 算法(rk4)<sup>[10,11]</sup>和辛算法(symp4)<sup>[12,13]</sup>计算结果作了比较. 三种算法均取四阶定步长算法.

这里 rk4 选用的是经典算法公式, 其运动方程、轨道迭代和速率迭代格式如下:

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (6a)$$

$$x^{n+1} = x^n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (6b)$$

其中  $k_1 = f(t, x^n)$ ,  $k_2 = f(t + \frac{h}{2}, x^n + \frac{h}{2}k_1)$ ,  $k_3 = f(t + \frac{h}{2}, x^n + \frac{h}{2}k_2)$ ,  $k_4 = f(t + h, x^n + hk_3)$ .

由于人造地球卫星的 Hamilton 量是不可分的, 对 symp4 我们采用 Euler 中点算法

$$\begin{aligned} p^{n+1} &= p^n - hb_{n+1} \\ &\quad \times H_q \left( \frac{q^n + q^{n+1}}{2}, \frac{p^n + p^{n+1}}{2} \right), \\ q^{n+1} &= q^n + hb_{n+1} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} &\times H_p \left( \frac{q^n + q^{n+1}}{2}, \frac{p^n + p^{n+1}}{2} \right), \\ n &= 0, 1, 2, 3, \end{aligned}$$

其中  $\dot{p} = -\frac{\partial H(p, q)}{\partial q} = -H_q(p, q)$ ,  $\dot{q} = \frac{\partial H(p, q)}{\partial p} = H_p(p, q)$ ;  $b_1 = -2.70309412$ ,  $b_2 = -0.53652708$ ,  $b_3 = 2.37893931$ ,  $b_4 = 1.860681856$ .

对人造地球卫星, 参数的选择为  $p_r(0) = 0.0$ ,  $r(0) = 1.0$ ,  $p_\theta(0) = 0.8$ ,  $\theta(0) = -\pi/3$ ,  $p_\varphi(0) = \sqrt{0.1}$ ,  $\varphi(0) = 0.0$ ; 时间步长  $h = 0.01$ ; 初始能量  $E_0 = -0.4793233525$ ; 计算 400 万步, 卫星绕地球大约运行 6000 圈, 以卫星每天绕地球运行 15 圈计(以运行周期为 1.6 h 计算), 卫星大约运行了 400 天.

计算结果如下:

1. 轨道 见图 1(a)(b), 因为该问题没有解析解, 而四阶代数动力学算法的精度可以估算, 从数值计算应保持能量守恒知道它的精度最高, 因此轨道计算以它为准. 与代数动力学算法相比, Runge-Kutta 算法在长时间的运算后, 轨道稍有偏差, 辛算法由于动力学相位失真, 造成相位移动, 导致轨道偏差较大.

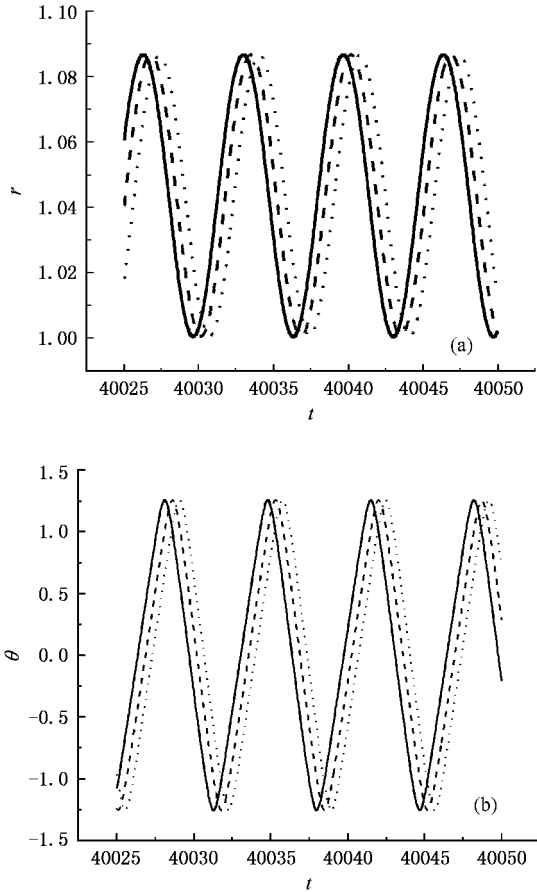


图 1 四阶代数动力学算法(—)四阶 Runge-Kutta 算法(---)和四阶辛算法(···)在计算 400 万步后得到的卫星轨道随时间的变化曲线 (a)  $r(t)-t$  曲线 (b)  $\theta(t)-t$  曲线

