

周期驱动的 Harper 模型的量子计算 鲁棒性与量子混沌

叶 宾[†] 谷瑞军 须文波

(江南大学信息工程学院, 无锡 214122)

(2007 年 1 月 4 日收到, 2007 年 1 月 19 日收到修改稿)

以周期驱动的量子 Harper (quantum kicked Harper, QKH) 模型为例, 研究复杂量子动力系统的量子计算在各种干扰下的稳定性. 通过对 Floquet 算子本征态的统计遍历性及其 Husimi 函数的分析, 比较随机噪声干扰和静态干扰对量子计算不同程度的影响. 进一步的保真度摄动分析表明, 在随机噪声干扰下保真度随系统演化呈指数衰减, 而静态干扰下的保真度为高斯衰减, 并通过数值计算得到了干扰下的可信计算时间尺度. 与经典混沌仿真中误差使状态产生指数分离不同, 量子计算对状态干扰的稳定性和仿真模型的动力学特性无关.

关键词: 量子 Harper 模型, 量子计算, 量子混沌, 保真度

PACC: 0367, 0545

1. 引 言

物理学家 Feynman 在用经典计算机模拟量子力学系统时提出了量子计算和量子计算机的概念^[1]. 量子计算机利用量子态的相干叠加性实现并行的量子计算, 从而达到经典计算机无法比拟的运算速度和信息处理功能^[2,3]. 一个量子计算机可以看做是由 n_q 个双能级的量子比特组成的量子系统(量子寄存器), 其状态对应维数为 $N = 2^{n_q}$ 的 Hilbert 空间中的单位向量. Hilbert 空间中的任意酉变换都可以用一组基本的量子门以任意精度逼近^[4]. 量子算法即是按照特定量子逻辑构成的基本酉运算序列. 在量子算法中, 影响较为广泛的是 Shor 大数质因子分解算法^[5]和 Grover 随机数据库搜索算法^[6]. 经典的大数分解算法对问题规模呈指数增长, 而用 n_q 个量子比特实现 Shor 分解算法只需要 $O(n_q^3)$ 次基本酉运算. Grover 量子搜索算法虽然没有获得指数加速, 但它把搜索过程从经典的 N 步缩小到 \sqrt{N} 步. 量子计算机的物理实现也取得了很大进步, 提出了一些完整的量子计算机物理实现模型, 例如谐振子量子计算机、光子量子计算机、离子阱量子计算机等^[2,7]. 实验上, Grover 量子搜索算法已经在腔量子电动力学系

统和离子阱系统中得到实现^[8,9].

正如 Feynman 所设想的那样, 量子计算机的一个重要的用途就是用来研究量子动力系统. 随着量子系统中粒子数目的增加, 相应的 Hilbert 空间维数呈指数规律增长. 因此复杂的多粒子量子系统无法在经典计算机上进行有效模拟. 近年来, 作为 Shor 分解算法重要组成部分的量子傅里叶变换(QFT)在量子仿真中得到了广泛应用, 出现了一些能够有效模拟复杂量子动力系统的量子仿真算法. 诸如量子面包师变换(quantum baker's map)^[10], 周期驱动的量子转子(quantum kicked rotator)^[11,12], QKH 模型^[13]等量子动力系统都可使用量子计算机进行有效模拟. 其中, 量子面包师变换也已经在三个量子比特的核磁共振(NMR)量子计算机上成功实现^[14]. 和经典仿真算法相比, 量子仿真算法大多都能获得指数加速.

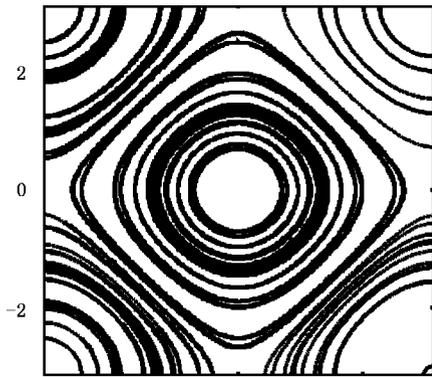
实现量子计算的一个很大的障碍在于如何有效的把量子计算机和外界环境隔离, 避免与外界耦合引起退相干. 即使能够与外界完全隔离, 量子比特能级间隔的波动和量子比特之间的近距离静态相互作用等仍然会在量子计算机内部产生不可避免的静态干扰. 因此研究量子计算的鲁棒性将非常有助于设计高可靠性的量子计算机. Georgeot 和 Shepelyansky 对静态量子计算模型的研究发现在静态干扰强度大

[†] E-mail: yebinxie@yahoo.com.cn

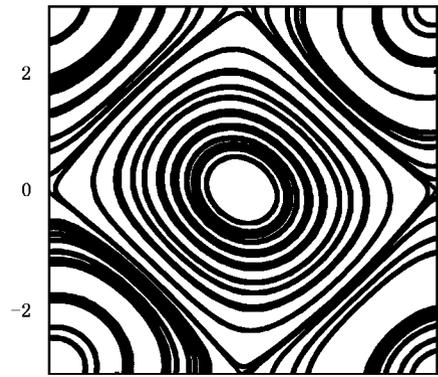
于某一阈值时,量子计算机产生量子混沌行为,破坏量子寄存器状态,导致计算结果失效^[15]. Braum 等分析了静态干扰对 Grover 量子搜索算法和 QFT 的影响^[16]. Shapira 等分析了噪声干扰对 Grover 量子搜索算法的影响^[17]. Shepelyansky 等使用量子仿真算法分析了周期驱动的量子转子和 Harper 模型的一些特征物理量对静态干扰的敏感性^[12,13]. 本文以 QKH 的量子仿真算法为例,研究静态干扰、随机噪声干扰对动态量子计算模型不同程度的影响. 通过对系统状态的保真度计算,比较不同干扰类型时的可信计算时间尺度. 在经典混沌理论中,系统状态对误差具有指数不稳定性(由 Lyapunov 指数描述),由此造成经典仿真是不可逆的. 通过比较静态干扰以及 QKH 模型参数扰动(经典干扰)时的 Husimi 分布,我们将考查 QKH 量子仿真是否具有同样的不可逆性.

