

# 基于智能交通系统的耦合映射跟驰模型 和交通拥堵控制<sup>\*</sup>

韩祥临<sup>1,2)</sup> 姜长元<sup>1)</sup> 葛红霞<sup>3)</sup> 戴世强<sup>2)</sup>

1) 湖州师范学院理学院, 湖州 313000)

2) 上海大学上海市应用数学与力学研究所, 上海 200072)

3) 宁波大学理学院, 宁波 315211)

(2006 年 9 月 30 日收到, 2007 年 4 月 2 日收到修改稿)

基于智能交通诱导信息, 提出一种改进的耦合映射跟驰模型, 用于描述单车道的交通流动力学特性及其拥堵控制. 利用反馈控制理论, 给出了在头车速度发生变化时交通流保持稳定的条件. 分析结果表明, 考虑前方更多车辆的信息对交通流有致稳作用, 亦即稳定性条件明显减弱. 数值模拟证实了理论分析的正确性. 通过与他人相关工作的比较得知, 考虑智能交通诱导信息能够更有效地抑制交通拥堵.

关键词: 交通流, 智能交通系统, 耦合映射跟驰模型, 交通拥堵控制

PACC: 0550, 0520

## 1. 引 言

目前, 交通问题已经引起了社会的广泛关注. 由于交通流具有复杂的非线性动力学特性, 物理学家和力学家进行了深入研究<sup>[1,2]</sup>. 为了探讨交通现象的内在机理, 人们提出了很多交通流模型. 如 1961 年 Newell<sup>[3]</sup>给出了一阶常微分方程形式的车辆跟驰模型, 并首次提出了优化速度函数的概念. 1995 年 Bando 等<sup>[4]</sup>提出了优化速度模型, 采用二阶常微分方程和不同形式的优化速度函数进行数学描述, 改进了 Newell 的工作. 他们研究了周期边界条件下的交通拥堵现象, 给出了一个简单的稳定性条件. 1999 年 Nagatani<sup>[5]</sup>提出了差分形式的跟驰模型, 并分析了次近邻车辆对交通流的影响. 同年, Lenz 等<sup>[6]</sup>在优化速度模型的基础上提出了更为通用的模型——多车辆作用模型, 指出当前车的最近邻车具有最大的权值, 而对前方其他车辆之间的敏感度没有限制权值的大小和比例. 2003—2004 年间, Hasebe, Nakayama 和 Sugiyama<sup>[7,8]</sup>提出了推广的跟驰模型, 将优化速度

函数推广到  $k$  个变量, 并做了线性分析. 随后, 葛红霞和戴世强<sup>[9]</sup>又进行了相关的非线性分析.

缓解交通拥堵是一个重要问题, 许多学者从不同的方面做了大量研究工作. 如 Kerner 等<sup>[10]</sup>研究了弱非均匀交通流中的交通拥堵问题, 给出了高速公路上交通拥堵随时间演化的一些宏观特性. Komatsu 等<sup>[11]</sup>讨论了在优化速度模型中的交通拥堵现象; Treiber 等<sup>[12]</sup>则进行了交通拥堵的微观模拟.

值得注意的是, 在进行交通拥堵控制时, 耦合映射(CM)跟驰模型<sup>[13,14]</sup>可发挥重要作用, 它是车辆跟驰模型的一种离散版本, 不仅可用来揭示多种交通现象, 而且在数值模拟中算法简洁, 适于描述复杂的交通控制问题. CM 跟驰模型可分为两类: 一类是混沌 CM 跟驰模型, 把优化速度作为一个混沌映射<sup>[13]</sup>, 每一辆车就代表了一个混沌状态或行为. 另一类是非混沌 CM 跟驰模型<sup>[14]</sup>, 其中优化速度函数是原来的函数, 每辆车的行为不表示混沌状态. 1999 年, Konishi 等<sup>[15]</sup>利用非混沌的 CM 跟驰模型, 通过设置时滞反馈控制项, 研究了开放边界条件下单车道交通流的运行控制问题, 提出了抑制交通拥堵的方案,

<sup>\*</sup> 国家重点基础研究发展规划(批准号:2006CB705500)、国家自然科学基金重点项目(批准号:10532060)、国家自然科学基金(批准号:10471039, 10602025)、教育部博士点基金(批准号:20040280014)、上海市重点学科建设基金(批准号:Y0103)和浙江省自然科学基金(批准号:Y606268)资助的课题.