2. 能量相对误差 见图 2(a)(b)(c), 与辛算法的能量相对精度 ( $10^{-6}$ ) 和 Runge-Kutta 算法的能量相对精度 ( $10^{-5}$ ) 相比, 代数动力学算法的能量相对精度 ( $10^{-9}$ ) 要分别高出它们 3 和 4 个数量级. 三种算法的能量相对误差均有周期性的变化, 这是由于四极带谐项  $\frac{J_2}{r^3} P_2(\sin\theta)$  的周期性的影响, 见图 3, 对于轨道偏心率较大的卫星, 由于轨道径向坐标  $r(t)$  变化较大, 摄动的变化和影响也较大, 对于定步长的算法会导致能量误差的增大.

3. 相图 见图 4(a)(b)(c), 计算 100 万步,

代数动力学算法和 Runge-Kutta 算法都能给出较好的椭圆轨道相图, 而辛算法的椭圆轨道相图则出现了小的进动加宽, 这是由于相位失真和隐式算法带来的误差造成的轨道进动所致.

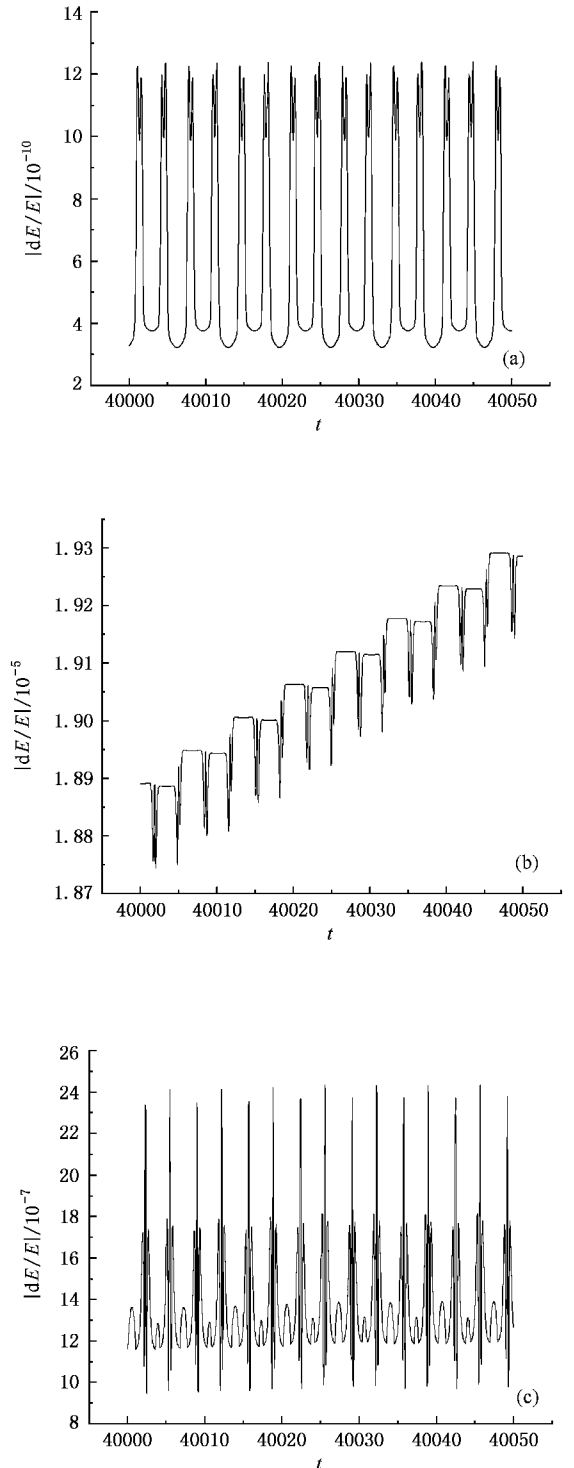


图 2 三种算法在计算 400 万步后卫星的能量相对误差随时间的变化曲线 (a) 四阶代数动力学算法:  $|\Delta E/E|(t)-t$ ; (b) 四阶 Runge-Kutta 算法:  $|\Delta E/E|(t)-t$ ; (c) 四阶辛算法:  $|\Delta E/E|(t)-t$