2. QKH 模型及其经典特性

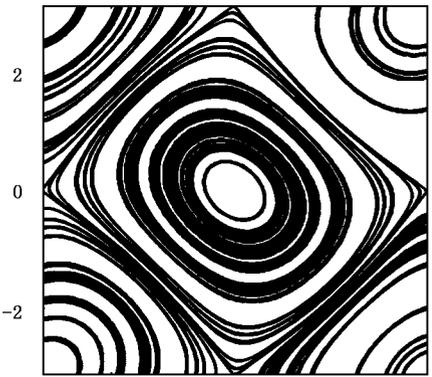
经典的周期驱动 Harper 模型的哈密顿函数为



$K=L=0.01$



$K=L=0.4$



$K=L=0.6$



$K=L=3.0$

图 1 Harper 映射(2)在不同参数下的 (θ, p) 相平面结构(100 个初始相点各迭代 2000 次)

$$H(p, \theta, t) = L \cos(p) + K \cos(\theta) \sum_m \delta(t - m) \quad (1)$$

它描述二维晶格内电子在垂直于电磁场方向的运动,式中的 p, θ 是一对正则共轭变量, $\delta(t)$ 是 δ 函数, m 取任一整数. 系统在一个驱动周期内演化的不连续映射方程为

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n + K \sin(\theta_n), \\ \theta_{n+1} &= \theta_n - L \sin(p_{n+1}). \end{aligned} \quad (2)$$

周期驱动的 Harper 映射形式很简单,但在相空间中显示出复杂的动力学行为. 图 1 示出模型参数 $K = L$ 取不同值时映射(2)的相图. 当 $K = L \rightarrow 0$ 时,系统是经典可积的,随着 $K = L$ 的增大,相空间中出现混沌, KAM 环面被不断破坏,规则运动和混沌运动同时存在;当 $K = L > 0.63$ 时,出现大范围混沌运动.

周期驱动的 Harper 模型(1)经过量子化得到如下的 QKH 模型:

$$\begin{aligned} |\psi_{n+1}\rangle &= \hat{F} |\psi_n\rangle \\ &= e^{-iL \cos(\hat{p}) \gamma_h} e^{-iK \cos(\hat{\theta}) \gamma_h} |\psi_n\rangle, \end{aligned} \quad (3)$$

式中 $\hat{p} = -i\partial/\partial\theta$, \hat{F} 为单周期演化算符(Floquet 算

子).当 $\hbar \rightarrow 0$, L 和 K 取常数时,得到 Floquet 算子的半经典极限. QKH 已经成为量子混沌研究中的一个范例,对其量子特性有了深入了解. QKH 模型和其他周期驱动的一维动力学模型(例如量子转子模型等)相比有一些特殊的量子特性,例如 QKH 的反常扩散现象和特殊的随机网结构等^[18].

3. QKH 的量子仿真算法

周期驱动量子系统的经典仿真通常采用快速傅里叶变换(FFT)的方法.对这类周期驱动的量子系统进行量子仿真基于量子傅里叶变换,其方法是通过在 p 表象和 θ 表象之间进行 QFT 及其逆变换把 Floquet 算子 \hat{F} 的两个因子 $\hat{U}_p = e^{-iL\cos(\hat{p})/\hbar}$ 和 $\hat{U}_\theta = e^{-iK\cos(\hat{\theta})/\hbar}$ 在各自表象下分别简化为对角阵,然后用单比特和双比特量子门实现 QFT 和这两个对角阵^[11]. QKH 的量子仿真算法相对较为复杂,需要附加量子寄存器或者采用多项式逼近的方法实现余弦函数.我们采用短时间片分解逼近算法^[13],它只需附加一位量子比特,考虑到当前量子计算的物理实现问题,这种方法无疑具有更大的可行性. QKH 仿真算法步骤概述如下:

1) 令 \hat{p} 的每一个本征态 $|p_j\rangle$, $j = 0, \dots, N-1$, 与一个 n_q 位的量子寄存器基态一一对应,即 \hat{p} 的本征值 $p = \sum_{i=0}^{n_q-1} \lambda_i 2^i$, 其中 $\lambda_i = 0, 1$. 波函数 $|\psi\rangle$ 在 p 表象下表示为 $|\psi\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} a_j |p_j\rangle$, 其中 a_j 满足概率之和为 1 的归一化条件 $\sum_j |a_j|^2 = 1$.

2) 使用 QFT 把 $|\psi\rangle$ 从 p 表象转化为 θ 表象表示. QFT 酉演化算符可以写成

$$U_{\text{QFT}} = R \prod_{i=0}^{n_q-1} \{H_i \prod_{l=i+1}^{n_q-1} B_{il}^{c}(\varphi)\},$$

式中 R 表示逆转量子比特顺序的酉运算, H_i , $B_{il}^{c}(\varphi)$ 分别表示 Hadamard 门和受控相移门

$$H_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$B_{il}^{c}(\varphi) = \text{diag}\{1, 1, \dots, \exp(i\varphi_{il})\},$$

$$\varphi_{il} = \frac{\pi}{2^{l-i}}.$$

3) 在 θ 表象下 \hat{U}_θ 为对角阵,其作用结果相当于对每一个 $|\theta_j\rangle$ 的概率幅做相移 $e^{-iK\cos(\theta)/\hbar}$. 在短时间片分解逼近算法中,对一般形式的 $e^{-iT\cos(\hat{m})/\hbar}$, 将其分解为 n_s 个门序列 $M(k, U)$ 的乘积. 每一个门序

列为

$$M(k, U) = HC_U H e^{i k/2 \hat{\sigma}_z} H C_U^{-2} \\ \times H e^{i k/2 \hat{\sigma}_z} H C_U H,$$

式中 $\hat{\sigma}_z$ 表示 Pauli-Z 门,它和 Hadamard 门一起作用在初态为 $|0\rangle$ 的附加量子比特上. C_U 表示受控 U 运算,它作用在 $|\psi\rangle$ 上. 若取 $U = e^{im\hat{\theta}}$, 则 $M(k, U)$ 近似为

$$M(k, U) = I + ik \frac{U + U^{-1}}{2} \hat{\sigma}_z + \alpha(k^2) \\ = I + ik \cos(m\theta) \hat{\sigma}_z + \alpha(k^2) \\ \approx e^{ik \cos(m\hat{\theta})}. \quad (4)$$

令 $k = \frac{-T}{n_s}$, 则

$$e^{-iT \cos(m\hat{\theta})/\hbar} \approx M^{n_s}(k, U).$$

因此当 $m=1$, $T=K/\hbar$ 时, \hat{U}_θ 可用 n_s 个 $M(k, U)$ 近似. 实现这个对角阵一共需要 $n_q^2 + (4n_q + 18)n_s + 6n_q$ 个基本量子门.

