第 56 卷 第 7 期 2007 年 7 月
1000-3290/2007/56(07)/3675-03

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.56,No.7,July,2007

一类非完整系统运动微分方程的 Lie 对称性与 Hojman 型守恒量*

胡楚勒†

(呼伦贝尔学院物理系,海拉尔 021008)

(2006 年 11 月 20 日收到;2006 年 12 月 11 日收到修改稿)

研究一类非完整系统运动方程的 Lie 对称性与 Hojman 型守恒量.给出系统 Lie 对称性的确定方程和限制方程,存在守恒量的条件以及守恒量的形式.举例说明结果的应用.

关键词:分析力学,非完整系统,对称性,Hojman 型守恒量

PACC:0320

1. 引 言

非完整系统的运动微分方程已有一整套,如文献[1—3].1973 年 Djukić 给出第二类 Lagrange 方程的推广形式[4],这类方程适合任意阶非完整系统,并且用它们具体到写方程时有运算简单的特点.文献[5]研究了这套方程的场积分方法.利用 Lie 对称性可直接找到 Hojman 型守恒量[6—12].本文研究文献[4]中给出的非完整系统运动微分方程的 Lie 对称性以及由 Lie 对称性直接导出的 Hojman 型守恒量.

2. 一类非完整系统运动微分方程

设力学系统的位形由 n 个广义坐标 q_s ($s=1,\cdots,n$),来确定,其运动受有 g 个 $(k+1)$ 阶非完整约束

$$
\begin{aligned}
q_{\varepsilon+\beta}^{(k+1)} &= F_{\beta\sigma}(t,q_s,\dot{q}_s,\cdots,q_s^{(k)})\,q_\sigma^{(k+1)} \\
&\quad + F_\beta(t,q_s,\dot{q}_s,\cdots,q_s^{(k)}), \\
&\quad (s=1,\cdots,n;\beta=1,\cdots,g;\sigma=1,\cdots,\varepsilon; \\
&\quad \varepsilon=n-g;k=0,1,\cdots).
\end{aligned}
\tag{1}
$$

对于力是保守的情形,运动方程有形式[4,5]

$$
(k+2)\frac{\partial L_*^{(k+2)}}{\partial q_\sigma^{(k+2)}}-(k+3)\frac{\partial L_*^{(k+1)}}{\partial q_\sigma^{(k+1)}}=0, \tag{2}
$$

其中 $L=L(t,q_s,\dot{q}_s)$ 为系统的 Lagrange 函数,$L_*^{(k+1)}$ 是 $L^{(k+1)}$ 中将(1)式代入后的结果,$L_*^{(k+2)}$ 是 $L^{(k+2)}$ 中用(1)式消去 $q_{\varepsilon+\beta}^{(k+2)}$ 的结果.值得注意的是,$L^{(k+1)}$ 中包含的 $q_s^{(k+2)}$ 不用约束(1)变换,而 $L^{(k+1)}$ 中包含的 $q_s^{(k+3)}$ 也不用约束(1)变换.

当 $k=0$ 时,即为一阶非完整系统运动微分方程,此时方程(1),(2)有形式

$$
\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=F_{\beta\sigma}(t,q_s)\dot{q}_\sigma+F_\beta(t,q_s), \tag{3}
$$

$$
2\frac{\partial \ddot{L}_*}{\partial \ddot{q}_\sigma}-3\frac{\partial \dot{L}_*}{\partial \dot{q}_\sigma}=0,(\sigma=1,\cdots,\varepsilon). \tag{4}
$$

方程(4)需与约束方程(3)一起求解.

3. Lie 对称性与 Hojman 型守恒量

下面研究非完整系统(3),(4)的 Lie 对称性与 Hojman 型守恒量.

展开方程(4),得

$$
\ddot{q}_\sigma=f_\sigma(t,q_s,\dot{q}_s),(\sigma=1,\cdots,\varepsilon). \tag{5}
$$

将约束方程(3)对 t 求导数,得

$$
\ddot{q}_{\varepsilon+\beta}=F_{\beta\sigma}\ddot{q}_\sigma+\dot{F}_{\beta\sigma}\dot{q}_\sigma+\dot{F}_\beta,(\beta=1,\cdots,g). \tag{6}
$$

联合方程(5),(6),解得所有广义加速度,记作

$$
\ddot{q}_s=\alpha_s(t,q,\dot{q}_s),(s=1,\cdots,n). \tag{7}
$$

取时间不变的特殊无限小变换

$$
t^*=t,\ q_s^*(t^*)=q_s(t)+\varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}), \tag{8}
$$

---

* 国家自然科学基金(批准号:10572021)资助的课题.

