

# 截断误差诱导阵发混沌与拓展维\*

盛利元<sup>1)B)</sup> 贾伟尧<sup>2)</sup> 吴舒辞<sup>1)</sup> 夏国荣<sup>1)</sup>

1) 中南林业科技大学电子与信息工程学院, 长沙 410004)

2) 西南大学物理科学与技术学院, 重庆 400715)

3) 中南大学物理科学与技术学院, 长沙 410083)

(2006 年 8 月 7 日收到 2006 年 10 月 31 日收到修改稿)

进一步研究过焦系统, 找到了截断误差诱导阵发混沌的直接实验证据. 实验显示, 过焦系统的数字解呈现开关阵发混沌的特征, 分析解仅是一个简单极限序列. 影子效应支配系统演化, 截断误差的累计误差是演化轨道的影子距离, 影子距离随系统逼近不动点增加, 随系统远离不动点减少, 增加量与减少量统计上相等. 在非双曲不动点的邻域内, 存在一个阈值, 当累计误差超过该阈值时, 影子效应失灵, 系统从吸引相跳到排斥相. 一种合理的猜测是在非双曲不动点局域截断误差可以诱导出新维度——拓展维.

关键词: 开关阵发混沌, 截断误差, 过焦系统, 拓展维

PACC: 0545

## 1. 引 言

计算机是研究混沌系统的必不可少的工具. 考虑到混沌研究中计算机实验的普遍性, 人们已经认识到了计算机对混沌系统的计算结果造成的影响. 当截断误差将连续的相空间分成离散的网格时, 许多混沌轨道将截断为单一的伪轨道, 因此, 只要时间足够长, 混沌轨道必然塌缩为周期轨道, 称之为混沌退化或有限精度效应<sup>[1]</sup>, 有限精度效应对混沌加密算法的安全性有负面影响. 本文的动机是要从理论上探索解决这种负面影响的途径. 这里, 我们在文献 [2] 的基础上发现了截断误差诱导阵发混沌的一种机理, 作为一个直接证据, 证实了文献 [2] 提出的猜测. 在非双曲不动点处, 截断误差帮助系统越过不动点从吸引状态转变为排斥状态(见文献 [2] 的图 6). 这个新证据本质上涉及动力系统的影子效应 (shadowability) 问题. 尽管人们已经清楚混沌系统的真实轨道并不总是数字轨道的影子, 但是, 在一个依赖于计算机截断误差的有限时间内还是能够预测到这种影子<sup>[3,4]</sup>. 噪声能够诱导开关阵发混沌 (on-off intermittency)<sup>[5]</sup>, 其统计平均与阵发混沌的尺度和噪声幅度有关<sup>[6]</sup>, 然而, 这些有关噪声影响混沌的研究

几乎都是采用在系统方程中引入附加噪声项代替截断误差的方法完成的. 在我们提供的例子中, 不借助任何附加噪声项, 清楚地观察到了混沌系统的影子和影子效应中止这一现象, 也能清楚显示截断误差如何诱导开关阵发混沌的机理. 截断误差可能是一个比附加噪声导致阵发混沌更为本质的原因, 因为截断误差量级为  $10^{-16}$ , 远比附加噪声小. 事实上, 目前为止, 人们还没有得到过一个真正的混沌分析解, 有时不知道有关混沌系统的数字结果是否真是系统所固有的, 这是非线性问题研究中的一种困惑. Dalling 和 Goggin<sup>[7]</sup> 指出混沌不是一种有限数字算法的艺术品. 在我们的例子中, 同时给出了系统的分析解和数字解, 两者的巨大差别正好表明, 在一定条件下, 混沌可能就是一种有限数字算法的艺术品.