4) 使用 QFT 逆变换转化为最初的 p 表象.

5) 重复步骤 3) 实现 \hat{U}_p .

对 QKH 模型的动态局域化长度和能谱的仿真结果表明特征量随着 n_s 增加表现出很好的收敛性^[13]. 经过一系列数值实验,我们选取 $n_s = 300$.

对该量子算法我们首先考虑两种干扰:随机噪声干扰和静态干扰. 在随机噪声干扰模型中, Hadamard 门由 $\mathbf{n} \cdot \hat{\sigma}$ 模拟,其中 $\hat{\sigma}_{(x,y,z)}$ 表示 Pauli 量子门, \mathbf{n} 是一个与向量 $\mathbf{n}_0 = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$ 非常接近的随机单位向量, $|\mathbf{n} - \mathbf{n}_0| \leq \epsilon$. 对所有的相移门(包括受控相移门),用相位 $\varphi + \delta\varphi$ 代替理想相位 φ , 其中随机的小相位扰动 $\delta\varphi \in [-\epsilon, \epsilon]$. 量子计算的静态干扰没有经典对应,它被模拟为在任意两个量子门之间附加一个酉算符 $U_s = e^{iH_s}$, 其哈密顿量为^[15]

$$H_s = \sum_i \delta_i \hat{\sigma}_z^{(i)} + \sum_{i < l} J_{il} \hat{\sigma}_x^{(i)} \hat{\sigma}_x^{(l)}, \quad (5)$$

式中 $\hat{\sigma}^{(i)}$ 表示作用在第 i 个量子比特上的 $\hat{\sigma}$ 运算, δ_i 和 J_{il} 是初始值均匀分布在 $[-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}]$ 和 $[-J, J]$ 内的随机数,仿真过程中保持不变. 为了同随机噪声干扰相比较,我们取 $\frac{\delta}{2} = J = \epsilon$.

4. 静态干扰与量子混沌

在量子混沌研究中,能谱统计和本征函数的统

计分析是了解系统动力特性的重要工具. 一般而言, 经典可积的量子系统的能谱统计表现出与随机数分布相同的性质, 而经典对应为混沌的量子系统能谱统计与随机厄密矩阵的本征值统计特性相同, 而且几乎所有其本征函数在经典极限下都均匀分布在经典相空间内^[19, 20]. 对 QKH 模型, 它的 Floquet 算子准能量 ϕ_α 以及对应本征态 $|\phi_\alpha\rangle$,

$$\hat{F}|\phi_\alpha\rangle = e^{i\phi_\alpha}|\phi_\alpha\rangle$$

体现了系统的全部动力学特征. 我们创建 Floquet 矩阵的方法基于上节介绍的 QKH 量子仿真算法和如下事实: 量子寄存器每一个基态经过一次演化将给出 Floquet 矩阵的一个对应列. 作为量子混沌系统能谱统计的一个特例, 我们将首先通过最近邻能级间隔分布函数表明 QKH 模型的准能量统计性质不能反映其动力学性质. 然后通过准能量本征态的遍历性及 Husimi 分布分析干扰对量子计算的影响.

在研究量子混沌系统时通常使用准能量的最近邻能级间隔 s 的统计分布函数 $P(s)$ 描述能谱的统计特性. 具体而言, 经典可积量子系统 $P(s)$ 函数服从泊松 (Poisson) 分布

$$P(s) = e^{-s}. \quad (6)$$

具有某种对称性 (例如时间反演对称) 的量子系统与高斯正交系综 (Gaussian orthogonal ensemble, GOE) 特

征值的 $P(s)$ 函数是如下形式的 Wigner 函数:

$$P(s) = \frac{\pi}{2} s e^{-\frac{\pi}{4}s^2}, \quad (7)$$

并且表现出线性的能级排斥现象. 而没有时间反演对称性的量子系统 $P(s)$ 分布函数具有二次的能级排斥现象, 其 Wigner 分布是

$$P(s) = \frac{32}{\pi^2} s^2 e^{-\frac{4}{\pi}s^2}, \quad (8)$$

并且与高斯酉系综 (Gaussian unitary ensemble, GUE) 的特征值 $P(s)$ 分布相同^[19].

为了计算 QKH 模型的 Floquet 算子准能量分布, 首先将其所有准能量展平化 (unfolding). 为了避免 QKH 模型的奇偶对称性造成 $P(s)$ 在 s 较小时形成尖峰, 必须将准能量按照奇偶性分成两部分处理^[21]. 分别计算两部分的准能量间隔后, 将其合并为一个序列, 并进行归一化, 使平均间隔为 1. 结果表明未扰 QKH 模型的 $P(s)$ 分布曲线与 RMT 理论不一致甚至完全相反 (图 2), 例如在 $K=L=3$ 时, $P(s)$ 分布不是理论预言的 Wigner 分布, 而是更加接近于 Poisson 分布. 进一步的分析表明, QKH 模型的准能量统计特性是由其经典可积模型决定的^[22]. 因此 QKH 的准能量统计不能反映其动力学特性, 我们只能通过本征态的统计特性进行分析.

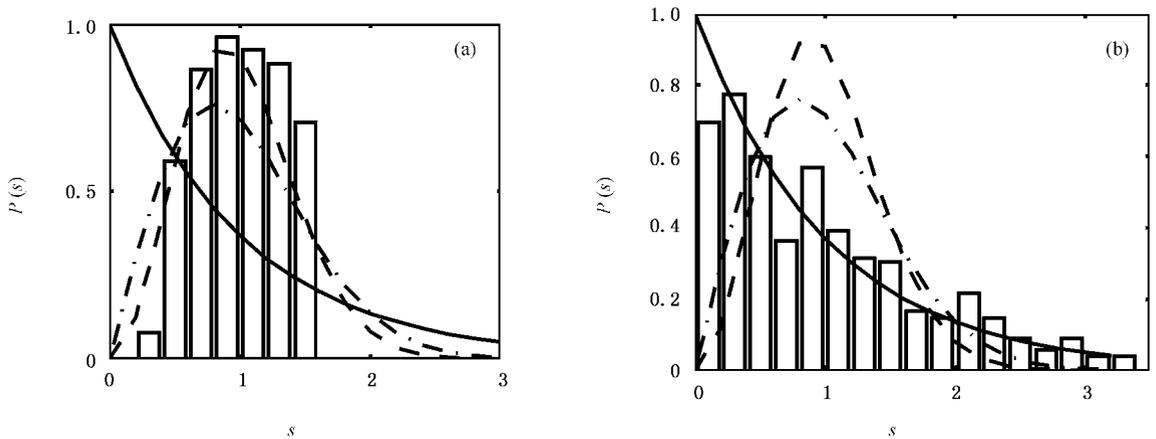


图 2 QKH 模型准能量的最近邻能级间隔分布 ($K=L=0.01$ (a) 和 $K=L=3$ (b)). $\epsilon=0, n_q=13$, 因此统计大约 8000 个准能量间距. 实线、点划线和虚线分别表示函数 (6) (7) 和 (8))

