第 56 卷 第 7 期 2007 年 7 月
1000-3290/2007/56(07)/2662-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.56,No.7,July,2007

一类大气浅水波方程的近似解*

莫嘉琪[1)2)3)†]　林万涛[4)]

1)(安徽师范大学，芜湖　241000)

2)(上海高校计算科学 E-研究院上海交通大学研究所,上海　200240)

3)(湖州师范学院,湖州　313000)

4)(LASG,中国科学院大气物理研究所，北京　100029)

(2006 年 11 月 20 日收到;2006 年 12 月 8 日收到修改稿)

研究了一类非线性浅水波方程,利用同论映射理论和方法,得到了相应系统的近似解.

关键词：浅水波，非线性，同伦映射，近似解

PACC：0230

1. 引　　言

大气和海洋的自然现象异常严重地影响全球和局部地区的气候和生态等方面的变化. 它们的气候异常,海水反常流动带来了许多灾害,对全球和局部地区的经济发展和人类生活都受到严重的影响. 因此对它的规律的研究和预防,为当前国际学术界关注的对象. 为了探讨大气、海洋方面的地球流体运动的主要物理特性,许多学者进行了很多的研究[1—7]. 莫嘉琪、林万涛等也曾研究了一类大气物理、海洋气候、动力系统等领域中的问题[8—20]. 在本文中,是从数学解析的方法出发,来研究一类大气浅水波系统耦合模型.

大气浅水波耦合系统是一个非线性的物理过程. 因此只用一般的线性模式去研究它的过程的内在机理是不够理想的. 本文是根据大气浅水波耦合相互作用和一些实际经验数据建立的一个无量纲正压大气浅水波耦合非线性动力系统出发进行探讨,力求得到的计算结果更接近真实情况.

近来,许多学者研究了非线性问题的近似理论[21—26]. 近似方法不断被发展和优化,包括伸缩变量法,平均法,边界层法,匹配渐近展开法和多重尺度法等等. 本文是利用一个简单而有效的方法来求解一类大气浅水波耦合系统.

2. 正压大气浅水波与同伦映射

今考虑由文献[27]提出的如下无量纲正压大气浅水波系统

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}+\frac{\partial(u\phi)}{\partial x}+\frac{\partial(\nu\phi)}{\partial y}=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\nu\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial \phi}{\partial x}-f\nu=0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \nu}{\partial t}+u\frac{\partial \nu}{\partial x}+\nu\frac{\partial \nu}{\partial y}+\frac{\partial \phi}{\partial y}+fu=0, \tag{3}$$

其中 t,x,y 分别为时间、空间变量,ϕ 为位势函数高度,u,ν 分别为纵向、横向速度,f 为转动系数. 我们用同伦映射方法[28,29]来求出耦合系统(1)—(3)的近似解.

为了得到模式(1)—(3)的近似解,引入一组同伦映射 $H_i(\phi,u,\nu,p),R^3\times I\to R,(j=1,2,3)$：

$$\begin{aligned}&H_1(\phi,u,\nu,p)\\&=L_1w-L_1\bar{w}\\&\quad+p\left[L_1\bar{w}+\left(\frac{\partial(u\phi)}{\partial x}+\nu\frac{\partial(\nu\phi)}{\partial y}\right)\right],\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}&H_2(\phi,u,\nu,p)\\&=L_2w-L_2\bar{w}\end{aligned}$$

* 国家自然科学基金(批准号:40676016 和 10471039)、国家重点基础研究发展计划项目(973 项目)(批准号:2003CB415101-03 和 2004CB418304)、中国科学院创新方向性项目(批准号:KZCX3-SW-221)、上海市教育委员会 E-研究院建设计划项目(批准号:N.E03004)和浙江省自然科学基金(批准号:Y606268)资助的课题.

† E-mail:mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn

$$+p\left[L_2\bar{w}+\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+\nu\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right],\tag{5}$$

$$\begin{aligned}&H_3(\phi,u,\nu,p)\\&=L_3w-L_3\bar{w}\\&\quad+p\left[L_3\bar{w}+\left(u\frac{\partial \nu}{\partial x}+\nu\frac{\partial \nu}{\partial y}\right)\right],\end{aligned}\tag{6}$$

其中 $R=(-\infty,+\infty)$，$I=[0,1]$，$w=(\phi,u,v)$，而 $\bar{w}=(\Phi,U,V)$为原系统(1)—(3)的一组初始近似，且线性算子 L_i，$i=1,2,3$ 为

$$\begin{aligned}L_1w&=\frac{\partial\phi}{\partial t},\\L_2w&=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial\phi}{\partial x}-f\nu,\\L_3w&=\frac{\partial \nu}{\partial t}+\frac{\partial\phi}{\partial y}+fu.\end{aligned}\tag{7}$$

它们是正压大气浅水波耦合模式(1)—(3)的线性部分.