## 2. 过焦系统及其分析解和数字解

文献 [2] 定义了一个过焦系统, 如图 1 所示. 一个归一化椭圆

$$x^2 + \frac{y^2}{\mu^2} = 1, \quad (1)$$

其中  $x, y \in [-1, 1]$ , 压缩系数  $\mu \in (0, 1)$ . 一条初始射线  $l_0$  从椭圆上任意一点  $M_0$  出发, 通过椭圆的一个焦点  $c_1$  到达椭圆上的点  $M_1$ , 得反射线  $l_1$ ,  $l_1$  将通

过椭圆的另一个焦点  $c_2$  到达椭圆上的点  $M_2$ , 又得反射线  $l_2$ , 接着,  $l_2$  通过焦点  $c_1$  达到点  $M_3$ , 又得反射线  $l_3$ , 如此继续, 得到一个过焦点的射线序列  $L: l_0, l_1, l_2, \dots$  和一个点序列  $M: M_0(x_0, y_0), M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \dots$ . 这个模型称为过焦系统 (cross-focus system, CFS).  $M$  (或  $L$ ) 正是 CFS 的分析解. 让  $M_\infty(1, 0)$  和  $M_\infty(-1, 0)$  (简写  $M_\infty s$ ) 分别代表椭圆与长轴相交的两个端点, 显然点序列  $M$  交替地收敛于这两个端点, 因此,  $M_\infty s$  是一对简单吸引子, 点序列  $M$  是一个简单极限序列.

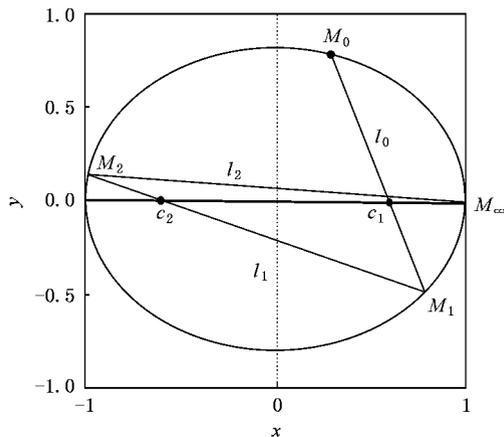


图 1 归一化椭圆和过焦系统 CFS 的分析解 (椭圆参数  $\mu = 0.8$ , 初始点  $x_0 = 0.3$ , 取前 200 个轨道点, 显示椭圆的两个端点是点序列  $M$  的极限, 故点序列  $M$  是一个极限序列)

另一方面, 根据文献 [8], 可导出 CFS 的映射方程. 迭代所得序列就是它的数字解. 方法如下: 给定系统参数  $\mu$  和初始条件  $x_0$ , 由 (1) 式可得  $y_0 = \mu \sqrt{1 - x_0^2}$  及射线  $l_0$  的斜率  $k_0 = \frac{-y_0}{x_0^{(c)} - x_0}$  (这里  $x_0^{(c)}$   $= \pm \sqrt{1 - \mu^2}$  为椭圆焦点的横坐标). 用  $k_n$  表示射线  $l_n$  的斜率, 则  $x_n$  和  $k_n$  的映射方程为

$$x_n = -\frac{2k_{n-1}y_{n-1} + x_{n-1}(\mu^2 - k_{n-1}^2)}{\mu^2 + k_{n-1}^2}, \quad (2)$$

$$k_n = \frac{2k'_n - k_{n-1} + k_{n-1}k_n'^2}{1 + 2k_{n-1}k'_n - k_n'^2}, \quad (3)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots,$$

其中

$$k'_n = -\frac{x_n}{y_n}\mu^2, \quad (4)$$

$$y_n = k_{n-1}(x_n - x_{n-1}) + y_{n-1}, \quad (5)$$

$k'_n$  是点  $M_n(x_n, y_n)$  的切线的斜率. CFS 的映射方程

(2) 和 (3) 表现上是二维的, 但由于受椭圆焦点约束, 实际上它们仅是一个非单峰的一维映射系统.

迭代计算映射方程 (2) 和 (3), 如图 2 所示. 与图 1 比较, 图 2 给出了一幅完全不同的图像. 文献 [2] 对这个数字解的特征作了详细描述, 表现为一种随机数字振荡系统,  $M_\infty s$  交替地吸引和排斥点序列  $M$ , 证明了  $M_\infty s$  还是非双曲不动点.

