

非线性三能级体系的绝热朗道-齐纳隧穿*

王冠芳^{1)†} 刘 彬¹⁾ 傅立斌¹⁾ 赵 鸿^{2)‡}

1) 北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100088)

2) 兰州大学物理科学与技术学院理论物理研究所, 兰州 730000)

3) 厦门大学物理系, 厦门 361005)

(2006 年 9 月 7 日收到, 2006 年 11 月 1 日收到修改稿)

研究了绝热条件下非线性三能级体系的朗道-齐纳隧穿. 通过研究体系的本征值和本征态, 发现当非线性不是很强时, 三个能级的结构与线性情况相似, 但中间能级所对应本征态的性质分段, 这种分段导致绝热定理被破坏, 引起所谓的绝热隧穿现象. 由于本征态的不稳定性, 造成隧穿率的混乱. 当非线性较强时, 能级结构发生非常复杂的扭曲, 使绝热定理被更加严重地破坏. 还讨论了这个模型在三势阱波色-爱因斯坦凝聚体系中的可能应用.

关键词: 三能级, 朗道-齐纳隧穿, 隧穿率

PACC: 0530J, 0365, 7335

1. 引 言

多能级间的朗道-齐纳隧穿^[1,2]一直是人们关心的问题. 作为其最简单的模型, 线性二能级间的朗道-齐纳隧穿理论(LZT)^[3-5]已经被深入研究并广泛地应用到电流驱动的约瑟夫森结^[3,6]、加速光晶格中的原子^[7,8]、场驱动的超晶格^[9]等物理体系. 非线性二能级^[10-14]的 LZT 也被充分讨论和研究并给出可能的应用^[15-30]. 更多能级间的隧穿问题比较复杂^[31,32], 如三能级, 现有的研究多限于线性情况^[33-36]. 非线性三能级的隧穿问题还少有研究. 但非线性三能级的朗道-齐纳隧穿有着重要的物理意义, 可用于解释三势阱波色-爱因斯坦凝聚体系的隧穿现象^[34,37-40].

本文研究了绝热条件下非线性三能级体系的 LZT. 这个体系由下列薛定谔方程描述:

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

其哈密顿为

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_1}{2} + \frac{c}{4} |a_1|^2 & -\frac{\nu}{2} & 0 \\ -\frac{\nu}{2} & \frac{\gamma_2}{2} + \frac{c}{4} |a_2|^2 & -\frac{\nu}{2} \\ 0 & -\frac{\nu}{2} & \frac{\gamma_3}{2} + \frac{c}{4} |a_3|^2 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

其中 ν 是相邻两能级间的耦合常数, c 是非线性参数, 描述粒子间的相互作用. $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 是三个能级的间距. a_1, a_2, a_3 分别为三个能级上的概率幅. 总概率 $|a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2$ 守恒, 设为 1. 以中间能级为准, 取 $\gamma_2 = 0, \gamma_1 = -\gamma_3 = \gamma$. 与二能级的朗道-齐纳模型相似, 把 ν 值固定, γ 以一个常数速率变化, 即 $\gamma = at, a$ 叫扫描速度.

在线性情况下, 通过解哈密顿(2)的本征值, 得到绝热能级 $\epsilon(\gamma) = 0, \pm \sqrt{\gamma^2 + 2\nu^2}$ (见图 1(a)). 为方便起见, 我们把隧穿率 $\Gamma_{nm}(n, m = 1, 2, 3)$ 定义为 $\gamma \rightarrow -\infty$ 时体系初始在第 n 个能级上, 到 $\gamma \rightarrow +\infty$ 时在第 m 个能级上的最终布居率. 在绝热条件下

$$\Gamma_{11} = \Gamma_{22} = \Gamma_{33} = 1, \quad (3)$$

$$\Gamma_{12} = \Gamma_{13} = \Gamma_{21} = \Gamma_{23} = \Gamma_{31} = \Gamma_{32} = 0. \quad (4)$$

在非线性情况下, 通过研究体系的本征值和本

* 国家自然科学基金(批准号: 10474008, 10604009), 中国工程物理研究院科学技术基金, 国家基础研究计划项目(批准号: 2005CB3724503, 2006CB921400)和 863 计划探索项目(批准号: 2004AA1Z1220)资助的课题.