Husimi 函数通过定义“量子相空间分布函数”, 可以方便地看出波函数在相空间的变化. 量子态 $|\psi\rangle$ 的 Husimi 函数被定义为^[23]

$$\rho_H(\theta_0, p_0) = |\langle \psi_{(\theta_0, p_0)} | \psi \rangle|^2,$$

式中 $\psi_{(\theta_0, p_0)} = A \sum_p e^{-i(p-p_0)^2/4w^2 - i\theta_0 p} |p\rangle$ 为高斯相干

态, 它对应经典相空间中一个中心位于 (θ_0, p_0) , 宽度为 w 的高斯波包, A 为归一化常数. 图 3 显示 QKH 模型分别对应经典可积和混沌时, 理想 Floquet 算子两个准能量本征态的 Husimi 函数. 比较图中左右两列可以看出, 当系统为规则运动时, 准能量本征态没有遍历特性; 当系统对应经典混沌时, 其 Husimi 分

布遍历了大部分的相空间,此时两个差别很大的准能量对应的本征态的相空间分布变得几乎不可区

分.由此可见,QKH 模型的准能量本征态 Husimi 分布能够反映其动力学特性.

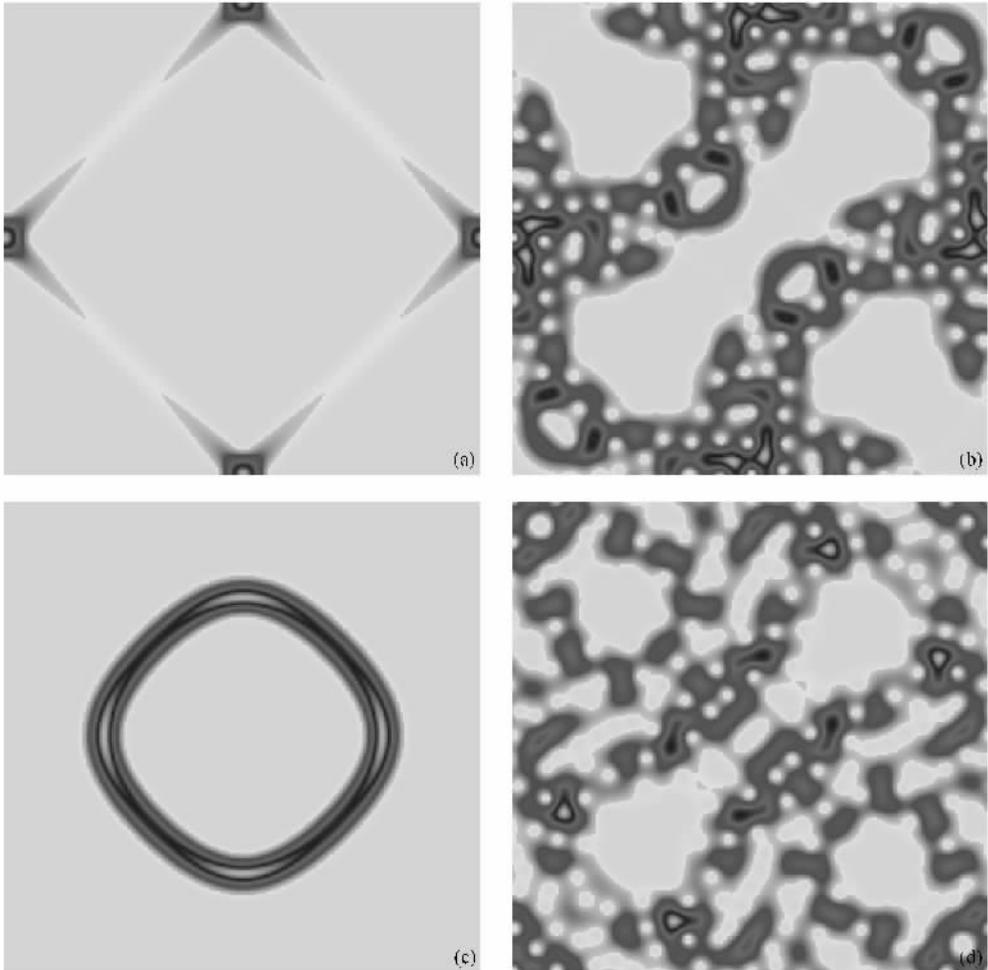


图 3 未扰 QKH 模型在 $K=L=0.01$ (自左向右第一列)和 $K=L=3$ (第二列)对准能量本征态的 Husimi 分布, $n_q=8$ 第一行和第二行分别对应 Floquet 算子的最大准能量本征态和第 $N/2$ 个准能量本征态.图中灰度表示相点的概率幅值,黑色代表相点的幅值最大,白色表示幅值最小)

考虑上节的随机噪声干扰和静态干扰模型.图 4 给出不同干扰下,Floquet 算子最大准能量本征态的 Husimi 分布图.随着静态干扰强度 ϵ 增大,准能量本征态显示出越来越强的遍历性,表明随着干扰强度增大 QKH 具有越来越强的混沌特性.因为静态干扰破坏了系统的对称性,所以其 Husimi 分布在相空间的对称性逐渐消失(比较图 3).而同样大小的噪声干扰时 Husimi 分布没有显示出遍历性质,因此静态干扰对量子计算具有更大的危害性.