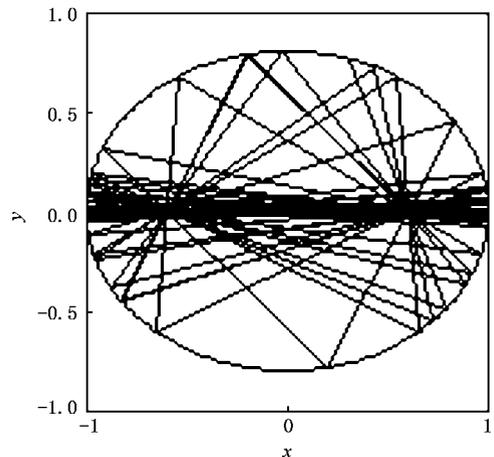


图 2 CFS 的数字解 (取  $\mu = 0.8, x_0 = 0.3$ , 映射方程 (2) 和 (3) 的前 200 个迭代点作图, 看起来像一个随机振荡系统)

### 3. 过焦系统的数字解分析

映射方程 (2) 和 (3) 中没有附加噪声项, 为什么 CFS 的数字解与分析解之间存在如此大的差别? 为解释这一实验结果, 选择数字解中的  $y_n$  作为主要研究对象.

图 3 给出了  $y_n$  随时间  $n$  的演化进程. 计算表明, 无论初值  $x_0$  和参数  $\mu$  取什么值,  $y_n$  的演化进程看起来都像是开关阵发混沌<sup>[9]</sup>;  $y_n$  总是较长时间地

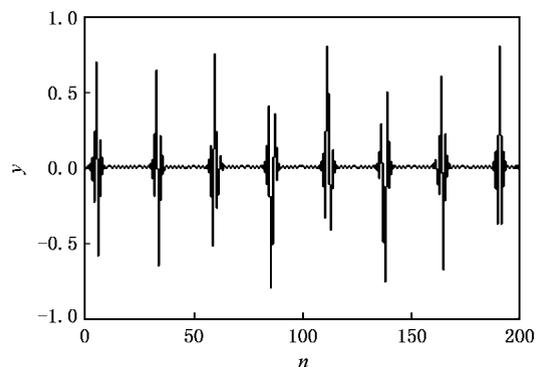


图 3 CFS 的数字解中  $y_n$  的演化进程 (取  $\mu = 0.8$  和  $x_0 = 0.999$ . 看起来像开关阵发混沌, 但它发生在一维系统中)

留在吸引子  $M_\infty s$  附近,突然迸发出来后又回到  $M_\infty s$  附近,周而复始呈准周期振荡.开关阵发混沌通常只发生在高维系统中,而 CFS 是一维系统,不具备开关阵发混沌发生的基本条件,图 3 展示的实验结果似乎与此矛盾.进一步对  $y_n$  能谱分析,图 4 给出了  $y_n$  的能谱,显示  $y_n$  具有连续能谱,同时,在连续能谱上突显各种谐波成分,包括基频、倍频、分频等,这些谱特征表明 CFS 的数字解具有阵发混沌的基本特征.

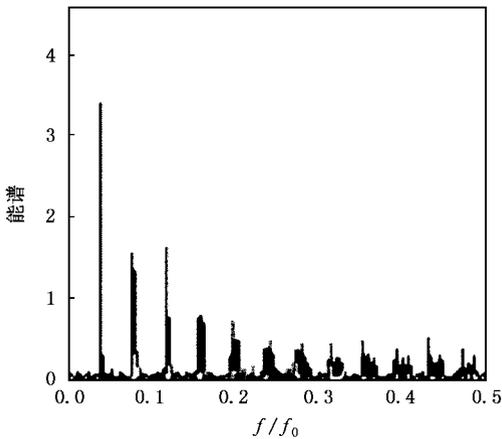


图 4 CFS 的数字解中  $y_n$  的能谱(取  $\mu = 0.8, x_0 = 0.3$ , 2048 次迭代.连续能谱上突显各种谐波成分,包括基频,倍频,分频,进一步显示 CFS 的数字解是阵发混沌的)