† E-mail: wanggf02@sina.com

征态,发现当非线性不是很强时,三个能级的结构与线性情况相似,但中间能级的性质分段,这种分段导致绝热定理被破坏;当非线性较强时,能级结构发生类似非线性二能级那样的扭曲^[16],使绝热定理被更加严重地破坏.

我们的非线性三能级模型可以从三势阱波色-爱因斯坦凝聚体系得到,并用于解释其隧穿现象.

2. 非线性绝热能级

对非线性情况,我们同样先分析体系的本征值,以便得到绝热能级的情况.再进一步研究其隧穿现象.令 $a_1 = \sqrt{s_1} e^{i\theta_{a_1}}$, $a_2 = \sqrt{1-s_1-s_2} e^{i\theta_{a_2}}$, $a_3 = \sqrt{s_2} e^{i\theta_{a_3}}$, 并引入相对相位 $\theta_1 = \theta_{a_1} - \theta_{a_2}$, $\theta_2 = \theta_{a_3} - \theta_{a_2}$. 于是非线性三能级体系可由下列经典哈密顿来描述:

$$\begin{aligned}
 H_e = & \left(\frac{\gamma_1}{2} + \frac{c}{8} s_1 \right) s_1 \\
 & + \left[\frac{\gamma_2}{2} + \frac{c}{8} (1-s_1-s_2) \right] (1-s_1-s_2) \\
 & + \left(\frac{\gamma_3}{2} + \frac{c}{8} s_2 \right) s_2 \\
 & - \nu \sqrt{(1-s_1-s_2)s_1} \cos\theta_1 \\
 & - \nu \sqrt{(1-s_1-s_2)s_2} \cos\theta_2,
 \end{aligned}$$

s_1, θ_1 和 s_2, θ_2 分别是经典哈密顿体系的一对正则变量.这个经典哈密顿的不动点对应着体系的本征态,它们由下列方程给出:

$$\dot{s}_1 = -\nu \sqrt{(1-s_1-s_2)s_1} \sin\theta_1, \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\theta}_1 = & \frac{\gamma}{2} - \frac{c}{4}(1-2s_1-s_2) \\
 & - \frac{1-2s_1-s_2}{2\sqrt{(1-s_1-s_2)s_1}} \nu \cos\theta_1 \\
 & + \frac{s_2}{2\sqrt{(1-s_1-s_2)s_2}} \nu \cos\theta_2, \quad (6)
 \end{aligned}$$

$$\dot{s}_2 = -\nu \sqrt{(1-s_1-s_2)s_2} \sin\theta_2, \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\theta}_2 = & -\frac{\gamma}{2} - \frac{c}{4}(1-s_1-2s_2) \\
 & + \frac{s_1}{2\sqrt{(1-s_1-s_2)s_1}} \nu \cos\theta_1 \\
 & - \frac{1-s_1-2s_2}{2\sqrt{(1-s_1-s_2)s_2}} \nu \cos\theta_2. \quad (8)
 \end{aligned}$$

由方程(5)–(8)解出不动点就得到体系哈密顿的本征态,同时可以通过 $\epsilon = H_e$ 得到其本征值,即能级(见图1).

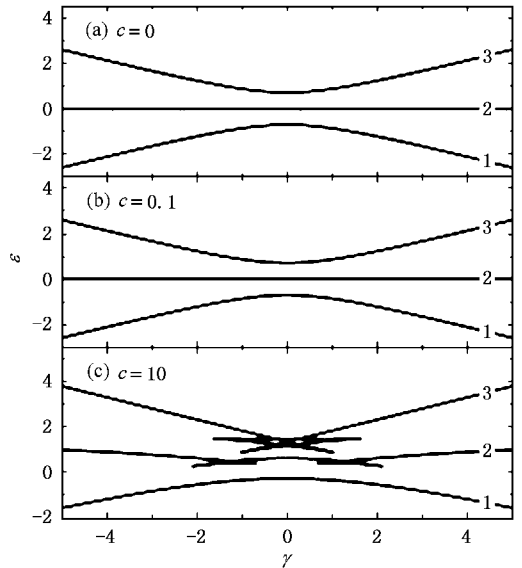


图1 三能级体系的绝热能级 (a)代表线性情况 (b)代表 $c = 0.1$ 的非线性情况 (c)代表 $c = 10$ 的非线性情况(图中取 $\nu = 1.0$)