由(7)式，令

$$L\bar{w}=0,i=1,2,3.$$

不难由上式得到 $\bar{w}$：

$$\begin{aligned}\Phi&=C_1,\\U&=C_2\sin(ft)-C_3\cos(ft)-C_{1y},\\V&=C_2\cos(ft)+C_3\sin(ft)+C_{1x},\end{aligned}$$

其中 C_i，$i=1,2,3$，为 x，y 的任意函数.

3. 近似解析解

显然，由(4)—(6)式，系统 $H_i(\phi,u,\nu,1)=0$，$i=1,2,3$，与系统(1)—(3)相同. 故 $H_i(\phi,u,\nu,p)=0$，$i=1,2,3$，的解当 $p\to1$ 的情形就是系统(1)—(3)的解(u,ν,ϕ).

令

$$\begin{aligned}\phi&=\sum_{i=0}^{\infty}\phi_i(t,x,y)p^i,\\u&=\sum_{i=0}^{\infty}u_i(t,x,y)p^i,\\\nu&=\sum_{i=0}^{\infty}\nu_i(t,x,y)p^i.\end{aligned}\tag{8}$$

考虑到(8)式，由(4)—(6)式，分别比较方程 $H_i(\phi,u,\nu,p)=0$，$i=1,2,3$，关于 p 的同次幂的系数. 由 $H_i(\phi,u,\nu,p)=0$，$i=1,2,3$，比较 p 的零次幂的系数得

$$L_iw_0=L_i\bar{w},i=1,2,3,\tag{9}$$

其中 $w_0=(\phi_0,u_0,\nu_0)$. 由(9)式，显然有

$$\phi_0(t,x,y)=\bar{\phi},\tag{10}$$

$$\begin{aligned}u_0(t,x,y)&=(\bar{\nu}-\bar{\phi}_x)\sin(ft)\\&\quad+(\bar{u}+\bar{\phi}_y)\cos(ft)-\bar{\phi}_y,\end{aligned}\tag{11}$$

$$\begin{aligned}\nu_0(t,x,y)&=(\bar{\nu}-\bar{\phi}_x)\cos(ft)\\&\quad-(\bar{u}+\bar{\phi}_y)\sin(ft)+\bar{\phi}_x,\end{aligned}\tag{12}$$

其中 $\bar{\phi}$，$\bar{u}$，$\bar{\nu}$分别为 ϕ，u，ν 的初值.

再由(4)—(6)式，$H_i(\phi,u,\nu,p)=0$，$i=1,2,3$，比较 p 的一次幂的系数得

$$L_1w_1+\frac{\partial(u_0\phi_0)}{\partial x}+\frac{\partial(\nu_0\phi_0)}{\partial y}=0,\tag{13}$$

$$L_2w_1+u_0\frac{\partial u_0}{\partial x}+\nu_0\frac{\partial u_0}{\partial y}=0,\tag{14}$$

$$L_3w_1+u_0\frac{\partial \nu_0}{\partial x}+\nu_0\frac{\partial \nu_0}{\partial y}=0,\tag{15}$$

其中 $w_1=(\phi_1,u_1,\nu_1)$.

考虑到(10)—(12)式，不难得到线性非齐次方程组(13)—(15)有解：

$$\begin{aligned}\phi_1(t,x,y)&=-\frac{1}{f}[A_{11}(t,x,y)(\cos(ft)-1)\\&\quad+A_{12}(t,x,y)\sin(ft)],\end{aligned}\tag{16}$$

$$\begin{aligned}u_1(t,x,y)&=\int_0^t[A_1(\tau,x,y)\cos(f(t-\tau))\\&\quad-A_2(\tau,x,y)\sin(f(t-\tau))]\mathrm{d}\tau,\end{aligned}\tag{17}$$

$$\begin{aligned}\nu_1(t,x,y)&=\int_0^t[A_1(\tau,x,y)\sin(f(t-\tau))\\&\quad+A_2(\tau,x,y)\cos(f(t-\tau))]\mathrm{d}\tau,\end{aligned}\tag{18}$$