定量地反映扰动本征态和理想本征态相似程度的一个物理量是本征状态熵,它被定义为

$$S_\alpha = - \sum_{\beta=1}^N p_{\alpha\beta} \log_2 p_{\alpha\beta},$$

式中 $p_{\alpha\beta} = | \langle \phi_\beta^{(0)} | \phi_\alpha^{(\epsilon)} \rangle |^2$, $|\phi_\beta^{(0)}\rangle$ 和 $|\phi_\alpha^{(\epsilon)}\rangle$ 分别为未

扰和扰动下的准能量本征态.当 $|\phi_\alpha^{(\epsilon)}\rangle$ 与某一未扰本征态相同时 $S_\alpha = 0$,如果 $|\phi_\alpha^{(\epsilon)}\rangle$ 由两个未扰的本征态以相同幅度组成则 $S_\alpha = 1$,此时系统开始具有混沌特性.同理,如果 $|\phi_\alpha^{(\epsilon)}\rangle$ 由所有 N 个 $|\phi_\beta^{(0)}\rangle$ 以相同幅度叠加,则 S_α 达到饱和值 n_q .为了减小 S_α 随 α 的波动,我们随机选取 $N/3$ 个本征态进行统计平均.本征状态熵与静态干扰强度的关系见图 5.从图中可以看出本征状态熵从 $\alpha(\epsilon=0)$ 到饱和值的变化,而且随着 n_q 增加,静态干扰导致混沌的阈值 ϵ_χ (由 $\mathcal{S}(\epsilon_\chi)=1$ 定义)逐渐减小.

5. 量子计算鲁棒性分析

量子态的酉演化性质使 Hilbert 空间中两个量

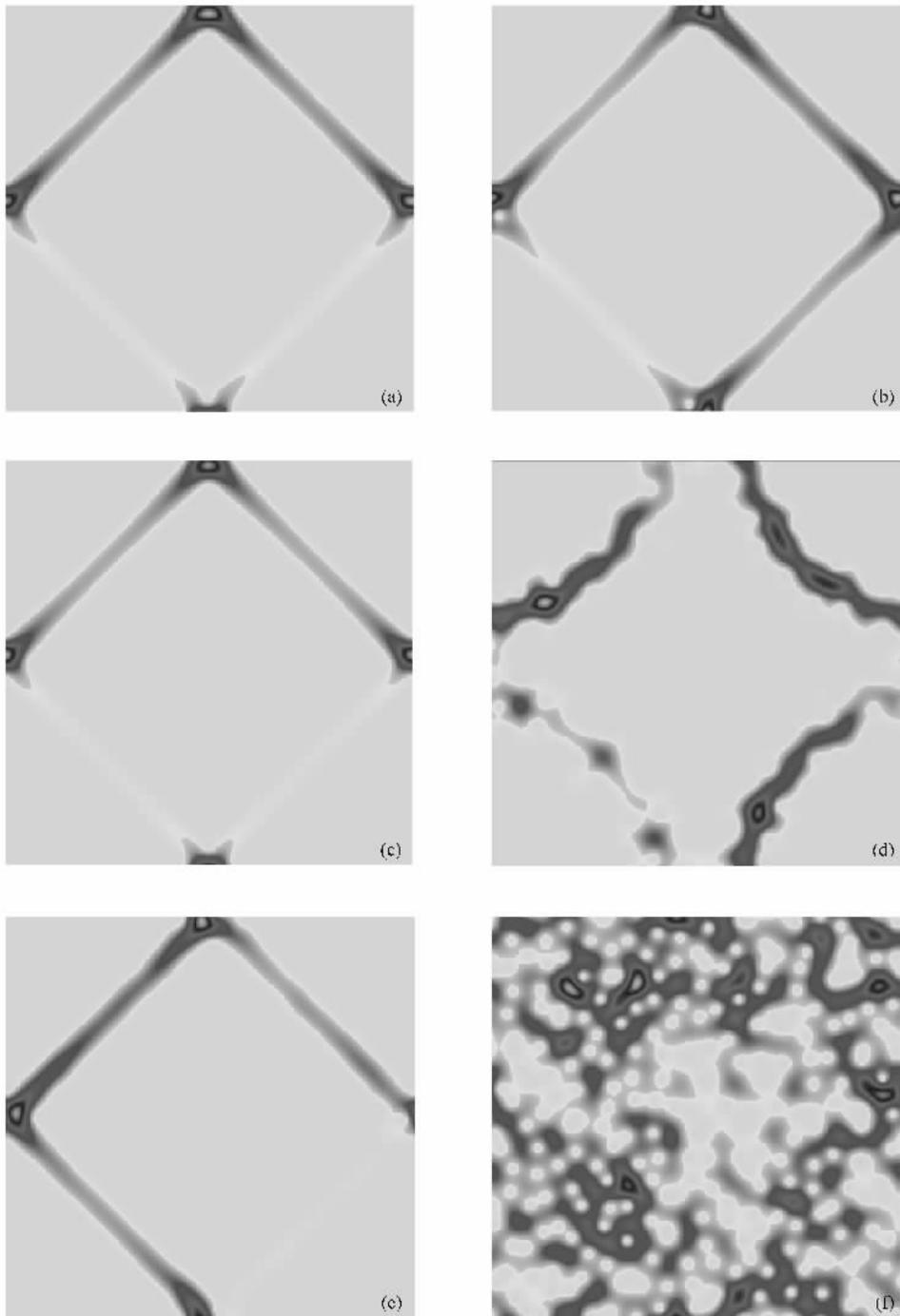


图4 经典可积的 QKH 模型($K=L=0.01$)在随机噪声干扰(第一列)和静态干扰(第二列)下的最大准能量本征态 Husimi 分布(自上而下各行对应干扰强度 $\epsilon = 10^{-6}$, 10^{-5} 和 10^{-4} , $n_q = 8$)

子态之间范数保持不变,因此在量子运动中不存在对初态的指数敏感性.量子保真度分析通过扰动量子系统哈密顿函数,研究系统从同一初始状态演化的稳定性^[24, 25].对初态为 $|\psi(0)\rangle$ 的量子系统,保真度定义为

$$f(t) = |\langle \psi(t) | \psi_0(t) \rangle|^2,$$

式中 $|\psi_0(t)\rangle$ 和 $|\psi(t)\rangle$ 分别表示 $|\psi(0)\rangle$ 在理想演化算符 $U_0(t)$ 和扰动演化算符 $U(t)$ 下 t 时刻状态.我们考虑 QKH 量子计算在经典可积($K=L=0.01$)时的干扰情况.系统演化的初始状态为一高斯相干态,对应相空间中心点附近宽度为 $1/\sqrt{N}$ 的高斯波包.图6给出了 QKH 量子仿真在随机噪声干扰和静