对弱非线性 ($c \ll \nu$, 见图1(b)),这三个能级的结构与线性三能级类似,但中间能级的性质分段了.在能级的分段处,本征态的性质发生了变化,它对应的不动点的性质也就发生了变化.这可以通过在不动点附近把非线性方程(5)–(8)线性化,对不同的 γ , 研究所得哈密顿-雅可比

$$H_j = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 H_e}{\partial s_1 \partial \theta_1} & -\frac{\partial^2 H_e}{\partial^2 \theta_1} & -\frac{\partial^2 H_e}{\partial s_2 \partial \theta_1} & -\frac{\partial^2 H_e}{\partial \theta_2 \partial \theta_1} \\ \frac{\partial^2 H_e}{\partial^2 s_1} & \frac{\partial^2 H_e}{\partial \theta_1 \partial s_1} & \frac{\partial^2 H_e}{\partial s_2 \partial s_1} & \frac{\partial^2 H_e}{\partial \theta_2 \partial s_1} \\ -\frac{\partial^2 H_e}{\partial s_1 \partial \theta_2} & -\frac{\partial^2 H_e}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} & -\frac{\partial^2 H_e}{\partial s_2 \partial \theta_2} & -\frac{\partial^2 H_e}{\partial^2 \theta_2} \\ \frac{\partial^2 H_e}{\partial s_1 \partial s_2} & \frac{\partial^2 H_e}{\partial \theta_1 \partial s_2} & \frac{\partial^2 H_e}{\partial^2 s_2} & \frac{\partial^2 H_e}{\partial \theta_2 \partial s_2} \end{pmatrix} \quad (9)$$

的本征值得到. 我们知道这个本征值可以是实数、复数或纯虚数. 纯虚数表示不动点是稳定的, 其他情况表示该不动点不稳定. 图 2(c) 给出哈密顿-雅可比的本征值的实部随 γ 的变化. 我们发现, 在 $\gamma = 0, \pm 2$ 附近, H_j 的本征值是复数(有实部), 这些参数区对应的不动点不稳定; 当 γ 取其他值时, 它的本征值都是纯虚数, 相应的不动点是稳定的. 不稳定不动点对应本征态的性质与稳定不动点对应本征态的性质不同, 因此导致了能级的分段(图 1(b)).

能级分段使本征态的绝热演化被破坏. 在图 2(a)(b) 中, 以 s_1 随 γ 的变化为例, 可以看到本征态的绝热演化在 $\gamma = -2$ 附近被破坏. 这种绝热演化的破坏是由本征态性质在 $\gamma = -2$ 附近分段造成的. 此外, 我们还找到了另外两个分段区, 分别在 $\gamma = 0$ 和 $\gamma = +2$ 附近.

对强非线性 ($c \gg \nu$, 见图 1(c)), 中间能级出现双环状扭曲, 上能级出现蝴蝶状扭曲. 这种扭曲将使绝热定理被更加严重地破坏.

3. 朗道-齐纳隧穿率

下面, 按非线性的强弱分两种情况, 直接数值计算来研究非线性朗道-齐纳隧穿率 Γ_{nm} ($n, m = 1, 2, 3$). 在绝热条件下, 隧穿率完全取决于本征态的性质