† E-mail: sqdai@shu.edu.cn

并进行了数值模拟. 2006 年, 赵小梅和高自友<sup>[16]</sup>在文献 15]的基础上, 提出了更为简单有效的交通拥堵控制方法, 设置反馈控制项为正比于当前车与其前方最近邻车辆的相对速度, 利用稳定性理论求得了反馈增益. 他们不仅用单个反馈参数取代了文献 [15] 的四个反馈参数, 进行了严格的数学分析, 而且通过数值模拟发现经这种控制后车流量增加的幅度大于文献 15]的结果, 取得了更好的交通拥堵控制效果. 我们感兴趣的是如何从当前车的所有前方车辆中获取更多的信息来更有效地控制交通拥堵. 于是, 我们试图将智能交通运输系统 (intelligent transportation system, 简记为 ITS) 提供的交通诱导信息引入拥堵控制. 在本文中, 我们首先提出一种基于 ITS 应用的 CM 跟驰模型, 其中除了考虑当前车与最近邻车辆的相对速度外, 还借助于 ITS 计及前方若干对次近邻车辆间的相对速度, 亦即采用 ITS 提供的诱导信息, 可以更及时准确地把握前方的交通状况并采取措施、控制车速, 使车辆处于更佳运行状态, 以便减少拥堵. 这样, 我们可以从微观模型出发, 分析 ITS 的应用对改善交通状况的效果.

## 2. CM 跟驰模型

文献 15] 在开放边界条件下研究了 CM 跟驰模型, 下面简述有关的思路和结果. 设  $x_0(n) > 0$  是头车在  $t = nT$  时间 ( $T$  为间隔时间,  $n$  为整数) 的位置;  $v_0$  是常数,  $v_0 > 0$ , 它表示头车的速度.  $x_0(n) > 0$  是头车的初始位置,  $x_i(0) > 0$  是  $t = nT$  时刻头车后方第  $i$  辆车的位置,  $v_i(n)$  是第  $i$  辆车在此时刻的速度,  $N$  是所研究的车辆数. 第  $i$  辆车在  $t = (n + 1)T$  时刻的位置可以表示为

$$x_i(n + 1) = v_i(n)T + x_i(n) \quad (i = 0, 1, 2, \dots, N - 1).$$

将跟从车辆的速度用下列优化速度函数表示<sup>[13]</sup>:

$$v_i(n + 1) = \alpha_i [v_i^{opt}(y_i(n)) - v_i(n)]T + v_i(n),$$

其中  $\alpha_i > 0$  是第  $i$  辆车司机的敏感系数;  $v_i^{opt}(y_i(n))$  是优化速度函数, 它只依赖于车头间距  $y_i(n)$ , 即

$$y_i(n) = x_{i-1}(n) - x_i(n).$$

与文献 15] 同, 选取优化速度函数为

$$v_i^{opt}[y_i(n)] = \frac{v_i^{\max}}{2} \left[ 1 + \bar{H}_{\text{sat}} \left( 2 \frac{y_i(n) - \eta_i}{\xi_i} \right) \right],$$

其中  $v_i^{\max}$  是第  $i$  辆车的最大速度,  $v_i^{\max} > 0$ ;  $\eta_i$  是中性间距,  $\eta_i > 0$ ;  $\xi_i$  是参数,  $\xi_i > 0$ ;  $\bar{H}_{\text{sat}}$  为饱和函数,

$$\bar{H}_{\text{sat}}(\rho) = \begin{cases} +1 & (\rho > 1), \\ \rho & (-1 \leq \rho \leq 1), \\ -1 & (\rho < -1). \end{cases}$$