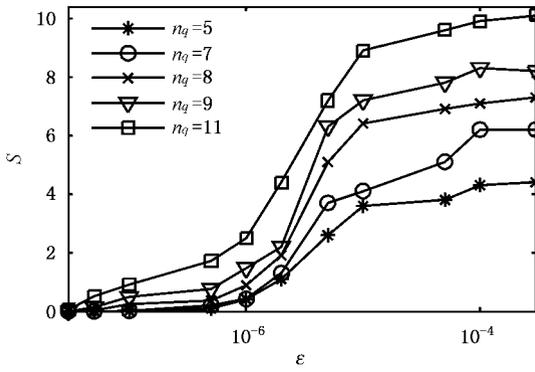
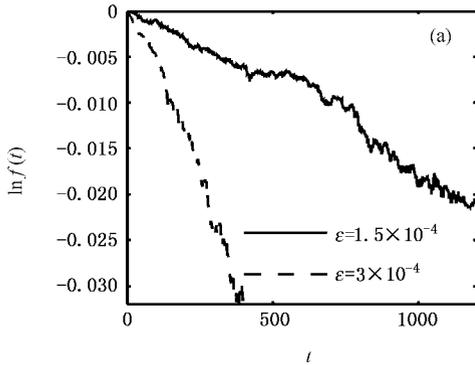


图 5 本征状态熵随静态干扰强度 ϵ 的变化曲线(横轴 ϵ 取对数坐标, n_q 分别为 5, 7, 8, 9, 11)

态干扰时的保真度衰减. 为了分析可信计算时间尺度 t_f 与系统参数之间的关系, 我们固定保真度衰减阈值为 $f(t_f) = 0.9$. $n_q = 7$ 时可信计算时间尺度 t_f 随 ϵ 的变化见图 7. 在随机噪声干扰情况下, 每一个量子门操作使理想状态转变为其他扰动态的概率为 ϵ^2 阶函数, 因此噪声干扰时的可信计算时间尺度



$$t_f = A(\epsilon^2 n_q), \tag{9}$$

式中 A 为一常数, n_q 是一次仿真迭代所需总的基本量子门数. 这导致噪声干扰下的保真度 $f(t)$ 呈指数衰减(图 6(a)), $f(t) = \exp(-B\epsilon^2 n_q t)$, 其中 B 为常数. 在静态干扰模型中, 由于静态干扰的相干作用, 每个量子比特的实际 Rabi 振荡正比于 $\cos(\epsilon n_q t)$. 对 n_q 个量子比特, $f(t) \propto [\cos(\epsilon n_q t)]^{n_q}$. 当 ϵ 较小时, $f(t) \sim \exp[-n_q(\epsilon n_q t)^2]$, 为高斯衰减(图 6(b)). 由此得到远小于噪声干扰时的可信计算时间尺度

$$t_f = C(\epsilon n_q n_q^{1/2}), \tag{10}$$

式中 C 为常数. $\ln f(t)$ 与迭代次数 t 之间的线性(随机噪声干扰)或二次函数关系(静态干扰)显示在图 6 中. 图 7 中相等可信计算时间尺度对应的噪声干扰和静态干扰 ϵ 的巨大差异(约为几个数量级)进一步验证了静态干扰具有更强的干扰作用. 在其他模型的量子计算中发现干扰与系统参数之间有类似的关系^[26].

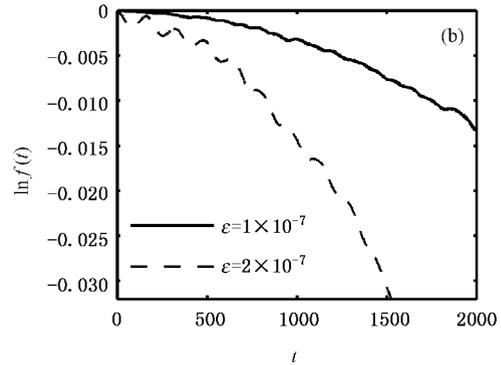


图 6 随机噪声干扰(a)和静态干扰(b)下 QKH 模型保真度衰减曲线. $n_q = 7$

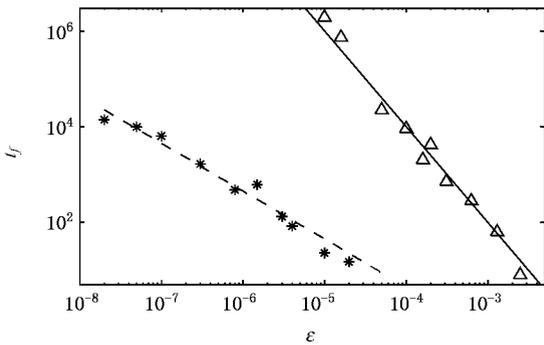


图 7 可信计算时间尺度 t_f 随噪声干扰(Δ)和静态干扰($*$)的变化(每一个点代表 10 个随机初始相干态的统计平均, $n_q = 7$. 实线为函数(9), $A/n_q = 10^{-4}$; 虚线表示函数(10), $C/n_q n_q^{1/2} = 4.5 \times 10^{-4}$)

在经典混沌系统中, 初始状态任意小的扰动将使相空间中的轨迹产生指数偏移. 因此经典计算机不可避免的舍入误差导致经典混沌仿真是不可逆的. 对系统某一初始状态仿真时间 t 后, 对其进行反演到 $2t$ 时刻, 此时不可能还原得到系统初始状态. 而对阿诺德猫映射(Arnold cat map)的研究发现量子算法即使在干扰存在的情况下也能较长时间的精确模拟混沌系统, 并且表现出可逆性^[27]. 为了分析 QKH 量子计算能否稳定模拟混沌系统, 我们采用扰动 QKH 量子仿真算法中周期驱动力 K 的方法模拟经典干扰, 在算法的每一次迭代时对 K 加一小的随机干扰 δK . 图 8 示出经典混沌的 QKH 在参数 K 扰动和静态干扰时量子态的 Husimi 分布. 对经典干扰模型和静态干扰模型分别进行 30 次正向迭代和 30