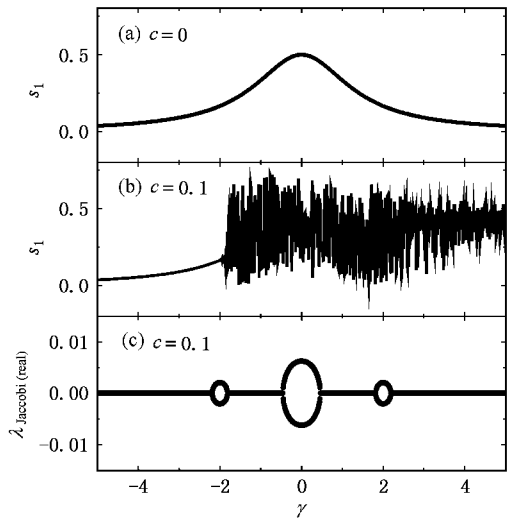
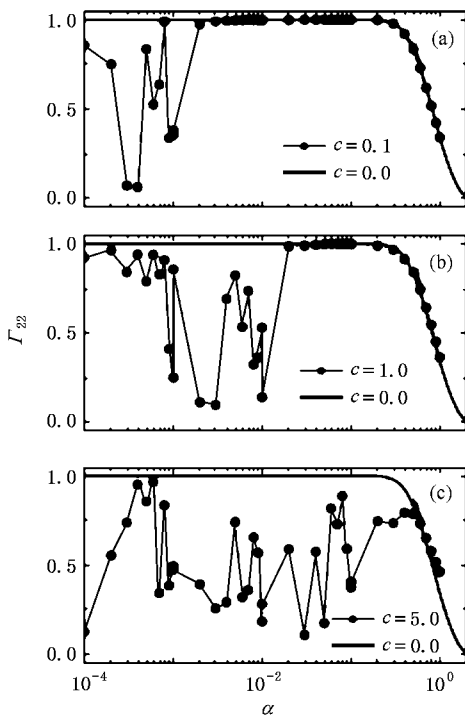


图 2 $\nu=1.0$ 本征态 $(0, 1, 0)^T$ 的绝热演化与 H_j 在不同 γ 处本征值的实部对比 (a) 是本征态的线性绝热演化 (b) 是 $c=0.1$ 时本征态的非线性绝热演化 (c) 是 H_j 在不同 γ 处本征值的实部

(对应经典系统不动点的稳定性)^[40].

对弱非线性, 中间能级(图 1(b))在 $\gamma = 0, \pm 2$ 附近分段, 体系本征态的性质发生了改变, 对应的不动点从稳定不动点变为不稳定不动点, 绝热定理被破坏. 由于不稳定不动点周围轨道的初值敏感性, 三个能级上的概率幅变得毫无规律, 隧穿率完全混乱. 图 3 给出 Γ_{22} (图 3(a)(b)), Γ_{21} (图 3(a')(b')) 在

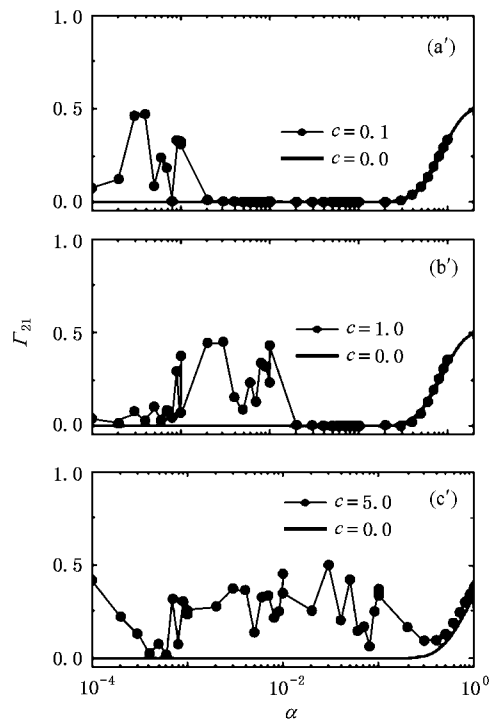


图 3 $\nu=1.0$ 不同相互作用下的隧穿率 Γ_{22}, Γ_{21} (图中横坐标取了对数)

不同的非线性参数下随扫描速度 α 的变化, Γ_{23} 可由 $\Gamma_{21} + \Gamma_{22} + \Gamma_{23} = 1$ 计算得到. 定义 α_0 为隧穿率开始变混乱时对应的扫描速度. 从图 3 我们还可以看出 α_0 随非线性的增大而增大. 图 4 给出非线性参数 c 与 α_0 的关系, 此图反映出 α_0 与 c 基本上是线性关系.

