

# 广义色散 Camassa-Holm 模型的奇异孤子<sup>\*</sup>

孙 璐 田立新

(江苏大学非线性科学研究中心, 镇江 212013)

(2005 年 12 月 7 日收到, 2006 年 11 月 13 日收到修改稿)

引进一类广义色散 Camassa-Holm 模型, 对其做奇异性分析. 通过改进的 WTC-Kruskal 算法, 证明该模型在 Painlevé 意义下可积, 得到了它的一组 Painlevé-Bäcklund 系统和 Bäcklund 变换. 应用 Maple 进行代数运算, 得到了丰富的规则( regular )孤子和一类奇异( singular )孤子, 扭结( kink )孤子, 紧孤子( compacton )和反紧孤子( anti-compacton ). 特别地, 推导出一类在扭结孤子的中间区域包含有一列周期尖点( cuspon )波的奇异结构. 在这些规则的孤子系统的基础上, 对可积广义系统应用 Bäcklund 变换, 得到三类奇异孤子, 分别是具有驼峰结构的周期爆破波, 具有爆破波结构的扭结孤子和紧孤子.

关键词: 广义 Camassa-Holm 模型, 周期尖点波, 紧孤子, 周期爆破波

PACC: 0290, 0340K

## 1. 引 言

在地心引力作用下没有表面张力的无漩涡不可压缩无黏性浅层流体的运动研究中, 近似地推导出 Camassa-Holm 模型<sup>[1]</sup>. 通过相位分析, Dullin, Gottwald 和 Holm<sup>[2]</sup>将 Camassa-Holm 模型的行波解作为 Bond 数的函数进行分类, 研究了该模型在实验上的可观察性. 在 Kodama 变换方法基础上, Dullin, Gottwald 和 Holm<sup>[3]</sup>导出了具有表面张力的 Camassa-Holm 模型. Tian, Gui 和 Liu<sup>[4]</sup>研究了文献 [3] 中方程的适定性、稳定性和散射问题. Ding 和 Tian<sup>[5]</sup>讨论了弱黏性 Camassa-Holm 模型解的存在性以及爆破波现象. Tian, Yin, Song 等<sup>[6-10]</sup>研究了一类完全非线性广义 Camassa-Holm 模型的新型尖峰孤子解和紧孤子. 阮和李<sup>[11]</sup>用李群约化方法深入研究了非线性薛定谔模型的一些特殊情况的解. 智, 王和张<sup>[12]</sup>通过一种构造非线性偏微分方程更一般形式精确解的直接方法推导 Broer-Kau-Kupershmidt 方程的一系列精确解.

1983 年, Weiss, Tabor 和 Carnevale 推广常微分模型的 Painlevé 方法, 提出 WTC 方法来直接检验偏微分模型的 Painlevé 属性. 经典的求偏微分模型近似约化的工具是李方法, Clarkson 和 Kruskal 推导出

了一个较之前方法简单的方法, CK 直接约化方法被广泛用于求解非线性偏微分模型的近似解. Yan 利用改进的齐次平衡法对变系数 KP 模型求解, 通过 Bäcklund 变换得到 6 组精确解<sup>[13]</sup>. Fan 等推广齐次平衡法, 在此基础上得到改进的 Bäcklund 变换和近似约化, 讨论了 WTC 方法、CK 直接约化法和齐次平衡法三者之间的联系<sup>[14, 15]</sup>. Hong 在截尾 Painlevé 方法基础上利用 Auto-Bäcklund 变换得到 Kink 孤波<sup>[16]</sup>, Fan 和 Zhang 进一步改进齐次平衡法, 使得求解的过程更为简单有效<sup>[17]</sup>. 最近文献 [18—21] 分别讨论了非线性模型的精确解问题.

本文引入两个变系数广义 Camassa-Holm 模型, 研究当对 Camassa-Holm 模型加大浅层水面的色散强度以后, 所产生的广义模型是否仍然具有碎波现象或其他以前没有得到过的新型形式的孤波系统. 我们知道, Camassa-Holm 模型比 KdV 模型更好之处在于它具有和物理水波一样的碎波现象. 我们首先来研究可积的广义色散 Camassa-Holm 模型. 本文应用 WTC-Kruskal 算法来处理该模型的可积性问题, 注意到此时该广义色散 Camassa-Holm 模型的指数序列取定值. 在求解该模型的过程中, Maple 被用来处理过程中复杂的数值计算和数值模拟. 由于广义色散 Camassa-Holm 模型中的色散作用与非线性作用平衡, 因而它能够产生一系列规则的运动. 通过 WTC

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号: 10071033)和江苏省自然科学基金(批准号: BK2002003)资助的课题.