为了寻找 CFS 这种一维简单系统出现阵发混沌的机理,我们作  $y_n$  的散布图(scatter diagram),如图 5 所示.发现  $y_n$  的散布图是一条循环曲线(见图 5(a)),似转角  $45^\circ$  的双纽线,可表示成一维映射关系  $y_{n+1} = f(y_n)$ ,表明数字解仍然是一维的.两条直线  $y_{n+1} = y_n$  和  $y_{n+1} = -y_n$  将空间分成吸引相和排斥

相两部分,同时也可以将循环曲线简单分成关于  $y_{n+1} = -y_n$  对称的两支曲线.一支如图 5(b)所示,处在吸引相,称为吸引支,由所有吸引过程的散布点组成;另一支如图 5(c)所示,处在排斥相,称为排斥支,由所有排斥过程的散布点组成.CFS 的一个准周期循环由吸引支上的吸引过程和排斥支上的排斥过程组成.两支曲线在散布点  $(0, 0)$  相交  $(0, 0)$  是这两支曲线的共同不动点.就吸引支而言  $(0, 0)$  是稳定的双曲不动点,所有吸引过程的轨道点收敛于该点;就排斥支而言  $(0, 0)$  是不稳定的双曲不动点,所有排斥过程的轨道点远离该点.不动点  $(0, 0)$  的这种双重特征可以追溯到点  $M_\infty s$  的非双曲性,  $M_\infty s$  的吸引特性形成了  $(0, 0)$  的稳定双曲性,排斥特性形成了  $(0, 0)$  的不稳定双曲性.

在图 5(a)中,显示了从排斥支过渡到吸引支的一段演化过程,点 3、点 4 在吸引支上,点 1、点 2 在排斥支上.系统按照点  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$  的次序自动地从排斥支演化到吸引支,这种自动行为称为回转机理.理论已经证明了<sup>[2]</sup>,初始点不论在吸引支上还是在排斥支上,CFS 演化最终都将沿吸引支收敛到不动点  $(0, 0)$ ,就是说,回转机理是 CFS 固有的机理.

显然,一定存在一种与回转机理相反的机理,使得 CFS 演化从吸引支过渡到排斥支,否则 CFS 的振荡循环不能成立.我们曾提出逃逸机理假说<sup>[2]</sup>:在非双曲不动点邻域,截断误差成为系统从吸引相抵达到排斥相的桥梁.这里我们找到了直接的实验证据.将不动点  $(0, 0)$  及其邻域放大约  $2.5 \times 10^5$  倍(见图 6).在这个放大的邻域内,理论上期望为两条直线相交于不动点  $(0, 0)$ ,结果却是一个有层次结构的鞍形区域,如图 6(a)所示.这个鞍形区域也可以分成两

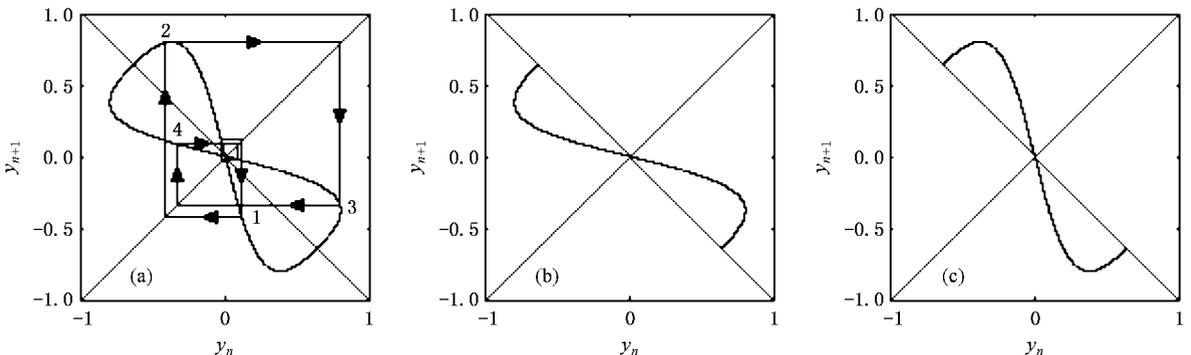


图 5 CFS 的数字解中  $y_n$  的散布图(取  $\mu = 0.8, x_0 = 0.3$ , 60000 个迭代点.(a)一维映射  $y_{n+1} = f(y_n)$ ,像转角  $45^\circ$  的双纽线,其上一段演化过程显示从排斥支自动过渡到吸引支的回转机理.(b)处在吸引相的吸引支,显示  $(0, 0)$  是一个稳定双曲不动点.(c)处在排斥相的排斥支,显示  $(0, 0)$  是一个不稳定双曲不动点)