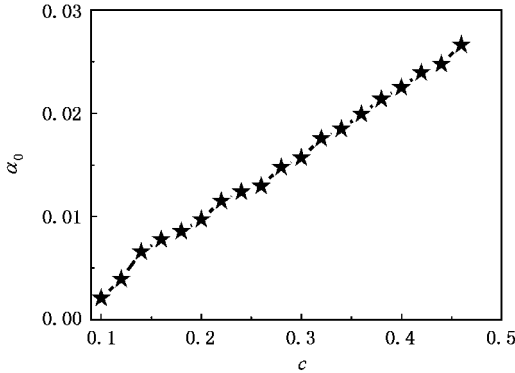
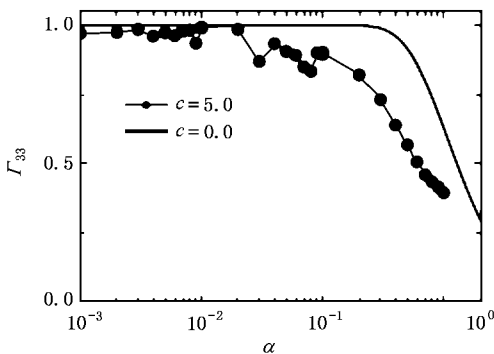


图 4 非线性参数 c 与隧穿率开始变混乱时对应 α 的关系

从图 3(a)(b) 和 (a')(b') 还可以看出, 对有限大小的扫描速度, 由于能级分段非常小, 系统感觉不到能级的分段. 这时, 与线性情况类似, 系统演化在三个能级上的概率幅有规律地变化, 因此隧穿率平滑地变化, 并且趋于线性时的隧穿规律.

此外, 在非线性较弱时, 上下两能级对称且与线性绝热能级(图 1(a))相同, 因此绝热隧穿率 Γ_{11} , Γ_{12} , Γ_{13} , Γ_{31} , Γ_{32} , Γ_{33} 趋于它们的情况, 即(3), (4)式.

随着非线性的加强, 中间能级发生双环状扭曲(图 1(c)), 绝热定理被更加严重地破坏, 隧穿率 Γ_{2m} ($m = 1, 2, 3$) 变得更加混乱(见图 3(c))(c'). 上能级发生蝴蝶状扭曲, 隧穿率 Γ_{3m} ($m = 1, 2, 3$) 变得混乱. 图 5 给出 Γ_{33} , Γ_{32} 随扫描速度 α 的变化. Γ_{31} 可由



$\Gamma_{31} + \Gamma_{32} + \Gamma_{33} = 1$ 计算得到. 我们看到, 非线性造成绝热隧穿. 对有限的 α , Γ_{3m} , 也已经偏离线性隧穿规律了. 此时, 下能级仍然光滑, 所以 Γ_{11} , Γ_{12} , Γ_{13} 趋于它们的线性情况, 即(3)(4)式.

4. 应 用

我们的非线性三能级模型可由三势阱 BEC 体系得到, 并用于理解其隧穿现象. $T = 0$ 时, 势阱 $V(r, t)$ 中 BEC 的波函数 $\Psi(r, t)$ 满足 Gross-Pitaevskii 方程(GPE)

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(r, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(r, t) + [V(r) + g_0 |\Psi(r, t)|^2] \Psi(r, t),$$

其中 $g_0 = \frac{4\pi\hbar^2 aN}{m}$, m 是原子质量, a 原子相互作用的散射长度. 我们做两个近似: 1) 这个波函数是单个阱中概率波的叠加. 非线性相互作用对这种叠加有破坏作用. 2) GPE 中波函数随空间的变化和随时间的演化是可分离的^[31]. 这样有

$$\Psi(r, t) = \psi_1(t)\phi_1(r) + \psi_2(t)\phi_2(r) + \psi_3(t)\phi_3(r). \tag{10}$$

三势阱中三个弱耦合 BEC 构成体系的动力学就可由下列薛定谔方程描述:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

其哈密顿为

$$H = \begin{pmatrix} E_1^0 + U_1 |\psi_1|^2 & -K_{12} & 0 \\ -K_{12} & E_2^0 + U_2 |\psi_2|^2 & -K_{23} \\ 0 & -K_{23} & E_3^0 + U_3 |\psi_3|^2 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