其中

$$\begin{aligned}A_{11}(t,x,y)&=[-(\bar{\nu}_x-\bar{\phi}_{xx})+(\bar{u}_y+\bar{\phi}_{yy})]\bar{\phi}\\&\quad-(\bar{\nu}-\bar{\phi}_x)\bar{\phi}_x+(u+\bar{\phi}_y)\bar{\phi}_y,\end{aligned}\tag{19}$$

$$A_{12}(t,x,t)=-(\bar{u}_x+\bar{\nu}_y)\bar{\phi}-(\bar{u}\bar{\phi}_x+\bar{\nu}\bar{\phi}_y),\tag{20}$$

$$A_1(t,x,y)\equiv-\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial x}+u_0\frac{\partial u_0}{\partial x}+\nu_0\frac{\partial u_0}{\partial y}\right),\tag{21}$$

$$A_2(t,x,y)\equiv-\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial y}+u_0\frac{\partial \nu_0}{\partial x}+\nu_0\frac{\partial \nu_0}{\partial y}\right).\tag{22}$$

于是由(10)—(12)和(16)—(18)式，我们便可得到系统(1)—(3)的一次近似解：

$$\begin{aligned}\phi(t,x,y)&=\bar{\phi}-\frac{1}{f}[A_{11}(t,x,y)(\cos(ft)-1)\\&\quad+A_{12}(t,x,y)(\sin(ft)],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u(t,x,y)&=(\bar{\nu}-\bar{\phi}_x)\sin(ft)\\&\quad+(\bar{u}+\bar{\phi}_y)\cos(ft)-\bar{\phi}_y\\&\quad+\int_0^t[A_1(\tau,x,y)\cos(f(t-\tau))\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad - A_2(\tau, x, y)\sin(f(t-\tau))]\mathrm{d}\tau,\\
\nu(t,x,y) &= (\bar{\nu} - \bar{\phi}_x)\cos(ft)\\
&\quad - (\bar{u} + \bar{\phi}_y)\sin(ft) + \bar{\phi}_x\\
&\quad + \int_0^t [A_1(\tau, x, y)\sin(f(t-\tau))\\
&\quad + A_2(\tau, x, y)\cos(f(t-\tau))]\mathrm{d}\tau,
\end{aligned}
$$

其中 A_{11}, A_{12}, A_1, A_2 由(19)—(22)式决定.

同理,能依次地得到 $\phi_i(t,x,y), u_i(t,x,y), \nu_i(t,x,y), i=2,3,\cdots$. 于是将上述求得的 $\phi_i(t,x,y), u_i(t,x,y), \nu_i(t,x,y), i=0,1,2,\cdots$,代入(8)式并令 $p=1$,便可得到耦合系统(1)—(3)的第 n 次近似解:

$$
\begin{aligned}
\phi(t,x,y) &= \sum_{j=0}^{n}\phi_i(t,x,y),\\
u(t,x,y) &= \sum_{j=0}^{n} u(t,x,y),\\
\nu(t,x,y) &= \sum_{j=0}^{n}\nu_i(t,x,y).
\end{aligned}
$$