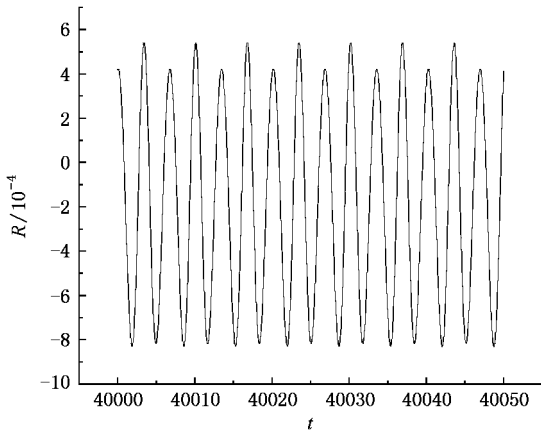


图 3 卫星运行 6000 圈后四极带谐项  $R = \frac{J_2}{r^3} P_2(\sin\theta)$  随时间的变化图 : $R(t)-t$

### 5. 四极和八极带谐项对卫星轨道的影响

1)  $R = \frac{J_2}{r^3} P_2(\sin\theta)$  是主要的地球形状摄动的四极带谐项,它表明地球为一旋转扁椭球体,  $J_2$  的值随地球形状的改变而改变,我们研究了  $J_2$  值的改变对卫星轨道的影响,见图 5(a)(b)图 6(a)(b).图 5(a)是卫星轨道平面极坐标系中的  $\phi-r$  图像,  $\phi$  是由升交点起算的极角.图 5(a)(b)是  $J_2$  变化时卫星轨道的初期行为,图 6(a)(b)是  $J_2$  变化时卫星运行 1500 圈后其轨道的变化.由图可见,  $J_2$  的微小变化都会对卫星的运动产生明显的影响.

2) 卫星轨道的计算中,考虑高阶带谐项  $\frac{J_3}{r^4} P_3(\sin\theta)$  和  $\frac{J_4}{r^5} P_4(\sin\theta)$  对轨道的影响也是十分必要的,它们表示地球密度分布的对于四极分布的偏离,其中

$$J_3 = 2.540 \times 10^{-6}, J_4 = 1.619 \times 10^{-6}[6].$$

图 7(a)(b)是当  $J_2 = -1.082636 \times 10^{-3}$  并考虑  $J_3, J_4$  的影响,卫星运行 12000 圈后其轨道的变化.结果表明,高阶密度分布对卫星长时间轨道有不可忽视的影响.

3) 对具有四极带谐项哈密顿量  $H(r, \theta, \varphi, p_r, p_\theta, p_\varphi)$  鞍点的存在性做了研究,发现该哈密顿量不存在鞍点,卫星运动轨道对于小的扰动是稳定的.对

于更高极带谐项,强度很小,尚未做鞍点和稳定性分析.