测验,该模型在 Painlevé 意义下可积,从而可以推导出该模型的 Painlevé-Bäcklund 系统和 Bäcklund 变换. 我们由三种初值解的类型来分析广义色散 Camassa-Holm 模型的孤子结构:平凡的初值解、常数解和孤子解情况. 由 Bäcklund 变换和它的方程组,我们得到了规则孤子,如扭结孤子、紧孤子和反紧孤子,以及奇异孤子——周期尖点波与扭结孤子同时存在. 本文接着讨论了一类可积的广义 Camassa-Holm 模型. 这里我们不再人为的添加非线性色散作用,只是调整模型中指数序列的取值,使得模型里的作用力能够达到到稳定,从而可以产生传播中不会衰退的结构. 我们首先探讨该广义非线性模型的规则孤子结构,分别得到了爆破波、周期爆破波和浮动紧孤子. 在这些规则孤子结构的基础上,我们试图扩展该模型的孤子系统到一个更为宽泛和复杂的范围. 由 Bäcklund 变换和 Painlevé-Bäcklund 系统,得到了本文所期望的奇异孤子结构,它们分别是具有对称驼峰结构的奇异周期爆破波,含有爆破波的奇异扭结孤子结构,以及包含对称爆破波的奇异紧孤子结构.

## 2. 孤子系统的推广

### 2.1. WTC 测验

Weiss, Tabor 和 Carnevale 给出了一个可以直接进行可积性测验的程序. 由它改进的算法指出,当方程的解在运动奇异流形上是“单值”时,则该偏微分方程具有 Painlevé 可积性. 我们利用它来研究确定强度的广义色散 Camassa-Holm 方程

$$u_t + ku_x + f_1(t)u_{xxx} + f_2(t)(\chi u^2)_x + f_3(t)u_x(u^3)_{xx} + f_4(t)u(u^2)_{xxx} + f_5(t)(\chi u^4)_{xxx} = 0. \quad (1)$$

我们将奇异流形定义为  $F(\varphi(x, t)) = 0$ , 偏微分方程的解定义为  $u = u(x, t)$ . 将一个拟设表达式

$u(x, t) = \sum_{i=0}^N F^i(\chi(\varphi(x, t)))$  代入到模型 (1) 中, 其中  $t$  在流形的邻域取定. 由改进的齐次平衡法原理, 通过非线性项  $f_3(t)u_x u^3_{xx} + f_4(t)u u^2_{xxx}$  和最高阶微分项  $f_5(t)u^4_{xxx}$  的平衡, 可以得到平衡常数  $N$  取值为 2, 因此该广义色散 Camassa-Holm 系统的 Bäcklund 变换为

$$u(x, t) = F'(\varphi)\varphi^2(x, t) + F''(\varphi)\varphi_{xx}(x, t) + V(x, t), \quad (2)$$

其中  $' = \partial/\partial\varphi, F^{(r)} = \partial^r F/\partial\varphi^r, \varphi = \varphi(x, t), V(x, t)$  是变系数广义色散 Camassa-Holm 模型的两个解, 我

们将在下面的计算中得到这两个函数. 将 (2) 式代入到方程 (1) 式中, 我们得到一个代数系统, 在该系统中合并  $\varphi(x, t)$  的偏微分的所有齐次项, 并令该系统中  $\varphi^6_x$  的系数为零, 产生了  $F$  的如下的常微分方程:

$$f_5(t)V_{xxx} + 3f_3(t)F''\varphi_{xx}\varphi_{xxx} + 42f_5(t)F''\varphi_{xx}\varphi_{xxx} + f_3(t)F'\varphi_{xxxx} = 0. \quad (3)$$

这说明方程 (1) 中非线性项和三阶微分项实现了部分的平衡. 解上面的微分方程, 我们有  $F(\varphi) = k \ln \varphi$ , 这里  $k$  取任意常数. (3) 式可以简化成为关于  $F', F'', F''', L$  的一个线性多项式. 将  $F', F'', F''', L$  的系数设置为零, 得到了一系列偏微分 Painlevé-Bäcklund 方程系统. 由于该方程组很繁琐, 本文略去其表达式. 我们称其为广义色散 Camassa-Holm 模型的 Painlevé-Bäcklund 系统. 由广义色散 Camassa-Holm 模型的 Painlevé-Bäcklund 系统, 建立了广义色散 Camassa-Holm 模型的一个自动 Bäcklund 变换

$$u(x, t) = k(\ln \varphi)_{xx} + V(x, t). \quad (4)$$

这里  $\varphi(x, t)$  满足广义色散 Camassa-Holm 模型的 Painlevé-Bäcklund 系统,  $V(x, t)$  是方程 (1) 的解. 在接下来的几节中将对  $V(x, t)$  分情况讨论导出的新解情况.