个子区域:转移区和影子区. 计算上,转移区由历次吸引过程的最后散布点和历次排斥过程的最初散布点组成(图 6(c));影子区则由其余散布点所组成(图 6(b)),近似理论上期望的两条直线. 在影子区上,系统要么处于吸引过程,要么处于排斥过程,真实轨道(两条直线)是数字轨道的影子,可由影子区域统计平均得到. 影子效应支配系统演化. 在转移区上,影子效应失灵(a glitch of shadowability),系统演化从吸引相跳到排斥相,完成了从吸引支到排斥支的转移.

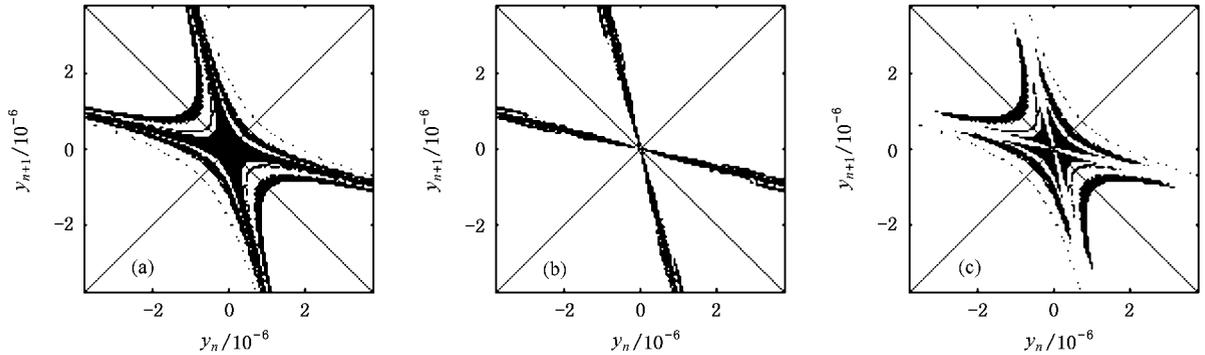


图 6 不动点(0,0)的邻域被放大约  $2.5 \times 10^5$  倍(取  $\mu = 0.8, x_0 = 0.3$ , 及 80000 次迭代) (a)不动点(0,0)的邻域是一个具有层次结构的鞍型区域,累计误差沿吸引支增加,沿排斥支减小;(b)影子区看起来像楔子,对不动点(0,0)张成一锐角  $\delta_b$ ,两条理论上期望的直线正是数字轨道的影子 (c)转移区由历次吸引过程的最后散布点和历次排斥过程最初散布点组成,具有最大累计误差,影子效应失灵

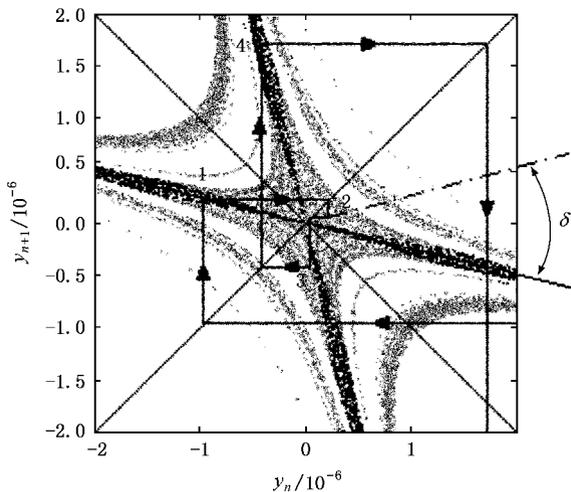


图 7 放大的不动点(0,0)邻域内的逃逸机理(取  $\mu = 0.8, x_0 = 0.3$ , 600000 次迭代,其中  $\delta > \frac{\delta_b}{2}$ ,显示在转移区上从吸引支到排斥支的一次逃逸过程,对应第 12084 至 12110 次迭代中的几次迭代)