4. 精确解的讨论

由模式(1)—(3)和同伦映射(4)—(6)的结构可以证明[29]用同伦映射方法得到的级数(8)在有限时段内和 $p\in[0,1]$ 上一致收敛. 故有

$$
\begin{aligned}
&H_1\Big(\sum_{i=0}^{\infty}\phi_i p^i, \sum_{i=0}^{\infty}u_i p^i, \sum_{i=0}^{\infty}\nu_i p^i, p\Big)\\
&= L_1\Big(\sum_{i=0}^{\infty}\phi_i p^i, \sum_{i=0}^{\infty}u_i p^i, \sum_{i=0}^{\infty}\nu_i p^i\Big) - L_1\bar{w}\\
&\quad + p\Big[L_1\bar{w} + \frac{\partial}{\partial x}\Big[\Big(\sum_{i=0}^{\infty}u_i p^i\Big)\Big(\sum_{i=0}^{\infty}\phi_i p^i\Big)\Big]\\
&\quad + \frac{\partial}{\partial y}\Big[\Big(\sum_{i=0}^{\infty}\nu_i p^i\Big)\Big(\sum_{i=0}^{\infty}\phi_i p^i\Big)\Big]\Big]\\
&= [L_1 w_0 - L_1\bar{w}]\\
&\quad + \Big[L_1 w_1 + \frac{\partial(u_0\phi_0)}{\partial x}\\
&\quad + \nu_0\frac{\partial(\nu_0\phi_0)}{\partial y}\Big]p + \cdots = 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&H_2\Big(\sum_{i=0}^{\infty}\phi_i p^i, \sum_{i=0}^{\infty}u_i p^i, \sum_{i=0}^{\infty}\nu_i p^i, p\Big)\\
&= L_2\Big(\sum_{i=0}^{\infty}\phi_i p^i, \sum_{i=0}^{\infty}u_i p^i, \sum_{i=0}^{\infty}\nu_i p^i\Big) - L_2\bar{w}\\
&\quad + p\Big[L_2\bar{w} + \Big(\sum_{i=0}^{\infty}u_i p^i\Big)\frac{\partial}{\partial x}\Big(\sum_{i=0}^{\infty}u_i p^i\Big)\\
&\quad + \Big(\sum_{i=0}^{\infty}\nu_i p^i\Big)\frac{\partial}{\partial y}\Big(\sum_{i=0}^{\infty}u_i p^i\Big)\Big]\\
&= [L_2 w_0 - L_2\bar{w}]\\
&\quad + \Big[L_2 w_1 + u_0\frac{\partial u_0}{\partial x}\\
&\quad + \nu_0\frac{\partial u_0}{\partial y}\Big]p + \cdots = 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&H_3\Big(\sum_{i=0}^{\infty}\phi_i p^i, \sum_{i=0}^{\infty}u_i p^i, \sum_{i=0}^{\infty}\nu_i p^i, p\Big)\\
&= L_3\Big(\sum_{i=0}^{\infty}\phi_i p^i, \sum_{i=0}^{\infty}u_i p^i, \sum_{i=0}^{\infty}\nu_i p^i\Big) - L_3\bar{w}\\
&\quad + p\Big[L_3\bar{w} + \Big(\sum_{i=0}^{\infty}u_i p^i\Big)\frac{\partial}{\partial x}\Big(\sum_{i=0}^{\infty}\nu_i p^i\Big)\\
&\quad + \Big(\sum_{i=0}^{\infty}\nu_i p^i\Big)\frac{\partial}{\partial y}\Big(\sum_{i=0}^{\infty}\nu_i p^i\Big)\Big]\\
&= [L_3 w_0 - L_3\bar{w}]\\
&\quad + \Big[L_3 w_1 + u_0\frac{\partial \nu_0}{\partial x}\\
&\quad + \nu_0\frac{\partial \nu_0}{\partial y}\Big]p + \cdots = 0.
\end{aligned}
$$

故由(8)式得到的(ϕ, u, ν)为 $H_i(\phi, u, \nu, p)=0, i=1,2,3$ 的解. 取 $p=1$ 便得到

$$
\begin{aligned}
\phi &= \sum_{i=0}^{\infty}\phi_i(t,x,y),\\
u &= \sum_{i=0}^{\infty}u_i(t,x,y),\\
\nu &= \sum_{i=0}^{\infty}\nu_i(t,x,y).
\end{aligned}
$$

它们就为非线性正压大气浅水波系统(1)—(3)的精确解.

5. 结 论

大气浅水波耦合系统是一个复杂的的自然现象. 因此我们需要把它简化为基本模式,并且用近似方法求出其解. 同伦映射方法就是一个简单而有效的方法. 这个方法是定义一组同伦映射将非线性问题的解由线性迭代问题的解来近似地逼近.

采用本同伦映射方法得到的近似解所获得的精度'速度'还在于它的初始近似 $\bar{w}=(\phi, U, V)$的选取,本文选用相应的线性问题 $L_i\bar{w}=0, i=1,2,3$,的解作为原模式的零次近似,这是很自然的. 从而再进一步优化和深入地用逼近理论可得到原非线性问

题(1)—(3)更精确的近似解. 这样的结果更容易接近实际情况.

从数学理论观点来看,同伦映射方法是一个近似的解析方法. 它不同于一般的数值求解方法,更不是简单的模拟计算. 本方法得到解的表示式,还能继续进行解析运算. 于是,由相应近似解的表示式,我们能够继续用解析运算来研究所考虑的相关物理量的各种定性和定量方面的结果.