### 2.2. 平凡解条件下的孤子结构

由 BT 的广义色散 Camassa-Holm 模型的 Painlevé-Bäcklund 系统, 我们来寻找方程 (1) 的精确解. 显然平凡解是方程 (1) 的一个解, 令  $V(x, t) = 0$ , 将这个假设代入到广义色散 Camassa-Holm 模型的 Painlevé-Bäcklund 系统中, 系统转化为较简单的方程组. 在该方程组中对  $\varphi(x, t)$  做拟设  $A + B \exp(\alpha(x - \lambda t))$ , 这里  $A$  和  $B$  为任意的非零常数,  $\alpha, \lambda$  将会在下面的计算中被确定. 将解  $\varphi(x, t)$  代入平凡解下的广义色散 Camassa-Holm 模型的 Painlevé-Bäcklund 系统中, 得到关于  $\alpha, \lambda$  的常微分方程组. 通过求解方程得到  $\lambda, \alpha$ . 因此, 由在平凡解条件下的自动 Bäcklund 变换, 得到了非线性色散 Camassa-Holm 方程 (1) 丰富的规则和奇异的孤子. 令

$$H_1 = kf_4(t) + 6kf_5(t) - 3f_4(t),$$

有

$$u_1(x, t) = -k \left\{ \left[ \frac{3f_2(t)}{H_1} \right]^{1/4} + 1 \right\} \left\{ \frac{\left[ \frac{3f_2(t)}{H_1} \right]^{1/4} B}{A \exp \left\{ \left[ \frac{3f_2(t)}{H_1} \right]^{1/4} \left[ x - \frac{k\sqrt{H_1}}{\sqrt{3f_1(t)}\sqrt{f_2(t)}} t \right] \right\} + B} \right\}^2,$$

$$u_2(x, t) = k \left\{ \left[ \frac{3f_2(t)}{H_1} \right]^{1/4} - 1 \right\} \left\{ \frac{\left[ \frac{3f_2(t)}{H_1} \right]^{1/4} B \exp \left\{ \left[ \frac{3f_2(t)}{H_1} \right]^{1/4} \left[ x - \frac{k\sqrt{H_1}}{\sqrt{3f_1(t)}\sqrt{f_2(t)}} t \right] \right\}}{A + B \exp \left\{ \left[ \frac{3f_2(t)}{H_1} \right]^{1/4} \left[ x - \frac{k\sqrt{H_1}}{\sqrt{3f_1(t)}\sqrt{f_2(t)}} t \right] \right\}} \right\}^2.$$

为了寻找孤子结构的代数表达式,在平凡解条件下研究非线性色散方程(1),我们得到扭结孤子结构,

见图 1,这里  $A = 3, B = 2, f_1(t) = \frac{1}{2}, f_2(t) = \frac{4}{3}, f_4(t) = \frac{1}{2}, f_3(t) = \frac{1}{16}, k = 2.$

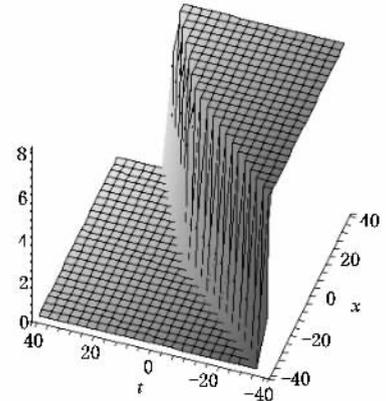


图 1 规则扭结孤子  $u_1(x, t)$

下面的孤子表达式包含复数域上的参数值,得到一类奇异扭结孤子结构,见图 2.

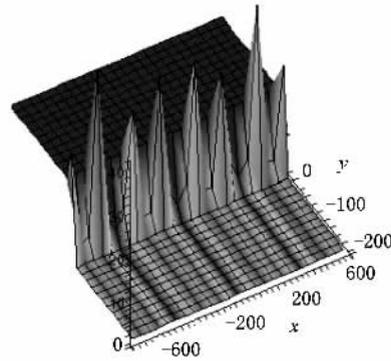
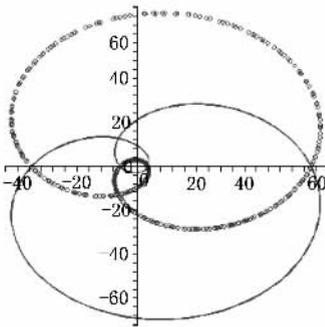


图 2 奇异的扭结孤子,在波峰具有一个周期尖点波,圆圈为  $u_3(x, 0)$ ,实圈为  $u_4(x, 0)$

$$u_3(x, t) = k \left\{ \left[ \frac{3f_2(t)}{H_1} \right]^{1/4} \right\} \left\{ \frac{\left[ 3f_2(t) \right]^{1/4} H_1}{A \exp \left\{ \left[ 3f_2(t) \right]^{1/2} i \left[ x - (k\sqrt{H_1} t) (\sqrt{3f_1(t)}\sqrt{f_2(t)}) \right] \right\} + B} \right\}^2,$$

$$u_4(x, t) = -k \left\{ \left[ 3f_2(t) \right]^{1/4} i - 1 \right\} \times \left\{ \frac{\left[ 3f_2(t) \right]^{1/4} B \exp \left\{ \left[ 3f_2(t) \right]^{1/4} i \left[ x - (k\sqrt{H_1} t) (\sqrt{3f_1(t)}\sqrt{f_2(t)}) \right] \right\}}{A + B \exp \left\{ \left[ 3f_2(t) \right]^{1/4} i \left[ x - (k\sqrt{H_1} t) (\sqrt{3f_1(t)}\sqrt{f_2(t)}) \right] \right\}} \right\}^2.$$

在平凡初值条件下,通过 Bäcklund 变换(4)式,当广义色散 Camassa-Holm 方程中的可变系数满足

条件  $k[6f_3(t) + 96f_5(t)] = 0$  时,得到了它的一个紧孤子结构.见图 3.

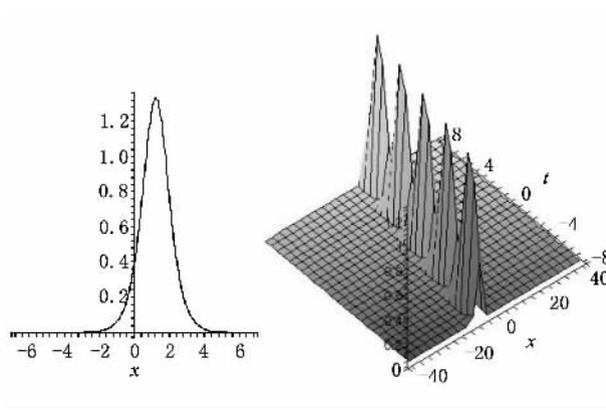


图 3 有限振幅的紧孤子

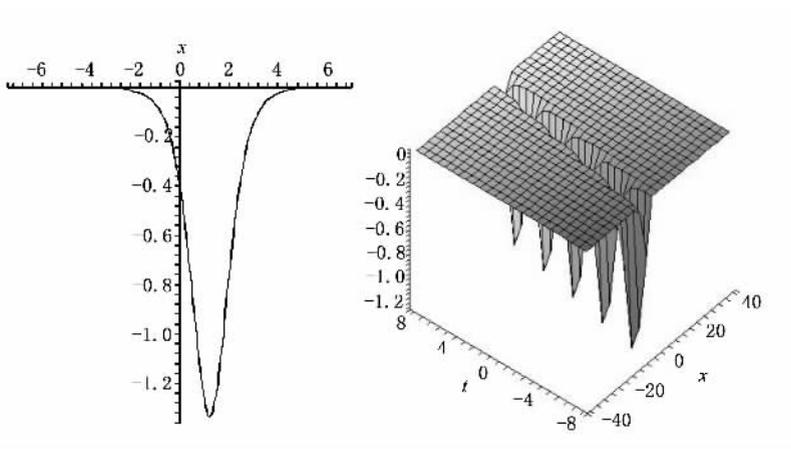


图 4 有限振幅的反紧孤子解

$$u_5(x, t) = -k \{ [59f_4(t)H_2]^{1/2} + 1 \} \left\{ \frac{[59f_4(t)H_2]^{1/2} B}{A \exp\{[59f_4(t)H_2]^{1/2} [x - kH_2 t/59f_1(t)f_4(t)]\} + B} \right\}^2,$$

$$u_6 = k \{ [59f_4(t)H_2]^{1/2} - 1 \} \times \left\{ \frac{[59f_4(t)H_2]^{1/2} B \exp\{[59f_4(t)H_2]^{1/2} [x - kH_2 t/59f_1(t)f_4(t)]\}}{A + B \exp\{[59f_4(t)H_2]^{1/2} [x - kH_2 t/59f_1(t)f_4(t)]\}} \right\}^2.$$