在 CFS 的数字解中,如果只有回转机理和逃逸机理,还不能保证随机循环持久,即解的稳定性问

图 7 给出了一个转移过程,图中转移区用浅色标示,影子区用深色标示,实线连接 4 个依次出现的散布点.点 1 和点 4 分别在影子区的吸引支和排斥支上,点 2 和点 3 分别在转移区的吸引相和排斥相中.点 1  $\rightarrow$  点 2  $\rightarrow$  点 3  $\rightarrow$  点 4 的演化过程使 CFS 从吸引支抵达排斥支,这就是 CFS 数字解的逃逸机理.显然,逃逸机理不是 CFS 固有的,点 2 远离影子区,点 3 落到了排斥相,改变了系统演化方向,这意味着,不动点(0,0)邻域的空间结构发生了某种质的变化.

题.直观上,截断误差的累计作用可能使 CFS 的射线不再通过焦点,图 2 的随机振荡或图 3 的阵发混沌不能持久,数字解失稳.实验显示,这种情况不会发生.由于截断误差,计算值总是要偏离理论值,这种偏离是截断误差、截断误差传递造成的误差的总和,是一种累计误差.散布点与理论曲线之间的距离反映了这种累计误差的大小.如果把累计误差解释为影子距离(shadowing distance),则图 6(a)清楚显示,影子距离随吸引过程而增加,随排斥过程而减小,且在转移区达到最大.从图 5、图 6 和图 7 可以看到,无论是整体还是局部,CFS 数字解的散布图都是对称的.这表明,一个周期内,影子距离随吸引过程的增加量统计上等于随排斥过程的减小量,从而使得随机振荡持续,即累计误差统计平均的影子效应保证了 CFS 数字解的全局稳定性.

在不动点(0,0)的邻域内,截断误差除非足够地被放大(即局域不稳定),否则它不能导致逃逸机理.在图 6 和图 7 中我们进一步发现,影子区像 4 个楔子沿理论期望的直线方向将转移区劈成 4 个子区.楔子对点(0,0)张成一个锐角,用  $\delta_b$  表示.设  $\delta$  为处

在吸引相的某一散布点相对理论直线对点(0,0)的张角(如图7所示).若 $\delta \leq \frac{\delta_b}{2}$ ,即散布点在影子区中(如点1),则演化处于吸引状态,受影子效应支配,下一个散布点必定在影子区或吸引相的转移区中(如点2).若 $\delta > \frac{\delta_b}{2}$ ,即散布点在吸引相的转移区中(如点2)影子效应失灵,演化从吸引状态进入排斥状态,下一个散布点必定处在排斥相的转移区中(如点3).这显示在不动点(0,0)的一个邻域内CFS具有一种足够放大截断误差的潜能,使散布点从吸引支跳到排斥支.因此, $\delta$ 正是一个与累计误差相关的变量, $\delta_b$ 是 $\delta$ 的临界值. $\delta \leq \frac{\delta_b}{2}$ 影子效应成立; $\delta > \frac{\delta_b}{2}$ 影子效应失灵, $\delta_b$ 具有文献[6]中代数标度率所定义的临界值的性质,两者不同之处仅在于,这里的噪声是截断误差,约为 $10^{-16}$ ,远小于代数标度率给定的外加噪声幅值.此外,由于 $\delta > \frac{\delta_b}{2}$ 仅发生在不动点(0,0)的一个邻域内,且充斥着吸引相(或排斥相)张角,形成转移区(图(c)),其上 $y_{n+1} = f(y_n)$ 由一维的曲线变成了二维区域,就是说,在垂直于吸引(或排斥)的方向上滋生出一个新变量 $\delta$ .新变量 $\delta$ 的出现改变了空间局域拓扑结构,将交叉的双线结构扩展成了鞍形结构.这是一个直接证据,截断误差

在非双曲不动点局域诱导出新的维度,称之为拓展维,拓展维就是CFS数字解从吸引相通向排斥相的桥梁,也使发生开关阵发混沌具备了高维空间的基本要求.基于这一机理,有理由相信,一个混沌系统如果在相空间的某一维上处处存在非双曲不动点,则它有可能在截断误差下新增一维,从而在一定程度上可以抵消混沌的退化影响.这种具有抗退化能力的混沌系统在混沌密码理论中具有重要的理论价值和应用价值.