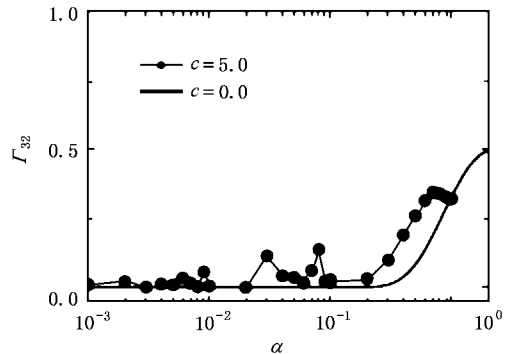


图 5 $\nu = 1.0, c = 5.0$ 隧穿率 Γ_{3m} ($m = 1, 2, 3$) (图中横坐标取了对数)

$$E_{\alpha}^0 = \int \left(\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \phi_{\alpha}|^2 + \nu(r) |\phi_{\alpha}|^2 \right) d\mathbf{r} \quad (\alpha = 1, 2, 3)$$

是势阱的最低能量. $U_{\alpha} = \int g_0 |\phi_{\alpha}|^4 d\mathbf{r} \quad (\alpha = 1, 2, 3)$

描述原子间相互作用.

$$K_{12} = - \int \left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla \phi_1 \nabla \phi_2 + \nu(r) \phi_1 \phi_2 \right) d\mathbf{r},$$

$$K_{23} = - \int \left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla \phi_2 \nabla \phi_3 + \nu(r) \phi_2 \phi_3 \right) d\mathbf{r}$$

是耦合矩阵元,只考虑阱 1, 2 耦合, 2, 3 耦合,且它们的耦合强度相等 $K_{12} = K_{23}$, 阱 1, 3 间无耦合. 在实际的实验中,根据所用外势的具体形式由托马斯-费米近似求出各阱中的基态波函数,或用高斯波包代替基态波函数,再对空间积分就可求出这些参数.

方程 (11) 与方程 (1) 完全相同. 因此,非线性三

能级模型提供了理解三势阱波色-爱因斯坦凝聚体系隧穿现象的理论基础.

5. 讨 论

综上所述,我们研究了非线性三能级体系的绝热朗道-齐纳隧穿. 发现当代表非线性的原子间相互作用很弱时,三个能级的结构与线性情况相似,但中间能级的性质分段,导致绝热定理被破坏,隧穿率变混乱. 对较强的相互作用,绝热能级发生不同于非线性二能级那样的扭曲^[16]. 这种扭曲将使绝热定理被更加严重地破坏^[19]. 对有限大小的 $\alpha, \Gamma_{2m}, \Gamma_{3m}$ 就已经混乱了,这种扫描速度较快的非绝热隧穿问题,我们将在随后的文章中详细讨论.