为了避免撞车和倒车, 同文献 15] 一样, 假设 (i) 头车不受其他车辆的影响; (ii) 头车的速度  $v_0$  小于所有跟从车辆的最大速度, 即

$$v_0 < v_i^{\max} \quad (i = 1, 2, \dots, N - 1);$$

(iii) 为防止撞车和车辆倒行, 所有的车辆都遵循如下“瞬间刹车”规则: 如果

$$y_i(n) < y_i^{\min},$$

则

$$x_i(n + 1) = x_i(n),$$

即

$$v_i(n + 1) = 0.$$

于是, 第  $i$  辆车的动力学特性可描述为

$$v_i(n + 1) = \alpha_i [v_i^{opt}(y_i(n)) - v_i(n)]T + v_i(n), \quad (1)$$

$$y_i(n + 1) = v_{i-1}T - v_i(n)T + y_i(n). \quad (2)$$

模型 (1) (2) 的稳态为

$$[v_i^* \quad y_i^*]^T = \left[ v_0 \quad \frac{v_0}{r_i} - \frac{\xi_i}{2} \eta_i \right]^T,$$

其中

$$r_i = \frac{v_i^{\max}}{\xi_i}.$$

利用稳定性理论, 文献 15] 给出了模型 (1) (2) 的无拥堵条件为

$$\frac{8 + \alpha_i T(\alpha_i T - 8)}{\alpha_i T^2(\alpha_i T - 6)} \leq r_i \leq \frac{\alpha_i}{2 + \alpha_i T}, \quad (3)$$

其中

$$r_i = v_i^{\max} / \xi_i.$$

图 1(a) 是无控制模型 (1) (2) 的时空斑图, 可见交通拥堵十分严重. 说明在没有添加控制项的模型中, 系统十分不稳定. 图 1(b) 是模型 (1) (2) 中第 1 辆、第 25 辆和第 50 辆车的速度演化图. 从图 1(b) 容易看出, 车的速度起伏很大, 每一辆车在短时间内都不停地加速再减速.

在上述基础上, Konishi, Kokame 和 Hirata<sup>[15]</sup> 提出一个模型, 我们称之为 KKH 模型. 这一模型将时滞反馈控制信号项  $\bar{u}_i(n)$  加到 (1) 式的右端, 而  $\bar{u}_i(n)$  由下式确定:

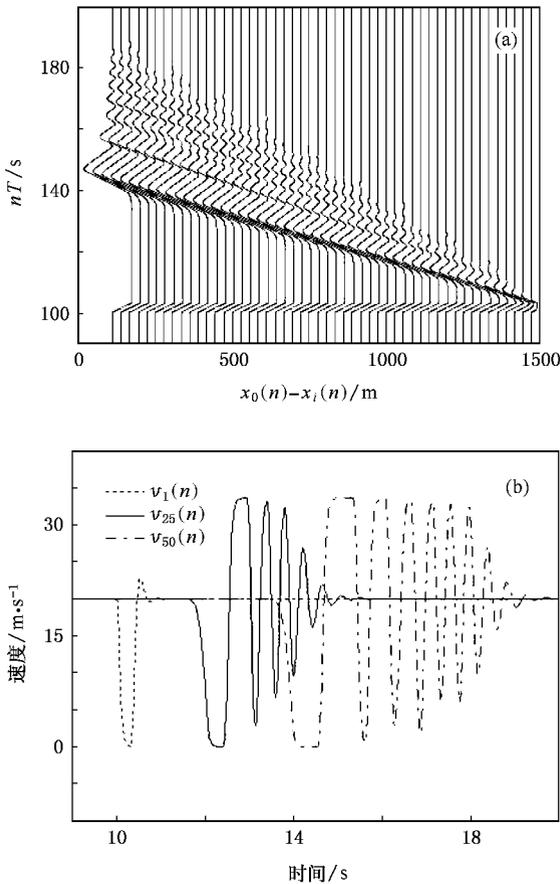


图 1 无控制模型的数值模拟图 (a)时空斑图 (b)三辆车的速度演化

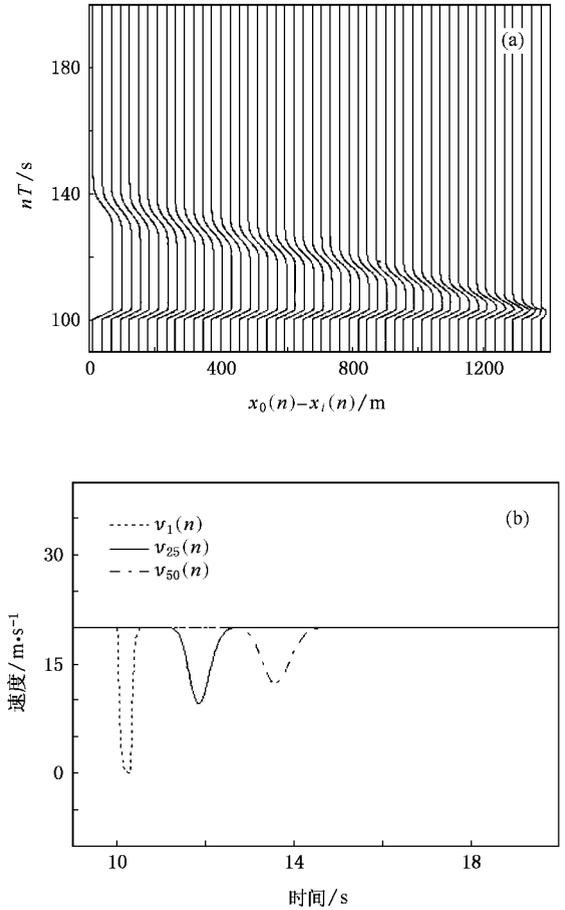


图 2 KKH 反馈控制模型的数值模拟图 (a)时空斑图, (b)三辆车的速度演化

$$w_i(n+1) = k_i^a w_i(n) + k_i^b [v_i(n) - v_i(n-1)],$$

$$\bar{u}_i(n) = k_i^c w_i(n) + k_i^d [v_i(n) - v_i(n-1)],$$

其中  $k_i^a, k_i^b, k_i^c, k_i^d$  是实数 称为反馈增益系数。

图 2(a) 是 KKH 反馈控制模型的时空斑图. 从图 2(a) 可以看出, 交通拥堵明显缓解. 通过图 2(b) 的 KKH 反馈控制模型中三辆车的速度变化图可知, 速度变化已经比较平稳, 控制信号项对抑制交通拥堵的效果比较明显.

赵小梅和高自友<sup>[16]</sup>将上述反馈信号项  $\bar{u}_i(n)$  简化为

$$\bar{u}_i(n) = k(v_{i-1}(n) - v_i(n)),$$

即反馈增益系数只剩下一个  $k$ , 我们称由此建立的模型为赵-高模型. 为便于比较, 我们将赵-高模型的数值模拟图与本文新建模型的数值模拟图放在一起.

### 3. 采用 ITS 诱导信息的控制方法

假设所有的车辆都装备有 ITS, 并且第  $i$  辆车能

够得到前方所有车辆的信息. 于是, 我们设计反馈信号项  $u_i(n)$  为

$$u_i(n) = \sum_{l=1}^s k_l [v_{i-l}(n) - v_{i-l+1}(n)]$$

$$(s \geq 2, i = 1, 2, \dots, N-1),$$

其中  $k_l > 0 (l = 1, 2, \dots, s)$  是反馈增益, 它们是可以调节的. 将上述  $u_i(n)$  加到 (1) 式等号右端, 就有

$$v_i(n+1) = \alpha_i [v_i^n(y_i(n)) - v_i(n)]T$$

$$+ v_i(n) + u_i(n), \quad (4)$$

$$y_i(n+1) = v_{i-1}(n)T - v_i(n)T$$

$$+ y_i(n). \quad (5)$$

当第  $i-1$  辆车不以常数  $v_0$  运行时, 则稳态附近的受扰模型可以描述为

$$\begin{bmatrix} \delta v_i(n+1) \\ \delta y_i(n+1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - \alpha_i T - k_1 & \alpha_i r_i T \\ -T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta v_i(n) \\ \delta y_i(n) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{bmatrix} k_1 - k_2 & k_2 - k_3 & \dots & k_{s-1} - k_s & k_s \\ T & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
& \times \begin{bmatrix} \delta v_{i-1}(n) \\ \delta v_{i-2}(n) \\ \vdots \\ \delta v_{i-s}(n) \end{bmatrix}, \tag{6}
\end{aligned}$$

这里

$$\delta v_i(n) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} \delta v_i(n) \\ \delta v_{i-1}(n) \end{bmatrix}. \tag{7}$$

$$\delta v_i(n) = v_i(n) - v_i^*,$$

$$\delta y_i(n) = y_i(n) - y_i^*(n).$$

从  $\delta v_{i-1}(n)$  到  $\delta v_i(n)$  的转换函数向量为

$$\begin{aligned}
G_i(z) &= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} z - 1 + \alpha_i T + k_1 & -\alpha_i r_i T \\ T & z - 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} k_1 - k_2 & k_2 - k_3 & \dots & k_{s-1} - k_s & k_s \\ T & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} -1 + z & \alpha_i r_i T \\ -T & -1 + k_1 + r_i T + z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 - k_2 & k_2 - k_3 & \dots & k_{s-1} - k_s & k_s \\ T & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} / p_i(z) \\
&= [(k_1 - k_2)(z - 1) + \alpha_i r_i T^2 (k_2 - k_3)(z - 1) \dots (k_{s-1} - k_s)(z - 1) k_s(z - 1)] p_i(z), \tag{8}
\end{aligned}$$

式中

$$p_i(z) = z^2 + a_i z + b_i,$$

其中

$$\begin{aligned}
a_i &= \alpha_i T + k_1 - 2, \\
b_i &= 1 - \alpha_i T - k_1 + \alpha_i r_i T^2. \tag{9}
\end{aligned}$$

由线性离散系统的稳定性理论<sup>[17]</sup>，反馈增益  $k_l$  ( $l = 1, 2, \dots, s$ ) 必须满足两点。一是  $p_i(z)$  是稳定的；二是

$$\begin{aligned}
|G_i(z)|_{\max} &\leq 1 \\
(|z| = 1, i = 1, 2, \dots, N - 1). \tag{10}
\end{aligned}$$

第一点十分复杂，难以得出关于  $k_l$  比较简洁的结论。考虑到与当前车的前方距离越大的前车对当前车影响越小，所以  $k_l$  是  $l$  的减函数，即

$$\frac{k_{l+1}}{k_l} < 1.$$

适当选取  $k_l$ ，我们就可以给出系统(6)(7)无拥堵的一个充分条件。

仿照文献[9]的做法，假设

$$\begin{aligned}
k_l &= \frac{2}{3^l} R \quad (l = 1, 2, \dots, s - 1), \\
k_s &= \frac{1}{3^{s-1}} R \quad (R > 0). \tag{11}
\end{aligned}$$

易知

$$\sum_{l=1}^s k_l = R.$$

通过这一假设，我们把上述多反馈增益的控制问题转化为单参数问题，称  $R$  为反馈增益因子。

于是，经细致分析得到模型(4)(5)稳定的充分条件，若满足这些条件之一，则无交通拥堵。

条件 I

$$0 < \alpha_i r_i T^2 < 2,$$

$$\frac{2}{9} (12 + \alpha_i r_i T^2 - 6\alpha_i T) \geq 0,$$

$$\alpha_i T - 2 \geq 0,$$

且  $R$  满足

$$\begin{aligned}
& \frac{3}{2} (\alpha_i r_i T^2 - \alpha_i T + 1) < R \\
& \leq \min \left\{ \frac{3(4 - 2\alpha_i T + \alpha_i r_i T^2)}{4}, R_{11} \right\}, \tag{12}
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
R_{11} &= \left[ \frac{2}{9} (\alpha_i r_i T^2 - 6\alpha_i T + 12) + \sqrt{\Delta_1} \right] \\
&\times \left[ 2 \left( \frac{2}{9} - 11 \times 9^{-s} \right) \right]^{-1}, \\
\Delta_1 &= \frac{4(12 - 6\alpha_i T + \alpha_i r_i T^2)^2}{81} + 4 \left( \frac{2}{9} - 11 \times 9^{-s} \right) \\
&\times (\alpha_i T - 2) [2 + \alpha_i T(r_i T - 1)].
\end{aligned}$$

条件 II

$$0 < \alpha_i r_i T^2 < 2,$$

$$\frac{2}{9} (12 + \alpha_i r_i T^2 - 6\alpha_i T) \geq 0,$$

$$0 < \alpha_i T < 2,$$

$$\Delta_1 > 0,$$

且  $R$  满足

$$\begin{aligned}
& \frac{3}{2} (\alpha_i r_i T^2 - \alpha_i T + 1) < R \\
& < \min \left\{ \frac{3(4 - 2\alpha_i T + \alpha_i r_i T^2)}{4}, R_{12} \right\}, \tag{13}
\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} & \max\left\{\frac{3}{2}(\alpha_i r_i T^2 - \alpha_i T + 1), R_{11}\right\} \\ & < R < \frac{\mathfrak{X}(4 - 2\alpha_i T + \alpha_i r_i T^2)}{4}, \end{aligned} \quad (14)$$

其中

$$\begin{aligned} R_{12} = & \left[ \frac{2}{9}(\alpha_i r_i T^2 - 6\alpha_i T + 12) - \sqrt{\Delta_1} \right] \\ & \times \left[ 2\left(\frac{2}{9} - 11 \times 9^{-s}\right) \right]^{-1}. \end{aligned}$$

条件 III

$$0 < \alpha_i r_i T^2 < 2,$$

$$\frac{2}{9}(12 + \alpha_i r_i T^2 - 6\alpha_i T) < 0,$$

$$(\alpha_i T - 2) [2 + \alpha_i T(r_i T - 2)] > 0,$$

且  $R$  满足

$$\begin{aligned} & \max\left\{\frac{3}{2}(\alpha_i r_i T^2 - \alpha_i T + 1), R_{11}\right\} \\ & < R < \frac{\mathfrak{X}(4 - 2\alpha_i T + \alpha_i r_i T^2)}{4}. \end{aligned} \quad (15)$$

条件 IV

$$0 < \alpha_i r_i T^2 < 4,$$

$$\frac{2}{9}(\alpha_i r_i T^2 - 6\alpha_i T) \geq 0,$$

$$2 - 2r_i - \alpha_i r_i T \leq 0,$$

且  $R$  满足

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2}(\alpha_i r_i T^2 - \alpha_i r_i T) < R \\ & < \min\left\{\frac{3}{2}\left(\frac{4 - 2\alpha_i r_i T + \alpha_i r_i T^2}{2}\right), \right. \\ & \left. \frac{3}{2}(1 - \alpha_i r_i T + \alpha_i r_i T^2), R_{21}\right\}, \end{aligned} \quad (16)$$

其中

$$\begin{aligned} R_{21} = & \left[ \frac{2}{9}(\alpha_i r_i T^2 - 6\alpha_i T + 12) + \sqrt{\Delta_2} \right] \\ & \times \left[ 2\left(\frac{2}{9} - 11 \times 9^{-s}\right) \right]^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 = & \left[ \frac{2}{9}(\alpha_i r_i T^2 - 6\alpha_i T + 12) \right]^2 \\ & - 4\left(\frac{2}{9} - 11 \times 9^{-s}\right)\alpha_i T^2(2 - 2r_i - \alpha_i r_i T). \end{aligned}$$

条件 V

$$0 < \alpha_i r_i T^2 < 4,$$

$$\frac{2}{9}(\alpha_i r_i T^2 - 6\alpha_i T) \geq 0,$$

$$2 - 2r_i - \alpha_i r_i T > 0,$$

$$\Delta_2 > 0,$$

且  $R$  满足

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2}(\alpha_i r_i T^2 - \alpha_i r_i T) < R \\ & < \min\left\{\frac{3}{2}\left(\frac{4 - 2\alpha_i r_i T + \alpha_i r_i T^2}{2}\right), \right. \\ & \left. \frac{3}{2}(1 - \alpha_i r_i T + \alpha_i r_i T^2), R_{21}\right\}, \end{aligned} \quad (17)$$

或

$$\begin{aligned} & \max\left\{\frac{3}{2}(\alpha_i r_i T^2 - \alpha_i r_i T), R_{22}\right\} < R \\ & < \min\left\{\frac{3}{2}\left(\frac{4 - 2\alpha_i r_i T + \alpha_i r_i T^2}{2}\right), \right. \\ & \left. \frac{3}{2}(1 - \alpha_i r_i T + \alpha_i r_i T^2)\right\}, \end{aligned} \quad (18)$$