† E-mail:huchule@sina.com.cn

其中 ε 为一无限小参数,在无限小变换(8)下,方程(7)的 Lie 对称性确定方程为

$$\frac{\bar{d}}{dt}\frac{\bar{d}}{dt}\xi_s = \frac{\partial \alpha_s}{\partial q_k}\xi_k + \frac{\partial \alpha_s}{\partial \dot{q}_k}\frac{\bar{d}}{dt}\xi_k, \quad (s,k = 1,\cdots,n), \tag{9}$$

其中

$$\frac{\bar{d}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}_s\frac{\partial}{\partial q_s} + \alpha_s\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}. \tag{10}$$

根据 Hojman 的结果[6,9],有

如果存在某函数 $\mu = \mu(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 满足

$$\frac{\partial \alpha_s}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\bar{d}}{dt}\ln\mu = 0, \tag{11}$$

则相应完整系统(7)有如下 Hojman 型守恒量:

$$I_H = \frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial q_s}(\mu\xi_s) + \frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\left(\mu\frac{\bar{d}}{dt}\xi_s\right) = \text{const}. \tag{12}$$

对非完整系统,尚须施加约束对生成元 ξ_s 的限制,有

$$\frac{\bar{d}}{dt}\xi_{\varepsilon+\beta} = \frac{\partial F_{\beta\sigma}}{\partial q_k}\xi_k\dot{q}_\sigma + F_{\beta\sigma}\frac{\bar{d}}{dt}\xi_\sigma + \frac{\partial F_\beta}{\partial q_k}\xi_k, \tag{13}$$

方程(13)称为限制方程.

4. 算　例

下面举例说明上述结果的应用.

一质量为 m 的质点在平面上运动,受有一阶线性非完整约束

$$\dot{q}_2 = t\dot{q}_1, \tag{14}$$

系统的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2). \tag{15}$$

首先建立方程(7). 我们有

$$\dot{L} = m(\dot{q}_1\ddot{q}_1 + \dot{q}_2\ddot{q}_2),$$

$$\dot{L}_* = m(\dot{q}_1\ddot{q}_1 + t\dot{q}_1\ddot{q}_2),$$

$$\ddot{L} = m(\ddot{q}_1^2 + \ddot{q}_2^2 + \dot{q}_1\dddot{q}_1 + \dot{q}_2\dddot{q}_2),$$

$$\ddot{L}_* = m\{\ddot{q}_1^2 + (\dot{q}_1 + t\ddot{q}_1)^2 + \dot{q}_1\dddot{q}_1 + \dot{q}_2\dddot{q}_2\}.$$

方程(4)给出

$$2m\{\ddot{q}_1 + 2t(\dot{q}_1 + t\ddot{q}_1)\} - 3m(\ddot{q}_1 + t\ddot{q}_2) = 0. \tag{16}$$

将(14)式对 t 求导数得

$$\ddot{q}_2 = \dot{q}_1 + t\ddot{q}_1. \tag{17}$$

联合(15),(16)式,求得 $\ddot{q}_1, \ddot{q}_2$,有

$$\ddot{q}_1 = -\frac{t}{1+t^2}\dot{q}_1, \quad \ddot{q}_2 = \frac{1}{1+t^2}\dot{q}_1. \tag{18}$$

其次,研究方程(17)的 Lie 对称性. 确定方程(9)给出

$$\frac{\bar{d}}{dt}\frac{\bar{d}}{dt}\xi_1 = -\frac{t}{1+t^2}\frac{\bar{d}}{dt}\xi_1, \quad \frac{\bar{d}}{dt}\frac{\bar{d}}{dt}\xi_2 = \frac{1}{1+t^2}\frac{\bar{d}}{dt}\xi_1. \tag{19}$$