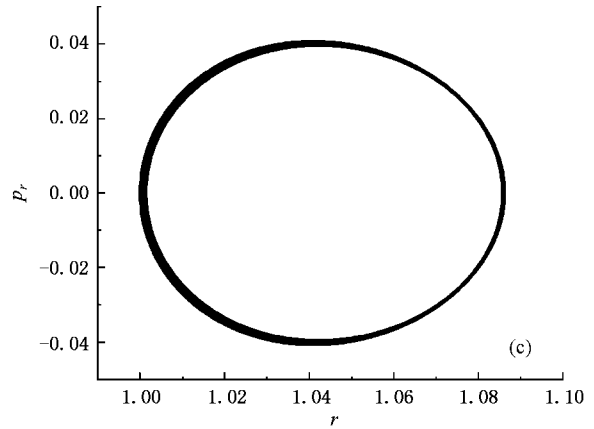
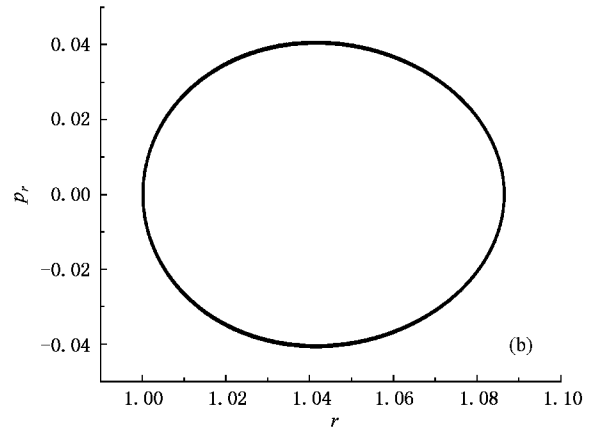
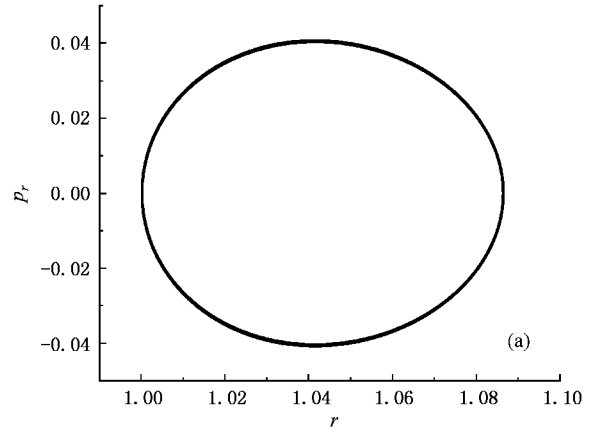


图 4 三种算法在计算 100 万步后相图的变化 (a)四阶代数动力学算法 : $p_r-r$ ; (b)四阶 Runge-Kutta 算法 : $p_r-r$ ; (c)四阶辛算法 : $p_r-r$



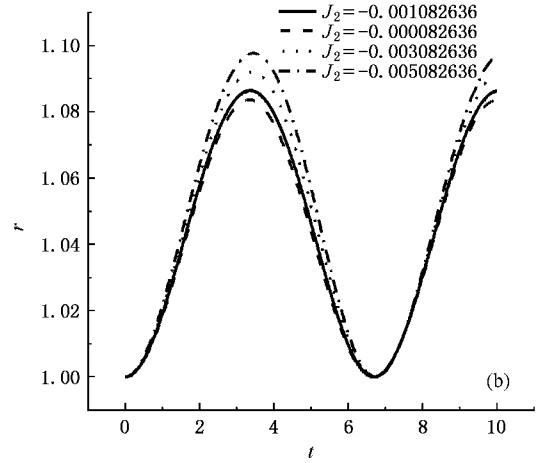
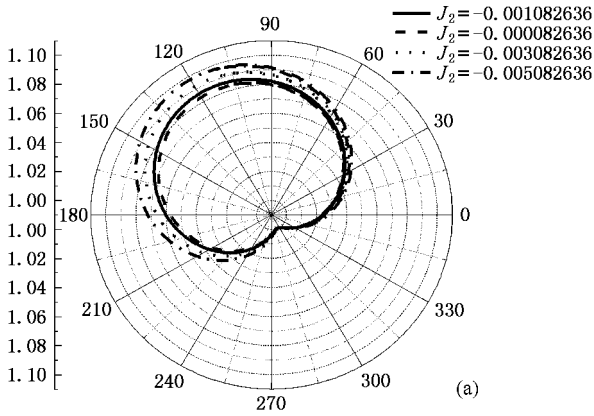


图 5  $J_2$  取  $-0.000082636, -0.001082636, -0.003082636, -0.005082636$  不同值时卫星轨道的变化, 这种变化还取决于  $r, \theta$  (a)  $\phi-r$ ; (b)  $r(t)-t$