可得到一个反紧孤子, 见图 4, 令  $H_2 = 3f_3(t) + 24kf_3(t) + 40f_5(t) + 150kf_5(t)$ ,

$$u_7(x, t) = -k \{ [59f_4(t)H_2]^{1/2} + 1 \} \times \left\{ \frac{[59f_4(t)H_2]^{1/2} B}{A \exp\{[59f_4(t)H_2]^{1/2} [x - (kH_2 - 59kf_2(t)f_4(t)) \times (177f_1(t)f_4(t) - \sqrt{59H_2}f_1(t)\sqrt{f_4(t)})]\} + B} \right\}^2,$$

$$u_8(x, t) = k \{ [59f_4(t)H_2]^{1/2} - 1 \} \times \left\{ \frac{[59f_4(t)H_2]^{1/2} B \exp\{[59f_4(t)H_2]^{1/2} [x - (kH_2 - 59kf_2(t)f_4(t)) \times (177f_1(t)f_4(t) - \sqrt{59H_2}f_1(t)\sqrt{f_4(t)})]\}}{A \exp\{[59f_4(t)H_2]^{1/2} [x - (kH_2 - 59kf_2(t)f_4(t)) \times (177f_1(t)f_4(t) - \sqrt{59H_2}f_1(t)\sqrt{f_4(t)})]\} + B} \right\}^2.$$

### 2.3. 常数解条件下的孤子结构

本节重新设定 Bäcklund 变换的初始条件, 意识到常数也可以是模型 (1) 的一个解, 因此将广义色散 Camassa-Holm 模型的 Painlevé-Bäcklund 系统的解条件换成常数情况, 在这种情况下我们寻找更多的规则孤子. 令  $V(x, t) = c$ ,  $c$  代表任意常数. 将方程 (1) 的解代入广义色散 Camassa-Holm 模型的 Painlevé-

Bäcklund 系统中, 我们得到一个较简单的方程组. 与上面一样, 模型 (1) 的解可以拟设为形式  $A + B \exp \alpha \times (x - \lambda t)$ ,  $A$  和  $B$  是任意的常数, 在接下来的计算中我们决定参数  $\alpha, \lambda$ . 将这个解代入常数解广义色散 Camassa-Holm 模型的 Painlevé-Bäcklund 系统中, 可以得到关于  $\alpha, \lambda$  取值的系统. 此时参数的选择没有限制, 我们可得到精确的解析规则孤子解, 是扭结孤子:

$$u_9(x, t) = -k \left[ H_5 - (H_5^2 - H_6)^{1/2} \right]^{1/2} + 1 \left\{ \frac{[H_5 - (H_5^2 - H_6)^{1/2}]^{1/2} B}{A \exp \left[ \frac{[H_5 - (H_5^2 - H_6)^{1/2}]^{1/2}}{(x - \lambda t)} \right] + B} \right\}^2 + c,$$

$$u_{10}(x, t) = \left[ H_5 + (H_5^2 - H_6)^{1/2} \right]^{1/2} + 1 \left\{ \frac{[H_5 + (H_5^2 - H_6)^{1/2}]^{1/2} B}{A \exp \left[ \frac{[H_5 + (H_5^2 - H_6)^{1/2}]^{1/2}}{(x - \lambda t)} \right] + B} \right\}^2 + c.$$

在常数初始条件下的广义色散 Camassa-Holm 模型的扭结孤子, 此时变系数之间没有依赖关系, 其中

$$H_5 = \frac{33ckf_3(t) + 21kf_4(t) + 288ckf_5(t)}{4kf_3(t) + 9k^2f_3(t) + 60k^2f_5(t)},$$

$$H_6 = 8f_2(t) - 48c^2f_3(t) + 24ckf_3(t) + 128cf_4(t) + 40kf_4(t) - 768c^2f_5(t) + 48kf_5(t) + 336ckf_5(t).$$

### 3. 规则孤子结构

通过对广义 Camassa-Holm 模型 (5) 的分析, 我们在规则孤子基础上寻找奇异结构:

$$u_t + ku_x + f_1(t)u_{xx} + f_2(t)(u^2)_x + f_3(t)u_x(u^3)_{xx} + f_4(t)u(u^2)_{xxx} = 0. \quad (5)$$