[1] McPhaden M J, Zhang D 2002 *Nature* **415** 603

[2] Gu D F, Philander S G H 1997 *Science* **275** 805

[3] Shukla J 1981 *J. Atmos. Sci.* **38** 2547

[4] Hsu, C S 1980 *ASME J. Appl. Mech.* **47** 931

[5] Han X L 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2510 (in Chinese) [韩祥临 2005 物理学报 **54** 2510]

[6] Wu Q K 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2590 (in Chinese) [吴钦宽 2005 物理学报 **54** 2590]

[7] Ouyang C 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1902 (in Chinese) [欧阳成 2004 物理学报 **54** 1902]

[8] Mo J Q, Lin W T, Zhu J 2004 *Prog. Natur. Sci.* **14** 550

[9] Mo J Q, Lin W T 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 996 (in Chinese) [莫嘉琪、林万涛 2004 物理学报 **53** 996]

[10] Mo J Q, Lin W T, Zhu J 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3245 (in Chinese) [莫嘉琪、林万涛、朱　江 2004 物理学报 **53** 3245]

[11] Mo J Q, Lin W T 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 993 (in Chinese) [莫嘉琪、林万涛 2005 物理学报 **54** 993]

[12] Mo J Q, Lin W T 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1081 (in Chinese) [莫嘉琪、林万涛 2005 物理学报 **54** 1081]

[13] Mo J Q, Wang H, Lin W T 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 485 (in Chinese) [莫嘉琪、王　辉、林万涛 2006 物理学报 **55** 485]

[14] Mo J Q, Lin W T 2005 *Chin. Phys.* **14** 875

[15] Mo J Q, Wang H, Lin W T, Lin Y H 2006 *Chin. Chys.* **15** 671

[16] Mo J Q, Wang H, Lin W T 2006 *Chin. Chys.* **15** 1450

[17] Mo J Q, Wang H, Lin W T 2006 *Chin. Chys.* **15** 1927

[18] Lin W T, Mo J Q 2004 *Chin. Sci. Bull.* **48** Ⅱ 5

[19] Lin W T, Ji Z Z, Wang B 2001 *Acta Aerodynamica Sin.* **19** 348

[20] Lin W T, Ji Z Z, Wang B 2002 *Adv. Atmosphere. Sci.* **19** 699

[21] de Jager E M, Jiang F R 1996 *The Theory of Singular Perturbation* (Amsterdam: North-Holland Publishing Co)

[22] Marques I 2005 *Nonlinear Anal.* **61** 21

[23] Zhang F 2004 *J. Diff. Eqns.* **205** 77

[24] Hwangm S 2004 *J. Diff. Eqns.* **200** 191

[25] Perjan A 2003 *Buletinul Acad. De. Stiinte.* **42** 95

[26] Akhmetov D R 2003 *Asymptotic Anal.* **35** 65

[27] Wang B, Ji Z Z 2006 *The numerical new method and its application in the atmospheric science* (Beijing: Science Press) [王　斌、季仲贞 2006 大气科学中的数值新方法及其应用(北京:科学出版社)]

[28] He J H 2002 *Approximate Analytical Methods in Engineering and Sciences* (Zhengzhou: Henan Science and Technology Publisher) [何吉欢 2002 工程与科学计算中的近似非线性分析方法(郑州:河南科学技术出版社)]

[29] Liao S J 2004 *Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method* (New York: CRC Press Co)

Approximate solution for a class of atmospheric wading wave equations*

Mo Jia-Qi[1)2)3)] Lin Wan-Tao[4)]

1) (*Anhui Normal University*, *Wuhu* 241000, *China*)

2) (*Division of Computational Science*, *E-Institutes of Shanghai Universities at SJTU*, *Shanghai* 200240, *China*)

3) (*Huzhou Teachers College*, *Huzhou* 313000, *China*)

4) (*LASG*, *Institute of Atmospheric Physics*, *Chinese Academy of Sciences*, *Beijing* 100029, *China*)

(Received 20 November 2006; revised manuscript received 8 December 2006)

Abstract

In this paper, a class of wading wave equations are considered. Using the homotopic mapping theory and method, the corresponding approximate solution of the system is obtained.

Keywords: wading wave, nonlinear, homotopic mapping, approximate solution

PACC: 0230

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 40676016 and 10471039), the State Key Program for Basic Research of China (Grant Nos. 2003CB415101-03 and 2004CB418304), the Key Project of the Chinese Academy of Sciences (Grant No. KZCX3-SW-221), in Part by E-Institutes of Shanghai Municipal Education Commission (Grant No. N. E03004) and the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant No. Y606268).

† E-mail: mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn