

# 基于符号向量动力学的耦合 映像格子初始向量估计\*

王 开<sup>†</sup> 裴文江 夏海山 何振亚

(东南大学无线电工程系, 南京 210096)

(2006 年 9 月 29 日收到, 2006 年 11 月 8 日收到修改稿)

在符号动力学的基础上, 探讨了基于符号向量序列的局部耦合映像格子求逆问题, 证明了相空间  $1^N$  上任意取值通过基于符号向量序列的迭代过程必然收敛至初始向量, 提出了基于符号向量动力学的初始向量估计算法, 从而建立了耦合映像格子符号序列和实际动力系统相空间的对应关系. 实验结果表明, 根据该算法可以有效建立符号向量序列和耦合映像格子相空间之间的对应关系, 更好地刻画了实际模型的物理过程.

关键词: 耦合映像格子, 符号动力学, 初始向量估计

PACC: 0545

## 1. 引 言

通过抽象和概括, 复杂的动力学运动可以粗粒化为结构简单的动力系统<sup>[1, 2]</sup>. 其中, 在时间域空间域离散, 而在状态域连续的耦合映像格子, 已经得到大量的研究和应用<sup>[3]</sup>. 进一步的粗粒化, 将状态域分割为不同的子域并用不同的符号表示, 能够得到结构最简单的符号动力系统. 通过建立符号动力系统和实际动力系统之间的对应关系, 符号动力学已经成为研究实际系统的有力工具<sup>[1, 2]</sup>. 尤其是在一维混沌领域, 使用字提升法, 根据符号序列可以估计出一维单峰抛物线映射中的控制参数<sup>[1, 2]</sup>. 通过符号序列排序以及格雷编码, 仅依赖符号序列即可估计出单峰映射的初始值与控制参数<sup>[4]</sup>; 而在大信噪比情况下, 基于符号动力学的估计值和实际值之间的误差仅与观测到的符号序列误码率有关<sup>[5]</sup>.

符号动力学理论在一维离散混沌领域内的日益完善, 为时空混沌符号动力学理论开展提供借鉴和理论基础. 目前, 针对耦合映像格子的符号动力学的研究主要集中于拓扑熵估计<sup>[6]</sup>, 遍历性<sup>[7]</sup>以及伪随机性等方面<sup>[8, 9]</sup>. 最近, Shawn 结合一维符号动力学

的相关思想, 讨论了  $N$  节点单峰映射下耦合映像格子  $N$ -bit 符号动力系统的构造方法<sup>[10]</sup>. 以此为基础, 将符号序列的排序规则从一维混沌映射推广到耦合映像格子, 探讨了耦合映像格子符号序列和不动点、周期轨道以及在稠密轨道之间的关系, 并用一维混沌映射符号动力学的相应观点解释了耦合映像格子的生成划分、格雷码以及揉序列等动力特性<sup>[10]</sup>.

文献 [10] 证明了利用符号动力学可以建立出耦合映像格子的等价符号动力系统, 为耦合映像格子符号动力学理论的建立提供了理论依据和研究借鉴. 然而, 由于没有进一步探讨耦合映像格子求逆问题, 因此无法建立出符号序列同实际动力系统的相空间以及控制参数之间的对应关系. 正是由于这个原因, 目前基于符号动力学的耦合映像格子信号估计十分粗糙<sup>[11, 12]</sup>. 其中, 由于没有考虑各个格点间的耦合作用, 文献 [11] 仅能利用时不变映射系数估计出初始值的统计特性; 而即使考虑到各个格点间的耦合作用, 在符号动力学估计的基础上对格点的映像系数进行修正, 所提出的时变映射系数恢复信号初始值法依然只能恢复出信号初始值的统计特性<sup>[12]</sup>.

本文在文献 [10] 的研究基础上, 探讨了基于符

\* 国家自然科学基金(批准号:60672095), 国家高技术研究发展计划(863)(批准号:2005AA147040), 国家信息安全项目(242)(批准号:2005A14)及东南大学优秀青年教师基金资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯联系人, E-mail: kaiwang@seu.edu.cn

号向量序列的局部耦合映像格子求逆问题,证明了相空间  $I^N$  上任意取值经过基于符号向量序列的耦合映像格子迭代过程必然收敛至初始向量,提出了基于符号向量动力学的初始向量估计算法,从而建立了耦合映像格子符号序列和实际动力系统相空间的对应关系.实验结果表明,根据本文算法可以有效建立符号向量序列和耦合映像格子相空间之间的对应关系,从而更好地刻画了实际模型的物理过程.

## 2. 耦合映像格子以及耦合映像格子求逆

一个典型的  $N$  节点单峰映射下局部耦合映像格子描述如下<sup>[3,40]</sup>:

$$x_{n+1}^i = (1 - \epsilon)f_i(x_n^i) + \frac{\epsilon}{2}[f_{i-1}(x_n^{i-1}) + f_{i+1}(x_n^{i+1})], \quad (1)$$

其中  $i = 1, \dots, N$  表示格点位置,  $N$  表示格点大小,  $n$  表示时间步数,  $\epsilon$  表示耦合系数.动力学系统  $f_i: I \rightarrow I, I = [a, b]$  为单峰映射函数.

定义  $F$  为每一个节点的产生函数  $f_i$ , 即令  $F(x_n) = \mathbf{f}x_{n+1}$ , 其中  $x_n = [x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^N]^T, \mathbf{f}x_{n+1} = [f_1(x_n^1), f_2(x_n^2), \dots, f_N(x_n^N)]^T$ . (1) 式可简写为  $x_{n+1} = A \times \mathbf{f}x_{n+1} = A \circ F(x_n)$ , 其中  $A$  为 (1) 式中  $N \times N$  的耦合矩阵. 令  $H = A \circ F, H: I^N \rightarrow I^N$ , 则耦合映像格子迭代方程可简写为  $x_{n+1} = H(x_n)$ <sup>[10]</sup>.

$$A = \begin{bmatrix} 1 - \epsilon & \epsilon & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \epsilon/2 & 1 - \epsilon & \epsilon/2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon/2 & 1 - \epsilon & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \epsilon & 1 - \epsilon \end{bmatrix}_{N \times N}.$$

符号动力学是对动力学系统的一种粗粒化描述,它只考虑每一时间点上系统所处的相空间,而不考虑具体的取值<sup>[1,2]</sup>.考虑第  $i$  个格点的单峰映射  $f_i: I \rightarrow I, I = [a, b]$ . 定义阈值  $x_c^i$ , 使得在阈值  $x_c^i$  两边映射  $f_i$  单调. 此时阈值  $x_c^i$  将  $I = [a, b]$  划分为两个不相交的区间段  $E^i = \{e_{-1}^i, e_1^i\}$ , 其中  $e_{-1}^i = [a, x_c^i], e_1^i = [x_c^i, b]$ . 显然  $e_{-1}^i \cap e_1^i = \emptyset, e_{-1}^i \cup e_1^i = I$ . 定义第  $i$  个格点的符号取值如下:

$$s_n^i = \begin{cases} -1, & x_n^i \in e_{-1}^i, \\ 1, & x_n^i \in e_1^i. \end{cases} \quad (2)$$

在  $n$  时刻 (1) 式产生符号向量  $s_n = [s_n^1, s_n^2, \dots, s_n^N]^T$ . 而 (1) 式从 0 时刻迭代产生的符号向量序列记

为  $S = s_0, s_1, \dots, s_n, \dots$ .

当初始向量  $x_0$  选定 (1) 式迭代出一条数值向量轨道  $x_0, x_1 = H(x_0), \dots, x_n = H^n(x_0), \dots$ . 当  $n$  时刻的符号向量  $s_n$  已知时, 更确切的表示方法为

$$\begin{aligned} x_0, x_1 &= H_{s_0}(x_0), \\ x_2 &= H_{s_1} \circ H_{s_0}(x_0) = H_{s_1, s_0}^2(x_0), \dots, \\ x_n &= H_{s_{n-1}, \dots, s_0}^n(x_0), \dots \end{aligned} \quad (3)$$

建立符号动力序列和耦合映像格子相空间对应关系的关键问题在于耦合映像格子求逆. 由于耦合映像格子函数  $H$  的逆函数具有多值性, 因此对于  $x_{n+1} = H(x_n)$  不能简单记为  $x_n = H^{-1}(x_{n+1})$ . 借鉴一维混沌符号动力学中非线性函数求逆的相关知识<sup>[1,2]</sup>, 令  $\mathbf{f}x_{n+1} = A^{-1} \times x_{n+1}$ , 其中  $\mathbf{f}x_{n+1} = [f_1(x_{n+1}^1), f_2(x_{n+1}^2), \dots, f_N(x_{n+1}^N)]^T$ . 考虑第  $i$  格点 ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) 在  $n$  时刻关系:  $\mathbf{f}x_{n+1}^i = f_i(x_n^i)$ . 若此时此格点的符号  $s_n^i$  已知, 由于映射  $f_i$  在阈值  $x_c^i$  两边单调, 因此  $f_i^{-1}(f_i(x_{n+1}^i)) = x_n^i$  唯一确定. 令  $F_{s_n}^{-1}$  为  $n$  时刻符号  $s_n^i$  已知时各节点的逆产生函数  $f_i^{-1}$ , 则  $F_{s_n}^{-1}(\mathbf{f}x_{n+1}) = [f_1^{-1}(f_1(x_{n+1}^1)), f_2^{-1}(f_2(x_{n+1}^2)), \dots, f_N^{-1}(f_N(x_{n+1}^N))]^T = x_n$ . 因此当  $s_n$  已知时,  $F_{s_n}^{-1} \circ A^{-1}(x_{n+1}) = x_n$  唯一确定. 令  $H_{s_n}^{-1} = F_{s_n}^{-1} \circ A^{-1}, H_{s_n}^{-1}: I^N \rightarrow I^N$ , 则当符号向量序列  $S$  已知时, 耦合映像格子的逆可简写为  $x_n = H_{s_n}^{-1}(x_{n+1})$ .

**定理** 考虑映射  $H_{s_n}^{-1} = F_{s_n}^{-1} \circ A^{-1}: I^N \rightarrow I^N$ , 且定义度量  $d(x, y) = \max_{1 \leq i \leq N} |\xi_i - \zeta_i|$ , 其中  $x = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N]^T, y = [\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_N]^T$ , 且  $x, y \in I^N$ . 则映射  $H_{s_n}^{-1}$  为压缩映射.

**证明** 因为相空间  $I^N$  为完备空间  $R^N$  上闭子空间, 因此  $(I^N, d)$  为完备的度量空间. 令  $x' = A^{-1} \times x, y' = A^{-1} \times y$ , 其中  $x' = [\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_N]^T, y' = [\zeta'_1, \zeta'_2, \dots, \zeta'_N]^T$ . 则

$$\begin{aligned} d(H_{s_n}^{-1}(x), H_{s_n}^{-1}(y)) &= d(F_{s_n}^{-1}(x') - F_{s_n}^{-1}(y')) \\ &= \max_{1 \leq i \leq N} |f_i^{-1}(\xi'_i) - f_i^{-1}(\zeta'_i)|. \end{aligned} \quad (4)$$

因为混沌或其拓扑共轭的逆  $f_i^{-1}$  一定为压缩映射, 即  $|f_i^{-1}(\xi'_i) - f_i^{-1}(\zeta'_i)| < |\xi'_i - \zeta'_i|$ . 因此必然存在  $0 < k < 1$ , 使得  $d(H_{s_n}^{-1}(x), H_{s_n}^{-1}(y)) = kd(x', y')$ .

令  $A^{-1} = (a_{ij})_{N \times N}$  则  $\sum_{j=1}^N |a_{ij}| = 1$ . 因此,

$$\begin{aligned}
 d(x', y') &= \max_{1 \leq i \leq N} |A^{-1} \times x - A^{-1} \times y| \\
 &\leq \max_{1 \leq i \leq N} \sum_{j=1}^N |a_{ij}| \max_{1 \leq i \leq N} |\xi_i - \zeta_i| \\
 &= d(x, y). \tag{5}
 \end{aligned}$$

综合(4)式和(5)式可知  $d(H_{s_n}^{-1}(x))(H_{s_n}^{-1}(y)) \leq kd(x, y)$ , 即映射  $H_{s_n}^{-1}$  为压缩映射. 证毕.

### 3. 基于符号向量动力学的初始值估计

基于符号动力学的初始值估计, 其本质在于动力系统求逆. 根据耦合映像格子的逆映射  $x_n = H_{s_n}^{-1}(x_{n+1})$ , 将(3)式逐步求逆即可得到一系列单调的逆函数数支如下, 显然此时向量  $x_n$  与  $x_0$  一一对应.

$$\begin{aligned}
 x_0 &= H_{s_0}^{-1}(x_1) = H_{s_0}^{-1} \circ H_{s_1}^{-1}(x_2) \\
 &= H_{s_0, s_1}^{-2}(x_2) = \dots \\
 &= H_{s_0, \dots, s_{n-1}}^{-n}(x_n) = \dots \tag{6}
 \end{aligned}$$

令  $\hat{x}(0|L) = H_{s_0, \dots, s_{L-1}}^{-L}(\eta)$  其中  $\eta$  相空间  $I^N$  上任意取值. 根据定理, 由于映射  $H_{s_n}^{-1}$  为压缩映射, 因此  $\lim_{L \rightarrow \infty} H_{s_0, \dots, s_{L-1}}^{-L}(\eta)$  必然存在且唯一. 若映射  $x_{n+1} = H(x_n)$  在  $I^N$  遍历, 根据遍历性,  $x(0)$  任意邻域  $V_\epsilon[x(0)]$  经过充分大的  $L$  步迭代之后,  $\lim_{L \rightarrow \infty} H_{s_{L-1}, \dots, s_0}^L(V_\epsilon[x(0)]) = I^N$ . 因此  $\lim_{L \rightarrow \infty} H_{s_0, \dots, s_{L-1}}^{-L}(\eta) \in V_\epsilon[x(0)]$ . 由于  $\epsilon$  可以任意小, 因此  $\lim_{L \rightarrow \infty} H_{s_0, \dots, s_{L-1}}^{-L}(\eta) = x(0)$ .

根据  $\lim_{L \rightarrow \infty} H_{s_0, \dots, s_{L-1}}^{-L}(\eta) = x(0)$ , 基于符号向量序列初始向量估计算法描述如下:

步骤 1 任选相空间  $I^N$  上向量  $\eta$  作为初始向量  $y_{L+1}$ , 并且观测符号向量序列  $S = \{s_0, s_1, \dots, s_L\}$ ;

步骤 2 实现  $A^{-1} \times y_{L+1} = fy_{L+1} = [fy_{L+1}^1, fy_{L+1}^2, \dots, fy_{L+1}^N]^T$ ;

步骤 3 实现  $F_{s_n}^{-1}(fy_{L+1}) = [f_{s_n}^{-1}(fy_{L+1}^1), f_{s_n}^{-1}(fy_{L+1}^2), \dots, f_{s_n}^{-1}(fy_{L+1}^N)]^T = y_L$ ;

步骤 4 根据  $S$ , 重复步骤 2, 3, 通过基于符号向量序列的耦合映像格子逆迭代过程, 求得  $\hat{x}(0|L+1) = H_{s_0, \dots, s_L}^{-L+1}(\eta)$ , 则  $\hat{x}(0|L+1)$  即为初始向量  $x(0)$  的估计值.

根据上述步骤, 可以很好地恢复出耦合映像格子的初始向量. 以斜 tent 映射  $f_i(x) = \beta_i - 1 - \beta_i|x|$  为例, 选取阈值  $x_c^i = 0$ . 则其逆映射  $f_i^{-1}(x) = s^i(\beta_i - 1 - \nu)\beta_i$ . 将初始向量估计值记为  $\hat{x}(0|L+1) = [x_1'(0|L+1), x_2'(0|L+1), \dots, x_N'(0|L+1)]$ , 估计值与实际值的均方误差为  $\text{var} = \sum_{i=1}^N (x_i'(0|L+1) - x_0^i)^2$ . 均方误差与观测到的符号序列的长度对应关系如图 1 所示, 可以看出, 随着观测到的符号序列逐步增大, 均方误差逐步减小, 估计值逐步收敛到实际值.

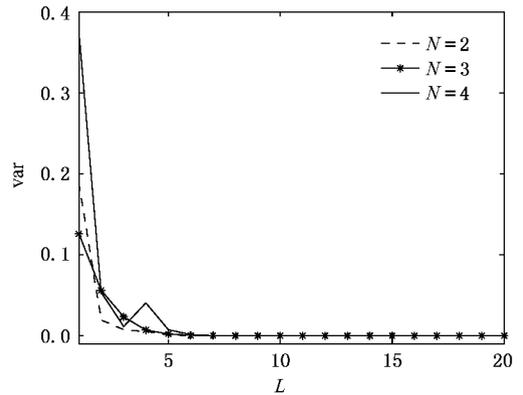


图 1 均方误差与符号序列长度  $L$  的对应关系;  $\epsilon = 0.0958$ ,  $\beta_1 = 1.99$ ,  $\beta_2 = 1.89$ ,  $\beta_3 = 1.79$ ,  $\beta_4 = 1.69$

当单峰映射为 Logistic 映射  $f_i(x) = c_i - x^2$  时, 选取阈值  $x_c^i = 0$ , 其逆映射  $f_i^{-1}(u) = s^i \sqrt{c_i - u}$ . 需要注意的是, 尽管映射  $f_i(x)$  在区间  $I = [c - c^2, c]$  上遍历, 但是耦合映像格子  $H^{-1}: I^N \rightarrow I^N$  在相空间  $I^N$  上并不遍历. 例如  $N = 2$ , 控制参数  $\epsilon = 0.0987$ ,  $c = 1.999$ , 且  $x_{n+1} = [-1.3041, 1.7045]^T$ ,  $s_n = [1, 1]^T$  已知的情况下, 尽管  $x_n = H_{s_n}^{-1}(x_{n+1})$  依然是一一对应映射, 但此时  $x_n = [1.917, 0.275i]^T$  在相空间  $I^N$  上不存在, 因此当  $N = 2$ , 控制参数  $\epsilon = 0.0987$ ,  $c = 1.999$  时, 耦合映像格子产生的时空混沌向量序列不可能出现向量  $[-1.3041, 1.7045]^T$ . 在运行符号向量序列初始向量估计算法时, 若初始向量  $y_{L+1}$  依然在相空间  $I^N$  上任意选取, 则在迭代过程中向量  $y_i$ ,  $i = L, L-1, \dots, 0$  所在相空间将不再是  $I^N$ , 而是  $N$  维复空间  $C^N$ . 尽管如此, 试验结果显示, 符号向量序列初始向量估计算法依然适用. 估计向量  $\hat{x}(0|L+1)$  的实数部分收敛至始向量  $x(0)$ , 而虚数部分收敛至 0. 例如当  $N = 2$ , 控制参数  $\epsilon = 0.0987$ ,  $c = 1.999$

时,初始向量  $x(0)=[0.5945, 0.6026]^T$  时,符号长度  $L$  和估计值如表 1 所示.

表 1 符号长度  $L$  和估计值的对应关系

符号长度 $L$	估计值实部	估计值虚部
5	$[0.7085, 0.6395]^T$	$[0, 0]^T$
10	$[0.6034, 0.5979]^T$	$[0, 0]^T$
15	$[0.5950, 0.6021]^T$	$[0.0014i, -0.0012i]^T$
20	$[0.5954, 0.6018]^T$	$[-0.0005i, 0.0004i]^T$
25	$[0.5950, 0.6021]^T$	$[-0.0003i, 0.0002i]^T$
50	$[0.5945, 0.6026]^T$	$[1.2i \times 10^{-6}, -1.0i \times 10^{-6}]^T$