首先我们来寻找模型 (5) 的规则孤子结构, 它的行波解由  $u(x, t) = u(\xi) = u(x - Dt)$  给出,  $D$  是波速, 因此将方程 (5) 简化成为如下常微分方程:

$$(k - D)u_\xi - Df_1(t)u_{\xi\xi\xi} + f_2(t)(u^2)_\xi + f_3(t)u_\xi(u^3)_{\xi\xi} + f_4(t)u(u^2)_{\xi\xi\xi} = 0. \quad (6)$$

接下来, 由上面得到的模型 (6) 的规则孤子解, 通过它的 Bäcklund 变换, 我们来求该模型的奇异孤子解, 将上一节中得到的解作为初始解. 为了计算上的简便, 我们令它们为函数  $V$ . 将孤波解代入到 Bäcklund 变换中得到一系列偏微分方程. 为方便省去该方程. 我们假设系统的解  $\varphi(x, t) = A + B \exp \alpha(x - \lambda t)$ , 其中  $A$  和  $B$  是任意常数, 通过分析可得到  $\alpha, \lambda$  的精确取值. 从而得到一类更为复杂的孤波, 令  $H_7 = -3f_2(t) + kf_2(t) + 48V^2f_4(t)$ , 有

$$u_{11}(x, t) = -k \left\{ \left[ \frac{12Vf_4(t) - \sqrt{3f_4(t)H_7}}{kf_4(t) - 3f_4(t)} \right]^{1/2} + 1 \right\} \left\{ \frac{\left[ \frac{12Vf_4(t) - \sqrt{3f_4(t)H_7}}{kf_4(t) - 3f_4(t)} \right]^{1/2} B}{A \exp \left\{ \left[ \frac{12Vf_4(t) - \sqrt{3f_4(t)H_7}}{kf_4(t) - 3f_4(t)} \right]^{1/2} (x - \lambda t) \right\} + B} \right\}^2 + V,$$

解见图 5 所示, 它们是奇异的周期爆破波. 在对称的结构中爆破现象和驼峰同时存在. 参数取  $k = 5$ ,  $f_1(t) = 1$ ,  $f_2(t) = 1$ ,  $f_3(t) = 4$ ,  $f_4(t) = 1$ ,  $A = 3$ ,  $B =$

2. 当参数取其他情况时, 同样的结构有不同的表达形式. 见图 6.

$$u_{12}(x, t) = k \left\{ \left[ \frac{12Vf_4(t) - \sqrt{3f_4(t)H_7}}{kf_4(t) - 3f_4(t)} \right]^{1/2} - 1 \right\} \left\{ \frac{\left[ \frac{12Vf_4(t) - \sqrt{3f_4(t)H_7}}{kf_4(t) - 3f_4(t)} \right]^{1/2} B \exp \left\{ \left[ \frac{12Vf_4(t) - \sqrt{3f_4(t)H_7}}{kf_4(t) - 3f_4(t)} \right]^{1/2} (x - \lambda t) \right\}}{A \exp \left\{ \left[ \frac{12Vf_4(t) - \sqrt{3f_4(t)H_7}}{kf_4(t) - 3f_4(t)} \right]^{1/2} (x - \lambda t) \right\}} \right\}^2 + V(x, t).$$