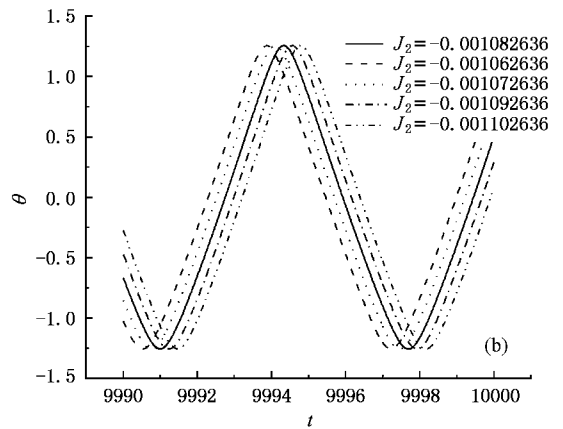
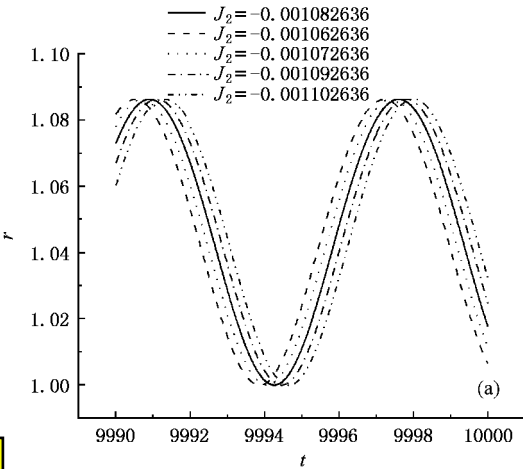


图 6 当  $J_2$  取  $-0.001062636, -0.001072636, -0.001082636, -0.001092636, -0.001102636$  不同值时, 计算 100 万步后卫星轨道的变化 (a)  $r(t)-t$ ; (b)  $\theta(t)-t$

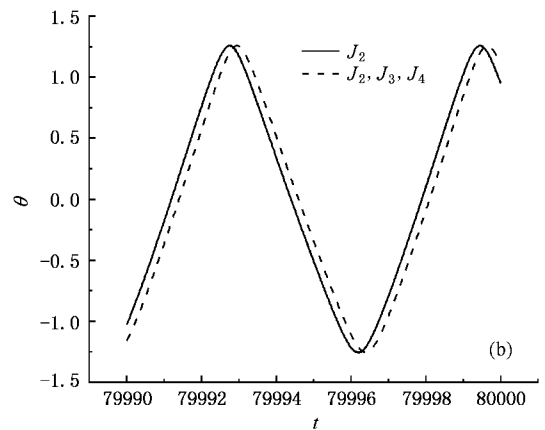
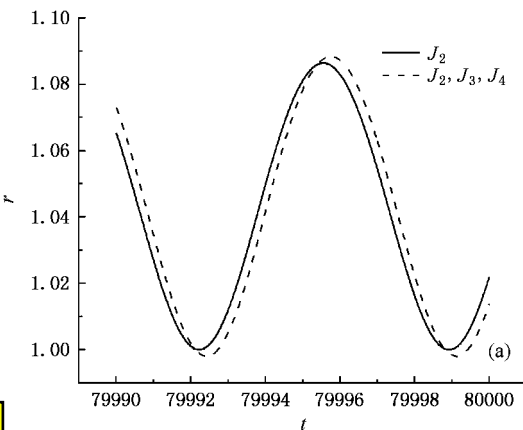


图 7 当  $J_2 = -1.082636 \times 10^{-3}$  并考虑  $J_3, J_4$  的影响, 计算 800 万步后卫星轨道的变化 (a)  $r(t)-t$ ; (b)  $\theta(t)-t$

## 6. 计算结果的分析讨论

1. 辛算法由于强调轨道几何保真,导致了动力学相位失真和卫星轨道误差的增大.但辛算法的能量相对误差呈周期性的振荡,能有效抑制系统能量误差的长期积累.

2. Runge-Kutta 算法由于不能控制复杂的余项,能量相对误差增长较快,对于卫星轨道运动做长时间计算,轨道会出现耗散性偏差.但 Runge-Kutta 算法简易,计算速度较快.

3. 代数动力学算法能在较高的精度下兼顾轨道几何保真和速度、能量等动力学量的保真.前面的计算结果表明,在对卫星运动做长时间的计算后,代数动力学算法能够保证轨道的精度和椭圆形状的基本特征不变,能够较好地控制能量相对误差的精度,这在卫星的定轨计算中是很重要的,也是天体力学研究中久期数值计算的根本要求.但代数动力学算法计算速度较慢,需要进一步优化计算 Taylor 级数系数的程序,以提高计算速度.三种算法相比,代数动力学算法总的计算结果要好一些.