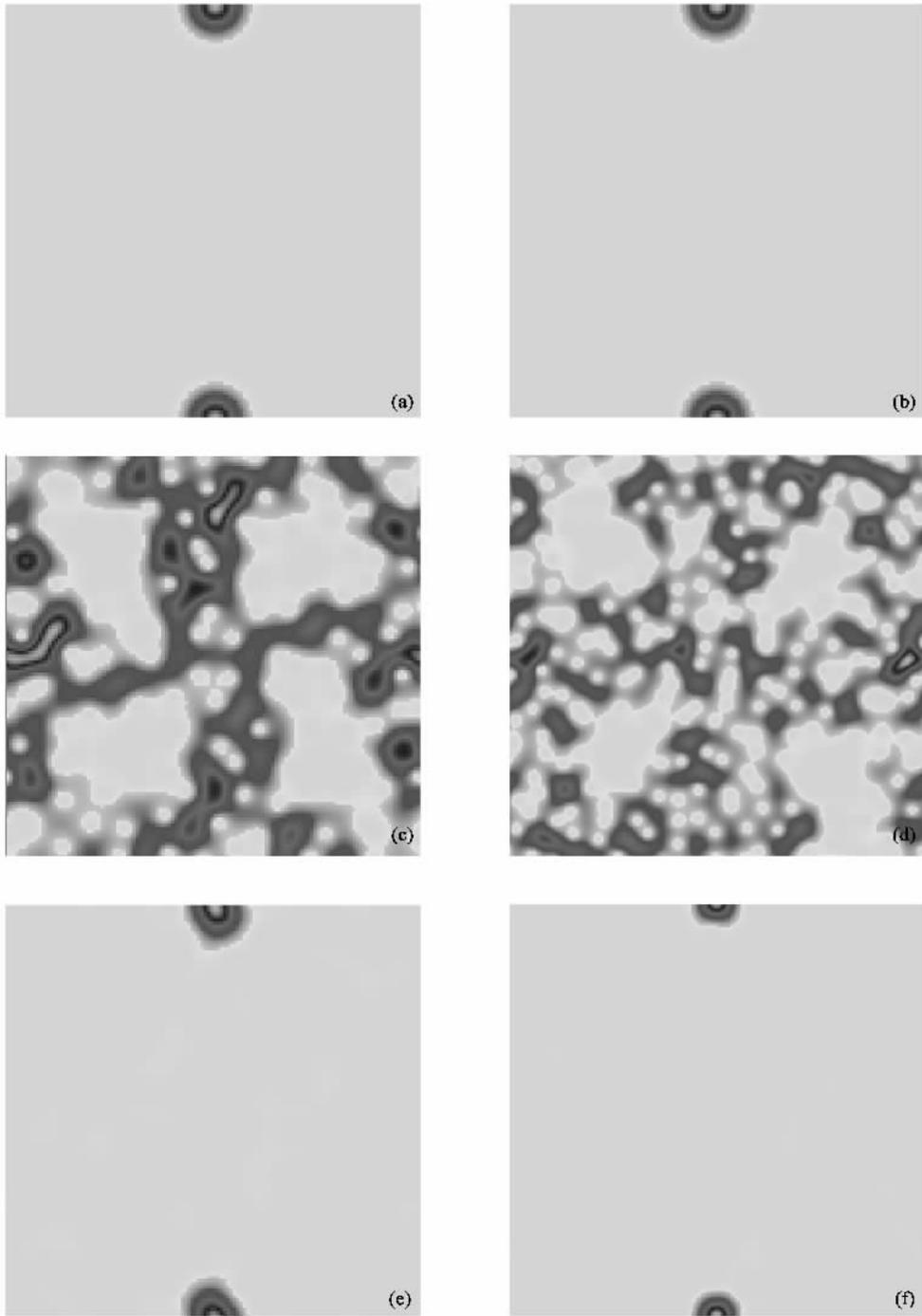


图8 QKH在经典干扰(第一列)和静态干扰(第二列)时的 Husimi 分布(第一行和第二行分别为系统初始状态和正向迭代 30 次后的 Husimi 分布,第三行是对第二行进行 30 次反演的 Husimi 分布, $K = L = 3$, 静态干扰 $\epsilon = 10^{-5}$, $n_q = 8$)

次反演迭代, K 的干扰 $\delta K \in \left[-\frac{K}{100}, \frac{K}{100} \right]$, 初始状态对应相空间混沌区域内的双曲不动点 ($\theta = \pi, p = 0$). 无论是静态干扰还是经典干扰, 在 Husimi 分布表现相当混沌的情况下系统仍旧能够反演到初始状态. 与经典混沌仿真中干扰的指数敏感性相比, 量子

计算机中干扰表现出完全不同的作用方式. 产生这种不同的原因在于无论仿真系统的动力特性如何, 量子计算的扰动态与未扰态之间“距离”由于量子力学的酉演化性质而保持不变.

量子计算不但没有干扰的指数敏感性, 反而在仿真混沌系统时表现的更加稳定. 图 9 示出同一初

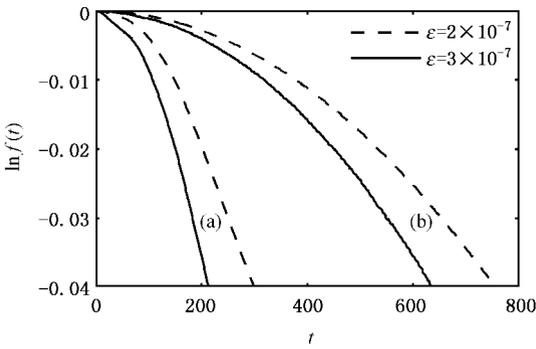


图9 同一初始状态在规则运动($K=L=0.01$, (a)组)和混沌运动($K=L=3$, (b)组)下的保真度衰减, $n_q=9$

始状态受到静态干扰时可积和混沌演化保真度的衰减。可以看出,在相同的干扰下,混沌系统的保真度衰减比可积时慢。其原因可以用线性响应近似(linear response approximation)或随机矩阵理论解释^[28]。当 $1 - f(t) \ll 1$ 时,连续系统保真度衰减可表述为

$$f(t) = 1 - \frac{c^2}{\hbar^2} \int_0^t \int_0^{t'} \alpha(t', t'') dt' dt'' + \alpha(t^4), \quad (11)$$