- [1] Landau L D 1932 *Phys. Z. Sowjetunion* **2** 46
Zener C 1932 *R. Soc. London* **A137** 696
- [2] Shytov A V 2004 *Phys. Rev. A* **70** 052708
- [3] Raghavan S, Smerzi A, Fantoni S, Shenoy S R 1999 *Phys. Rev. A* **59** 620
- [4] Yosuke K, Yoshihiko M 2000 *Phys. Rev. A* **62** 061401
- [5] Zobay O, Garrow B M 2000 *Phys. Rev. A* **61** 033603
- [6] Mullen K, Ben-Jacob E, Schuss Z 1988 *Phys. Rev. Lett.* **60** 1097
- [7] Bharucha C F, Madison K W, Morrow P R, Wilkinson S R, Bala Sundaram, Raizen M G 1997 *Phys. Rev. A* **55** R857
- [8] Madison K W, Bharucha C F, Morrow P R, Wilkinson S R, Niu Q, Sundaram B, Raizen M G 1997 *Appl. Phys. B: Lasers Opt.* **65** 693
- [9] Sibille A, Palmier J F, Laruelle F 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 4506
- [10] Liu J, Hu Bambi, Li B W 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 1749
- [11] Liu J, Hu Bambi, Li B W 1998 *Phys. Rev. A* **58** 3448
- [12] Hu B, Li B, Liu J, Gu Y 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 4224
- [13] Zhang C, Liu J, Raizen M, Niu Q 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 054101
- [14] Zhang C, Liu J, Raizen M, Niu Q 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 074101
- [15] Smerzi A, Fantoni S, Giovanazzi S, Shenoy S R 1997 *Phys. Rev. Lett.* **79** 4950
- [16] Wu B, Niu Q 2000 *Phys. Rev. A* **61** 023402
- [17] Liu J, Fu L B, Ou B Y, Chen S G, Chaoi Dae-II, Wu B, Niu Q 2002 *Phys. Rev. A* **66** 023404
- [18] Fu L B, Liu J, Chen S G 2002 *Phys. Lett. A* **298** 388
- [19] Liu J, Wu B, Niu Q 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 170404
- [20] Huang G X 2004 *Chin. Phys.* **13** 1866
- [21] Wang D L, Yan X H, Tang Y 2004 *Chin. Phys.* **13** 2030
- [22] Liu J, Wang W G, Zhang C W, Niu Q, Li B W 2005 *Phys. Rev. A* **72** 063623
- [23] Liu J, Zhang C W, Raizen Mark G, Niu Q 2006 *Phys. Rev. A* **73** 013601
- [24] Albiez M, Gati R, Föling J, Hunsmann S, Matteo Cristiani, Oberthaler M K 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 010402
- [25] Wu B, Liu J, Niu Q 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 140402
- [26] Wang G F, Fu L B, Zhao H, Liu J 2005 *Acta. Phys. Sin.* **54** 5003 (in Chinese) [王冠芳、傅立斌、赵 鸿、刘 杰 2005 物理学报 **54** 5003]
- [27] Xiao Y F, Wang D L, Wang F J, Yan X H 2006 *Acta. Phys. Sin.* **55** 547 (in Chinese) [肖宇飞、王登龙、王凤姣、颜晓红 2006 物理学报 **55** 547]
- [28] Ao S M, Yan J R 2006 *Chin. Phys.* **15** 296
- [29] Wang G F, Fu L B, Liu J 2006 *Phys. Rev. A* **73** 013619
- [30] Wu B, Liu J 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 020405
- [31] Ostrovsky V N, Nakamura H 1997 *J. Phys. A: Math. Gen.* **30** 6939
- [32] Vitanov N V, Suominen K A 1997 *Phys. Rev. A* **56** R4377
- [33] Nemoto K, Holmes C A, Milburn G J, Munro W J 2000 *Phys. Rev. A* **63** 013604
- [34] Zhang S, Wang F 2001 *Phys. Lett. A* **279** 231
- [35] Franzosi R, Penna V 2001 *Phys. Rev. A* **65** 013601
- [36] Franzosi R, Penna V 2003 *Phys. Rev. E* **67** 046227
- [37] Graefe E M, Korsch H J, Witthaut D 2006 *Phys. Rev. A* **73** 013617
- [38] Carroll C E, Hioe F T 1986 *J. Phys. A: Math. Gen.* **19** 2061
- [39] Fu L B, Liu J, Chen S G, Duan Y S 2002 *J. Phys. A: Math. Gen.* **35** L181
- [40] Fu L B, Chen S G 2005 *Phys. Rev. E* **71** 01660

Adiabatic Landau-Zener tunnelling in nonlinear three-level system^{*}

Wang Guan-Fang^{1,2)†} Liu Bin¹⁾ Fu Li-Bin¹⁾ Zhao Hong^{2,3)}

¹ *Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100088, China*

² *Institute of Physical Science and Technology, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China*

³ *Physical Department, Xiamen University, Xiamen 361005, China*

(Received 7 September 2006 ; revised manuscript received 1 November 2006)

Abstract

We investigate adiabatic Landau-Zener tunnelling in nonlinear three-level system. The levels and tunnelling probability are studied with respect to the nonlinearity. For weak nonlinearity, the structures of the levels are smooth and similar to their linear counterparts. However the eigenstates of the middle-level will be unstable for some system parameters, which leads to the adiabaticity to break down and the tunnelling probability chaotic. For strong nonlinearity, the structures of the levels are distorted, including double-ring-like distortion in lower-level and butterfly-like distortion in upper-level. The adiabaticity will be broken down more badly. Finally we give a possible application of the system in triple-well trapped Bose-Einstein condensates.

Keywords : three-level, Landau-Zener tunnelling, tunnelling probability

PACC : 0530J, 0365, 7335

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10474008, 10604009), Science and Technology Fund of CAEP, the National Fundamental Research Programme of China (Grant Nos. 2005CB3724503, 2006CB921400) and 863 Exploring Plan (Grant No. 2004AA1Z1220).

[†] E-mail : wanggf02@sina.com