4. 对人造地球卫星,当偏心率较大时,当卫星

与地球相互接近时,所受作用力会急剧增大,地球形状的摄动影响增大,对于一般的定步长的算法,会使计算的能量误差增大,此时就需要考虑使用变步长的计算方法,而变步长是代数动力学算法的特长.本文的计算中是将地球视为旋转椭球,在对各类卫星运动的数值计算中,地球四极密度分布的微小变化都会对卫星轨道产生明显的影响,而地球高阶带谐项密度分布对卫星长时间轨道有不可忽视的影响,应适当处理.

5. 卫星运动轨道的稳定性分析也是重要的.对于具有四极带谐项的哈密顿量,不存在鞍点,其运动轨道对于小的扰动是稳定的.

总之,从本文的计算结果的比较可以看出,代数动力学算法在长时间内能够保持较好的轨道和能量精度,这使得代数动力学算法在人造卫星定轨的精密计算以及天体力学的数值研究中有应用前景.

本文对人造地球卫星运动的探讨是初步的,只考虑了最主要的带谐项的影响,与卫星运动的真实描述还有距离.特别是在人造卫星的精密定轨中,还需要考虑地球大气阻力、太阳辐射压力、日月引力、地球的潮汐和后牛顿效应等诸多因素的摄动影响,真实卫星系统的计算应当考虑这些因素.

- 
- [ 1 ] Vyver H V 2005 *New Astronomy* **10** 261
- [ 2 ] Breiter S, Wyrzyszcak I, Melendo B 2005 *Adv. Space Res.* **35** 1313
- [ 3 ] Liu L, Wang Y R 2006 *Chinese Astron. Astr.* **30** 68
- [ 4 ] Zhong M Q 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2497 ( in Chinese ) [ 钟鸣乾 2001 物理学报 **50** 2497 ]
- [ 5 ] Huang J G, Chen D 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 961 ( in Chinese ) [ 黄建国、陈 东 2004 物理学报 **53** 961 ]
- [ 6 ] Liu L 1992 *Orbit Mechanics of Artificial Earth Satellite* ( Beijing : Higher Education Press ) ( in Chinese ) [ 刘 林 1992 人造地球卫星轨道力学 ( 北京 : 高等教育出版社 ) ]
- [ 7 ] Wang S J, Zhang H 2005 *Sci. China G* **35** 573 ( in Chinese ) [ 王顺金、张 华 2005 中国科学 G 辑 **35** 573 ]
- [ 8 ] Wang S J, Zhang H 2005 *Sci. China G* **36** 14 ( in Chinese ) [ 王顺金、张 华 2006 中国科学 G 辑 **36** 14 ]
- [ 9 ] Wang S J 1999 *Prog. Phys. Chin.* **19** 3313 ( in Chinese ) [ 王顺金 1999 物理学进展 **19** 3313 ]
- [ 10 ] Sun G 2000 *J. Comput. Math.* **18** 61
- [ 11 ] Sun G 1993 *J. Comput. Math.* **11** 365
- [ 12 ] Feng K 1986 *J. Comput. Math.* **4** 279
- [ 13 ] Feng K, Wu H M, Qin M Z *et al* 1989 *J. Comput. Math.* **7** 71

# Algebraic dynamical algorithm for numerical solution of artificial earth satellite motion equation<sup>\*</sup>

Lu Wei-Tao Wang Shun-Jin<sup>†</sup> Zhang Hua

( Center of Theoretical Physics , School of Physics , Sichuan University , Chengdu 610064 , China )

( Received 18 November 2006 ; revised manuscript received 11 December 2006 )

## Abstract

Algebraic dynamical algorithm is used to solve numerically the artificial earth satellite motion equation for the first time , and the result is compared with Runge-Kutta algorithm and symplectic algorithm under the forth order. The result shows that algebraic dynamical algorithm has higher accuracy than the others in the long-term calculation of satellite orbit. We also discussed the quadrupole and octupole deformation of the Earth 's impact on the satellite orbit.

**Keywords** : artificial earth satellite motion equation , algebraic dynamics algorithm for numerical solution , impact of the deformation of the Earth on the satellite orbit

**PACC** : 0200 , 9480R

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant Nos. 10375039 , 90503008 ) , the Doctoral Program Foundation from the Ministry of Education of China and the Foundation of Laboratory of Heavy Ion Accelerator of Lanzhou , China.

<sup>†</sup> E-mail : sjwang@home.swjtu.edu.cn