## 4. 结 论

在耦合映像格子中,恢复系统初始值的关键在

于耦合系统求逆.本文在符号动力学的基础上,探讨了基于符号向量序列的局部耦合映像格子求逆问题,证明了相空间  $I^N$  上任意取值经过基于符号向量序列的耦合映像格子迭代过程必然收敛至初始向量,提出了基于符号向量动力学的初始向量估计算法,从而建立了耦合映像格子符号序列和实际动力系统相空间的对应关系.对于斜 tent 映射下耦合映像格子,通过基于符号向量序列的耦合映像格子迭代过程,相空间  $I^N$  上任意取值  $\eta$  都将收敛到初始向量.尽管 Logistic 映射下耦合映像格子逆函数的相空间为  $N$  维复空间  $C^N$ ,但是通过迭代过程,相空间  $I^N$  上任意取值  $\eta$  的实数部分都将收敛到初始向量.上述实验结果表明,根据本文算法可以有效建立符号向量序列和耦合映像格子相空间之间的对应关系,从而更好的刻画了实际模型的物理过程.

- [1] Hao B L 1994 *Starting With Parabolas-An Introduction to Chaotic Dynamics* (Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) [in Chinese] 郝柏林 1994 从抛物线谈起——混沌动力学引论(上海科学技术教育出版社)
- [2] Zheng W M, Hao B L 1994 *Applied Symbolic Dynamics* (Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) (in Chinese) [郑伟谋、郝柏林 1994 实用符号动力学(上海科学技术教育出版社)]
- [3] Yang W M 1994 *Spatiotemporal Chaos and Coupled Map Lattice* (Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) [in Chinese] [杨维明 1994 时空混沌和耦合映像格子(上海科学技术教育出版社)]
- [4] Wu X G, Hu H P, Zhang B 2004 *Chaos Solution. Fract.* **22** 359
- [5] Ling C, Wu X F, Sun S G 1999 *IEEE Trans. Signal Proc.* **47** 1424
- [6] Just W 1998 *J. Stat. Phys.* **90** 727
- [7] Just W 2001 *J. Stat. Phys.* **105** 133
- [8] Li P, Li Z, Halang W A, Chen G R 2006 *Phys. Lett. A* **349** 467
- [9] Huaping L, Shihong W, Gang H 2004 *Int. J. Mod. Phys. B* **18** 2409
- [10] Shawn D P, Ned J C, Erik B 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 034105
- [11] Zeng Y C, Tong Q Y 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 285 (in Chinese) [曾以成、童勤业 2003 物理学报 **52** 285]
- [12] Liu Y, Shen M F, Chen H Y 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 564 (in Chinese) [刘 英、沈民奋、陈和晏 2006 物理学报 **55** 564]

# Initial condition estimation from coupled map lattices based on symbolic vector dynamics<sup>\*</sup>

Wang Kai<sup>†</sup> Pei Wen-Jiang Xia Hai-Shan He Zhen-Ya

(*Department of Radio Engineering, Southeast University, Nanjing 210096, China*)

(Received 29 September 2006; revised manuscript received 8 November 2006)

## Abstract

In this paper, we consider a symbolic dynamic method, based on going athwart the coupled map lattices, to estimate unknown initial conditions of nonlinear dynamical system from the given symbolic vector sequence. It is proved that any value taken from the interval  $I^N$  will converge to the initial conditions with the iteration of athwart-coupled map lattices function, and an initial condition detection method from symbolic vector sequence is presented. Both theoretical and experimental results show that the estimation method can establish one-to-one correspondence between the initial conditions of coupled map lattices and their symbolic vector sequence; therefore this technique appears to be ideally suited for information estimation.

**Keywords**: coupled map lattices, symbolic dynamics, initial vector estimate

**PACC**: 0545

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Sciences Foundation of China( Grant No. 60672095 ), the National High Technology Research and Development Program of China( 863 Program )( Grant No. 2005AA147040 ), the National Information Security Program of China( 242 Program )( Grant No. 2005A14 ) and the Excellent Young Teachers Program of Southeast University.

<sup>†</sup> E-mail : kaiwang@seu.edu.cn