其中

$$\begin{aligned} R_{21} = & \left[ \frac{2}{9}(\alpha_i r_i T^2 - 6\alpha_i T + 12) - \sqrt{\Delta_2} \right] \\ & \times \left[ 2\left(\frac{2}{9} - 11 \times 9^{-s}\right) \right]^{-1}. \end{aligned}$$

条件 VI

$$0 < \alpha_i r_i T^2 < 4,$$

$$\frac{2}{9}(\alpha_i r_i T^2 - 6\alpha_i T) < 0,$$

$$2 - 2r_i - \alpha_i r_i T < 0,$$

且  $R$  满足

$$\begin{aligned} & \max\left\{\frac{3}{2}(\alpha_i r_i T^2 - \alpha_i r_i T), R_{21}\right\} < R \\ & < \min\left\{\frac{3}{2}\left(\frac{4 - 2\alpha_i r_i T + \alpha_i r_i T^2}{2}\right), \right. \\ & \left. \frac{3}{2}(1 - \alpha_i r_i T + \alpha_i r_i T^2)\right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

条件 VII

$$0 < \alpha_i r_i T^2 < 4,$$

$$\left(\frac{2}{9} - \frac{11}{9^{-s}}\right)(1 - \alpha_i T + \alpha_i r_i T^2)^2$$

$$- \frac{2}{9}(6 - 6\alpha_i T + \alpha_i r_i T^2)(1 - \alpha_i T + \alpha_i r_i T^2)$$

$$+ 2 - 2\alpha_i T + \alpha_i^2 (T^2 - r_i T^3) \geq 0,$$

且  $R$  满足

$$R = \frac{3}{2} (1 - \alpha_i T + \alpha_i r_i T^2), \quad (20)$$

$$\frac{3}{2} (\alpha_i r_i T^2 - \alpha_i T) < R < \frac{3}{2} \left( \frac{4 - 2\alpha_i T + \alpha_i r_i T^2}{2} \right). \quad (21)$$

上述条件的证明见附录.

### 4. 数值模拟

我们的模拟是在开放边界条件下,基于 ITS 的 CM 交通模型进行的.所有交通的参数均取自文献 [15] 即  $\alpha_i = 2.0 \text{ s}^{-1}$ ,  $T = 0.1 \text{ s}$ ,  $\eta = 25.0 \text{ m}$ ,  $\xi = 23.3 \text{ m}$ ,  $v^{\max} = 33.6 \text{ m/s}$ ,  $\eta^{\min} = 7.02 \text{ m}$ ,  $r = v^{\max} / \xi \approx 1.44 \text{ s}^{-1}$ .

为简单起见,我们从稳态开始研究系统的运行状况.初始条件设为

$$\begin{aligned} x_i(0) &= \sum_{j=i+1}^N y_j^*, \\ y_j(0) &= y_j^*, \\ v_0(0) &= v_i^* \quad (i = 1, 2, \dots, N-1). \end{aligned}$$

令头车突然停止一下再开动,

$$x_0(n) = 0 \quad (100 \leq nT \leq 102).$$

现在将本文的模型与 KKH 模型进行比较,看模型受外部干扰后的演化情况.为减少或抑制交通拥堵,在本文的模型中,按下述方式设计反馈增益因子  $R$ ,进而由 (11) 式确定反馈增益  $k_i$ .

首先,我们要检验系统中的参数是否满足有关条件.将  $\alpha_i, r_i (i = 1, \dots, s), T$  的值代入下式(其他情况均无解):

$$\left( \frac{2}{9} - 11 \times 9^{-s} \right) R^2 - \frac{2}{9} [12 + \alpha_i T (r_i T - 6)] R - (\alpha_i T - 2) [2 + \alpha_i T (r_i T - 1)] \geq 0,$$

得到

$$\left( \frac{2}{9} - 11 \times 9^{-s} \right) R^2 - 2.4064R + 3.29184 \geq 0. \quad (22)$$

当  $s = 2$  时 (22) 式可化为

$$\frac{7}{81} R^2 - 2.4064R + 3.29184 \geq 0.$$

解之得  $26.4028 \leq R_1, 1.4427 \geq R_2$ .