式中 $\alpha(t', t'')$ 为干扰算符的量子相关函数,在 QKH 的静态干扰模型中,

$$\alpha(j, k) = U_s(j) \cdot U_s(k) - U_s(j) U_s(k).$$

在半经典极限下量子相关函数与经典相关函数类似,应用经典混沌理论可以推断混沌系统的相关函数衰减比经典系统快的多。因此(11)式中相关函数

的二重积分在混沌系统中 $\propto t$,而在可积系统中 $\propto t^2$ 。导致混沌系统仿真中保真度衰减比可积系统慢。

6. 结 论

通过分析周期驱动的量子 Harper 模型 Floquet 算子本征态统计特性和 Husimi 分布,可以得出,量子计算中干扰在大于某一阈值时将会产生混沌行为,从而产生不可信的计算结果。进一步地分析表明,静态干扰的阈值远远小于随机噪声干扰的阈值。采用数值仿真的方法,得到保真度在随机噪声干扰时随系统演化为指数衰减,而在静态干扰时为高斯衰减。与经典混沌仿真中存在对误差的指数敏感性不同,量子计算能够精确的仿真混沌系统,并且在一定的干扰强度下表现出可逆性。

从量子计算的可逆性以及可信计算时间尺度随 n_q, κ 的多项式变化可以看出,量子计算并非如人们通常想象的那样脆弱。事实上,在仿真混沌系统时它的稳定性比仿真可积系统时还要好。近来,在周期驱动的量子陀螺(quantum kicked top)研究中发现一种异常的保真度衰减现象——在某些干扰情况下,保真度能够长时间保持在一稳定值附近^[29]。我们正在考虑如何将这种保真度稳定现象应用于量子计算,如果可以实现的话,无疑将有效的提高量子计算的稳定性。

[1] Feynman R P 1986 *Found. Phys.* **16** 507
 [2] Nielsen M A, Chuang I L 2000 *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge: Cambridge University Press)
 [3] Chen J J, Han Z F, Zhao Y B, Gui Y Z, Guo G C 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5 (in Chinese) [陈进建、韩正甫、赵义博、桂有珍、郭光灿 2007 物理学报 **56** 5]
 [4] Barenco A, Bennett C H, Cleve R, DiVincenzo D P, Margolus N, Shor P, Sleator T, Smolin J A, Weinfurter H 1995 *Phys. Rev. A* **52** 3457
 [5] Shor P W 1994 *Proc. 35th Annual Symposium on the Foundations of Computer Science* (New York: IEEE Press) 124
 [6] Grover L K 1997 *Phys. Rev. Lett.* **79** 325
 [7] Song K H 2006 *Chin. Phys.* **15** 286
 Chen M F 2006 *Chin. Phys.* **15** 2847
 Jia X J, Su X L, Pan Q, Xie C D, Peng K C 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2717 (in Chinese) [贾晓飞、苏晓龙、潘庆、谢常德、彭 辉 2005 物理学报 **54** 2717]

[8] Deng Z J, Feng M, Gao K L 2005 *Phys. Rev. A* **72** 034306
 [9] Zheng S B 2005 *Chin. Phys.* **14** 2222
 [10] Schack R 1998 *Phys. Rev. A* **57** 1634
 [11] Geogort B, Shepelyansky D L 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 2890
 [12] Levi B, Geogort B, Shepelyansky D L 2003 *Phys. Rev. E* **67** 046220
 [13] Levi B, Geogort B 2004 *Phys. Rev. E* **70** 056218
 [14] Weinstein Y S, Lloyd S, Emerson J V, Cory D G 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 157902
 [15] Geogort B, Shepelyansky D L 2000 *Phys. Rev. E* **62** 3504
 Geogort B, Shepelyansky D L 2000 *Phys. Rev. E* **62** 6366
 [16] Braun D 2002 *Phys. Rev. A* **65** 042317
 Pomeransky A A, Zhurov O V, Shepelyansky D L 2004 *Eur. Phys. J. D* **31** 131
 [17] Shapira D, Mozes S, Biham O 2003 *Phys. Rev. A* **67** 042301
 [18] Afanasiev V V, Chemikov A A, Sagdeev R Z, Zaslavsky G M 1990 *Phys. Lett. A* **144** 229

- [19] Guhr T, Muller-Groeling A, Weidenmuller H A 1998 *Phys. Rep.* **299** 189
- [20] Xu X Y, Zhang Y H, Huang F Z, Lin S L, Du M L 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4538 (in Chinese) [徐学友、张延惠、黄发忠、林圣路、杜孟利 2005 物理学报 **54** 4538]
- [21] Kaufman D L, Kosztin I, Schulten K 1999 *Am. J. Phys.* **67** 133
- [22] Geisel T, Ketzmerick R, Petschel G 1991 *Phys. Rev. Lett.* **67** 3635
- [23] Terraneo M, Georget B, Shepelyansky D L 2005 *Phys. Rev. E* **71** 066215
- [24] Gorin T, Prosen T, Seligman T H, Znidaric M 2006 *Phys. Rep.* **435** 33
- [25] Zhang D Y, Guo P, Gao F 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1906 (in Chinese) [张登玉、郭萍、高峰 2007 物理学报 **56** 1906]
- [26] Benenti G, Casati G, Montangero S, Shepelyansky D L 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 227901
- [27] Georget B, Shepelyansky D L 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 5393
- [28] Prosen T, Znidaric M 2002 *J. Phys. A : Math. Gen.* **35** 1455
Gorin T, Prosen T, Seligman T H 2004 *New J. Phys.* **6** 20
- [29] Prosen T, Znidaric M 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 044101
Prosen T, Znidaric M 2003 *New J. Phys.* **5** 109

Robust quantum computation of the kicked Harper model and quantum chaos

Ye Bin[†] Gu Rui-Jun Xu Wen-Bo

(School of Information Technology , Southern Yangtze University , Wuxi 214122 , China)

(Received 4 January 2007 ; revised manuscript received 19 January 2007)

Abstract

The stability of quantum computing of the kicked Harper model with various perturbations is investigated. Above a certain threshold of the imperfections, quantum chaos sets in. The effects of the noise errors and the static imperfections on the quantum computation are analyzed by comparing the statistical ergodic properties and the Husimi functions of the perturbed eigenstates with the ideal eigenstates of the Floquet operator. It is shown that the fidelity decay with static imperfections is exponential while it is Gaussian with noise errors. The time scales of reliable computation with these perturbations are obtained through numerical simulations. Due to the errors in classical computation the distance of two initial states increases exponentially, while the stability of quantum computation is independent of the integrable or chaotic nature of the underlying dynamics.

Keywords : quantum kicked Harper, quantum computation, quantum chaos, fidelity

PACC : 0367, 0545

[†] E-mail : yebinxie@yahoo.com.cn