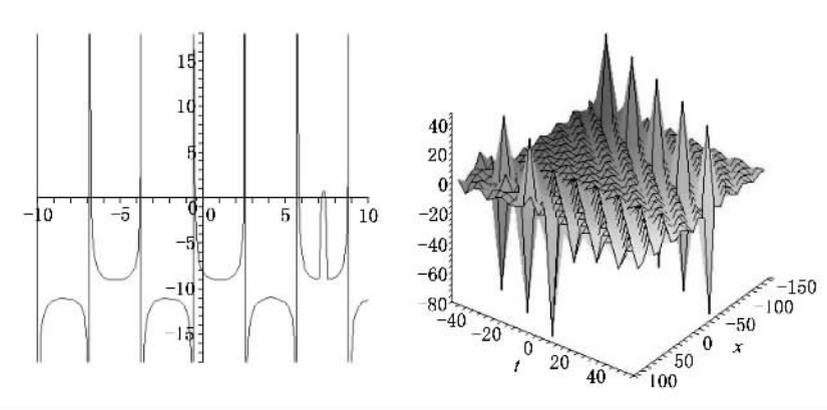


图 5 奇异的周期爆破波结构

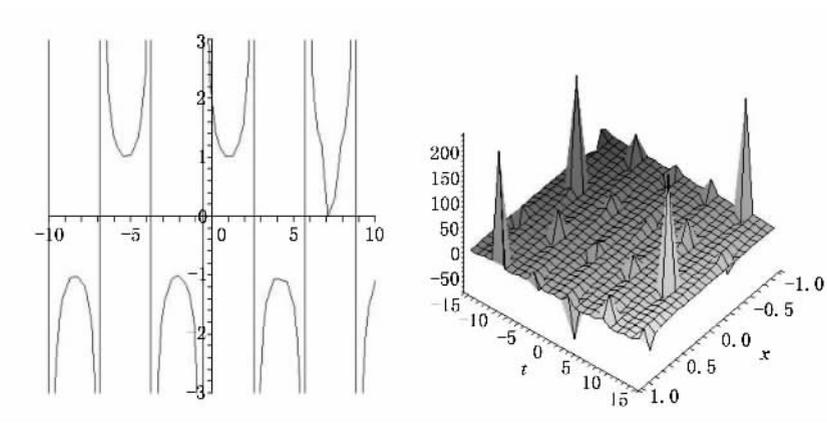


图 6 周期爆破波

当系数满足  $3kVf_3(t)=0$  时,得到下面的解:

$$u_{13}(x,t) = -k \left\{ \left[ \frac{12Vf_4(t) + \sqrt{3f_4(t)H_7}}{kf_4(t) - 3f_4(t)} \right]^{1/2} + 1 \right\} \left\{ \frac{\frac{12Vf_4(t) + \sqrt{3f_4(t)H_7}}{kf_4(t) - 3f_4(t)} B}{A \exp \frac{12Vf_4(t) + \sqrt{3f_4(t)H_7}}{kf_4(t) - 3f_4(t)} + B} \right\}^2 + V.$$

它是一个奇异的扭结波.见图 7.最后,我们得到了一个奇异的紧孤子结构,见图 8.

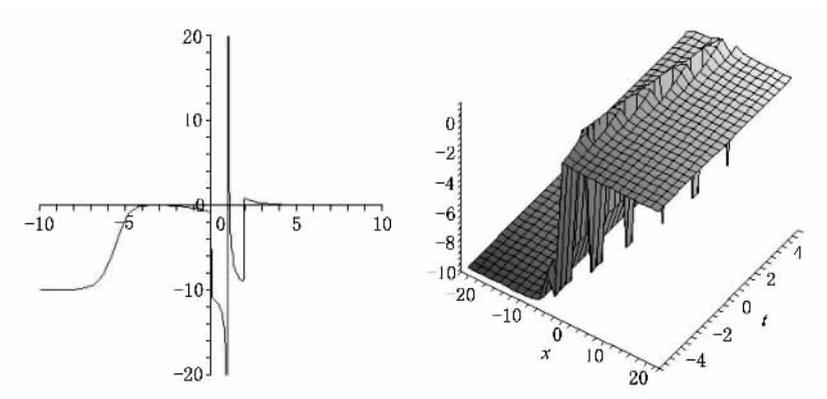


图 7 爆破现象的奇异扭结波

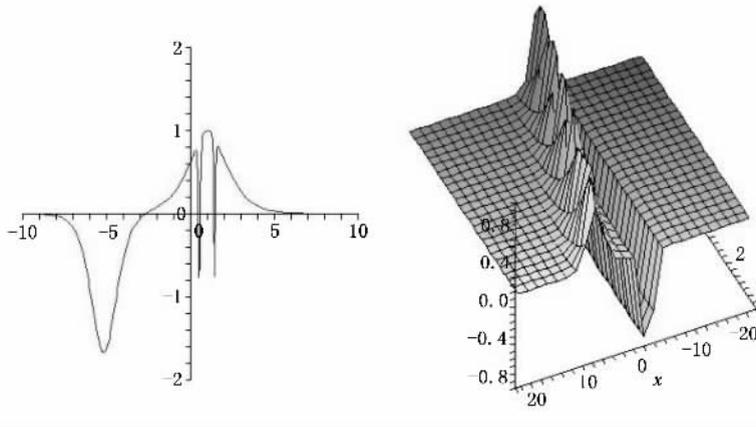


图 8 对称爆破波结构的奇异紧孤子

$$u_{1,4}(x, t) = k \left\{ \left[ \frac{12Vf_4(t) + \sqrt{3f_4(t)H_7}}{kf_4(t) - 3f_4(t)} \right]^{1/2} - 1 \right\} \\ \times \left\{ \frac{\left[ \frac{12Vf_4(t) + \sqrt{3f_4(t)H_7}}{kf_4(t) - 3f_4(t)} \right]^{1/2} B \exp \left\{ \left[ \frac{12Vf_4(t) + \sqrt{3f_4(t)H_7}}{kf_4(t) - 3f_4(t)} \right]^{1/2} (x - \lambda t) \right\}}{A + B \exp \left\{ \left[ \frac{12Vf_4(t) + \sqrt{3f_4(t)H_7}}{kf_4(t) - 3f_4(t)} \right]^{1/2} (x - \lambda t) \right\}} \right\}^2 + V(x, t).$$