(11)式给出

$$-\frac{t}{1+t^2} + \frac{\bar{d}}{dt}\ln\mu = 0. \tag{20}$$

限制方程(13)给出

$$\frac{\bar{d}}{dt}\xi_2 = t\frac{\bar{d}}{dt}\xi_1. \tag{21}$$

最后,求 Hojman 型守恒量. (20)式有解

$$\mu = (1+t^2)^{1/2}, \tag{22}$$

$$\mu = (1+t^2)^{1/2} \times \{q_2 + [(1+t^2)^{1/2} - 1]\dot{q}_1 - t\dot{q}_2\}. \tag{23}$$

方程(19),(21)有如下解:

$$\xi_1 = \xi_2 = 1. \tag{24}$$

将(23),(24)式代入(12)式,得非完整系统的守恒量

$$I_H = \{q_2 + [(1+t^2)^{1/2} - 1]\dot{q}_1 - t\dot{q}_2\}^{-1} = \text{const}. \tag{25}$$

守恒量(25)式联合约束方程(14),便可找到问题的解. 文献[5]用场方法得到了(25)式.

5. 结　论

本文研究了一类非完整系统(3),(4)的 Lie 对称性与 Hojman 型守恒量. 主要步骤是首先由方程(9),(13)求得生成元 ξ_s,其次由(11)式找到适当的函数 μ. 最后由(12)式找到非完整系统的守恒量. 如果生成元 ξ_s 仅满足方程(9)但不满足限制方程(13),则找到的(12)式是相应完整系统(7)的守恒量.

[1] Mei F X，Liu D，Luo Y 1991 *Advanced Analytical Mechanics* (Beijing：Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔、刘　端、罗　勇 1991 高等分析力学(北京 :北京理工大学出版社)]

[2] Papastavridis J 1998 *Appl*. *Mech*. *Rev*. **51** 239

[3] Zegzhda S A，Soltakhanov Sh Kh，Yushkov M P 2005 *Equations of Motion of Nonholonomic Systems and Variational Principles of Mechanics*. *New Class of Control Problems* (in Russian) (Moscow：FIZMATLIT)

[4] Djukić Dj S 1973 *Appl*. *Math*. *Mech*. **37** 156 (in Russian)

[5] Kovacic I 2005 *Acta Mech*. *Sin*. **21** 192

[6] Hojman S A 1992 *J*. *Phys*. *A*：*Math*. *Gen*. **25** L291

[7] Zhang Y 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 1832 (in Chinese) [张　毅 2003 物理学报 **52** 1832]

[8] Luo S K，Mei F X 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 666 (in Chinsese) [罗绍凯、梅凤翔 2004 物理学报 **53** 666]

[9] Mei F X 2004 *Symmetries and Conserved Quantities of Constrained Mechanical Systems* (Beijing：Beijing Institute of Technology Press (in Chinese) [梅凤翔 2004 约束力学系统的对称性与守恒量(北京：北京理工大学出版社)]

[10] Xu X J，Mei F X，Qin M C 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 1009 (in Chinese) [许学军、梅凤翔、秦茂昌 2005 物理学报 **54** 1009]

[11] Luo S K，Guo Y X，Mei F X 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 1271 (in Chinese) [罗绍凯、郭永新、梅凤翔 2004 物理学报 **53** 1271]

[12] Luo S K，Guo Y X，Mei F X 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 2413 (in Chinese) [罗绍凯、郭永新、梅凤翔 2004 物理学报 **53** 2413]

Lie symmetries and Hojman conserved quantities of one kind of differential equations of motion of nonholonomic systems*

Hu Chu-Le†

(*Department of Physics*，*Hulun Buir College*，*Hailaer*　021008，*China*)

(Received 20 November 2006；revised manuscript received 11 December 2006)

Abstract

The Lie symmetries and Hojman conserved quantities of one kind of differential equations of motion of nonholonomic systems are studied. The determining equations and the restriction equations of Lie symmetries of the system are obtained. The condition under which a conserved quantity exists is established and the form of the conserved quantity is given. An example is given to illustrate the application of the result.

Keywords：analytical mechanics，nonholonomic system，symmetry，Hojman conserved quantity

PACC：0320

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No.10572021).

† E-mail：huchule@sina.com.cn