## 4. 结 论

从以上CFS数字解所作的分析可以得出如下基本结论:

1. 截断误差在非双曲不动点处可以帮助系统从吸引相绕过不动点通向排斥相,这里表现为改变了非双曲不动点局域的空间拓朴结构,产生出拓展维,从而诱导阵发混沌.因此,在一定条件下,混沌可能就是一种有限数字算法的艺术品;
2. 回转机理、逃逸机理以及累计误差统计平均的影子效应确保CFS的数字解持续随机振荡,即阵发混沌不会中止或被破坏;
3. 阵发混沌的持续性说明系统是全局稳定的,累计误差随吸引过程增加并在转移区影子效应失灵说明在非双曲不动点局域系统是不稳定的.

- [1] Levy Y E 1982 *Phys. Lett. A* **88** 1  
Beck C, Roepstorff G 1987 *Physica D* **25** 173  
Binder P M 1992 *Physica D* **57** 31
- [2] Sheng L Y, Jia W Y 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5574 (in Chinese)  
[盛利元、贾伟尧 2005 物理学报 **54** 5574]
- [3] Hammel S M, Yorke J A, Grebogi C 1987 *J. Complex.* **3** 136  
Grebogi C, Hammel S M, Yorke J A, Sauer T 1990 *Phys. Rev. Lett.* **65** 1527  
Sauer T, Yorke J A 1991 *Nonlinearity* **4** 961
- [4] Chow S N, Palmer K J 1991 *J. Dyn. Differ. Equ.* **3** 361
- [5] Heagy J F, Platt N, Hammel S M 1994 *Phys. Rev. E* **49** 1140  
Lai Y C, Grebogi C 1995 *Phys. Rev. E* **52** R3313  
Liu Z, Lai Y C 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 4737
- [6] Lai Y C, Liu Z, Wei G W, Lai C H 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 184101  
Lai Y C, Liu Z, Wei G W, Lai C H 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 219403
- [7] Dalling R H, Goggin M E 1994 *Am. J. Phys.* **62** 563
- [8] Sheng L Y, Sun K H, Li C B 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2871 (in Chinese)[盛利元、孙克辉、李传兵 2004 物理学报 **53** 2871]
- [9] Platt N, Spiegel E A, Tresser C 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 279

# The intermittency and extended dimension induced by truncation error<sup>\*</sup>

Sheng Li-Yuan<sup>1)B)</sup> Jia Wei-Yao<sup>2)</sup> Wu Shu-Ci<sup>1)</sup> Xia Guo-Rong<sup>1)</sup>

1) *Electronics and Information Engineering School, Central South University of Forestry & Technology, Changsha 410004, China*

2) *School of Physics Science and Technology, Southwest University, Chongqing 400715, China*

3) *School of Physics Science and Technology, Central South University, Changsha 410083, China*

( Received 7 August 2006 ; revised manuscript received 31 October 2006 )

## Abstract

We further studied the cross-focus system and found direct experimental evidence for the truncation error induced intermittency. The experiment demonstrated that, the numerical solution of the cross-focus system shows features of on-off intermittency, while the analytical solution of the cross-focus system is only a simple limited sequence, and the shadowability controls the system evolution. The accumulation of truncation errors imply the shadowing distances of evolving orbits, and the shadowing distance increases on approaching the fixed point and decreases on leaving the fixed point, and the increment equals the decrement in the cycles statistically. In the vicinity of nonhyperbolic fixed point, there is a threshold value, when the accumulation surpasses this threshold value, a failure of the shadowability takes place, the system jumps from the attraction phase to the repulsion phase. It is reasonably conjectured that a new extended dimension may occur locally in the vicinity of nonhyperbolic fixed point due to truncation errors.

**Keywords** : on-off intermittency, truncation error, cross-focus system, extended dimension

**PACC** : 0545

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 60672041 ).