- [ 1 ] Camassa R , Holm D 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 1661
- [ 2 ] Dullin H R , Gottwald G A , Holm D D 2003 *Fluid Dynamics Research* **33** 73
- [ 3 ] Dullin H R , Gottwald G A , Holm D D 2004 *Physica D* **190** 1
- [ 4 ] Tian L X , Gui G L , Liu Y 2005 *Comm. Math. Phys.* **257** 667
- [ 5 ] Ding D P , Tian L X 2006 *Comm Pure and Applied Analysis* **5** 483
- [ 6 ] Tian L X , Yin J L 2004 *Chaos , Solitons and Fractals* **20** 289
- [ 7 ] Yin J L , Tian L X 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2821 ( in Chinese ) [ 殷久利、田立新 2004 物理学报 **53** 2821 ]
- [ 8 ] Tian L X , Song X Y 2004 *Chaos , Solitons and Fractals* **19** 621
- [ 9 ] Sevdzhan Hakkaev , Kiril Kirchev 2006 *Inter. Journal of Nonlinear Science* **1** 139
- [ 10 ] Tian L X , Fang G , Gui G 2006 *Inter. Journal of Nonlinear Science* **1** 3
- [ 11 ] Ruan H Y , Li H J 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 996 ( in Chinese ) [ 阮航宇、李慧军 2005 物理学报 **54** 996 ]
- [ 12 ] Zhi H Y , Wang Q , Zhang H Q 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1002 ( in Chinese ) [ 智红燕、王 琪、张鸿庆 2005 物理学报 **54** 1002 ]
- [ 13 ] Yan Z Y 2000 *Commun. Nonlinear. Sci. Numer. Simul.* **5** 31
- [ 14 ] Afrouzi G A , Khademloo S 2006 *Inter. Journal of Nonlinear Science* **2** 11
- [ 15 ] Fan E G 2000 *Phys. Lett. A* **265** 353
- [ 16 ] Hong W P 2000 *Phys. Lett. A* **268** 81
- [ 17 ] Fan E G 1998 *Phys. Lett. A* **246** 403
- [ 18 ] Lu D C , Hong B J , Tian L X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5617 ( in Chinese ) [ 卢殿臣、洪宝剑、田立新 2006 物理学报 **55** 5617 ]
- [ 19 ] Zeng X , Zhang H Q 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1476 ( in Chinese ) [ 曾 昕、张鸿庆 2005 物理学报 **54** 1476 ]
- [ 20 ] Tian L X , Li X M 2006 *Inter. Journal of Nonlinear Science* **2** 67
- [ 21 ] Afrouzi G A , Khademloo S 2006 *Inter. Journal of Nonlinear Science* **2** 11

# Singular solitons of generalized Camassa-Holm models<sup>\*</sup>

Sun Lu Tian Li-Xin

( *Nonlinear Scientific Research Center , Faculty of Science , Jiangsu University , Zhenjiang 212013 , China* )

( Received 7 December 2005 ; revised manuscript received 13 November 2006 )

## Abstract

In this paper we introduce one type of generalized dispersive Camassa-Holm model and make its singularity analysis. We prove that the model is Painlevé integrable by an alternative WTC-Kruskal test and obtain the Painlevé-Bäcklund systems and the Bäcklund transformation. Many new types of regular soliton , singular soliton , kink soliton , compacton and anti-compacton are explored. Particularly , we have found singular structures of periodic cuspon waves in kink solitons , which occur in their central regions. Based on the regular solitonic system , we do Bäcklund transformation and obtain three sorts of singular solitons , namely the periodic blow-up wave with hump structure , kink soliton for the blow-up wave structure and the compacton .

**Keywords** : generalized Camassa-Holm model , periodic cuspon wave , compacton , periodic blow-up wave

**PACC** : 0290 , 0340K

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 10071033 ) and the Natural Science Foundation of Jiangsu Province , China ( Grant No. BK2002003 ).