当  $s = 3$  时 (22) 式可化为

$$\frac{151}{729} R^2 - 2.4064R + 3.29184 \geq 0,$$

解之得  $10.0338 \leq R_1, 1.58389 \geq R_2$ .

当  $s = 10$  时 (22) 式可化为

$$\frac{774840967}{3486784401} R^2 - 2.4064R + 3.29184 \geq 0,$$

解之得  $9.22261 \leq R_1, 1.60619 \geq R_2$ .

根据上述结果,结合实际情况,我们认为需要获取 ITS 信息的前车数当取  $s = 3$  为宜<sup>[9]</sup>,并且  $R$  满足  $1.2432 \leq R < 1.4427$ .

我们不妨选取  $R = 1.44$ ,则所有反馈增益可表示如下:对于第 2 辆车,  $k_1 = 0.96, k_2 = 0.48$ .对于第  $i (s \geq i > 2)$  辆车,  $k_1 = 0.96, k_2 = 0.32, k_3 = 0.16$ .

在模拟过程中,我们首先使头车突然停止 0.3  $T$  来观察整个交通流的变化情况,然后分别对无控制模型 (1) (2) KKH 模型、赵-高模型和本文的模型在上述条件下进行数值模拟.

图 3 (a) 是我们基于 ITS 所建立模型的时空斑

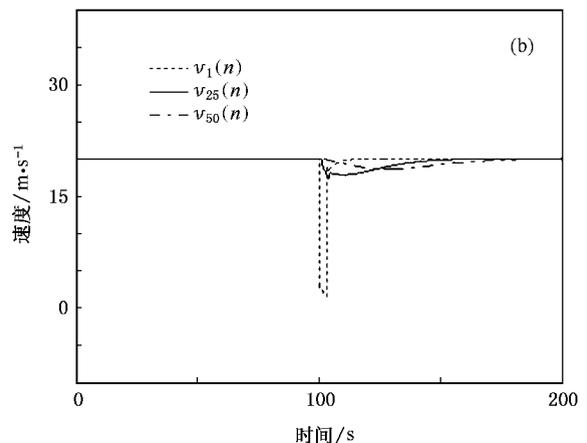
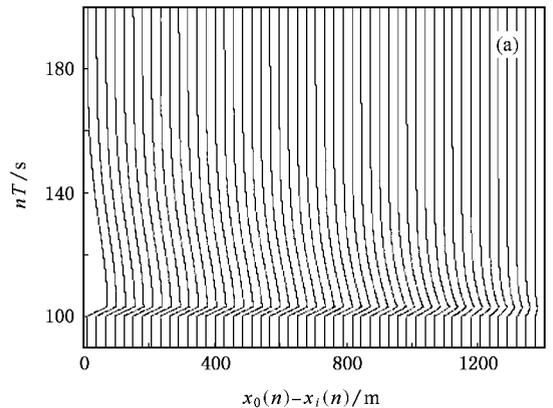


图 3 模型 (4) (5) 的数值模拟图 (a) 时空斑图 (b) 三辆车的速度演化

图.从图 3(a)可见,交通拥挤较 KKH 反馈控制模型有了进一步缓解.由图 3(b)可见,在车流受到外界的扰动时各车辆的速度平缓地发生变化,而且较 KKH 模型速度波动更小,没有突然加速又突然减速的现象.这一方面说明我们的控制方法更加有效,另一方面数值模拟的结果也验证了我们的理论推导是正确的.同时还可以看出,本文模型的控制符号项比较简洁.

下面再与赵-高模型进行比较.由于本文的模型比赵-高模型考虑了更多车辆的信息,所以司机可以根据前方车辆的运行情况及早采取措施,控制当前车辆运行速度,进而消除或缓解交通拥堵,达到更好的交通运行状态.理论推导的结果说明,赵-高模型仅当  $0.829 < k \leq 0.914$  时,模型是稳定的.而在本文的模型中,当  $s = 3$  时,  $k_1$  (相当于赵-高模型中  $k$ ) 可以取为  $0.8288 < k_1 \leq 0.9618$ ,取值范围有了进一步的拓展.由此可以看出,由于考虑了更多车辆的信息,本文的模型较赵-高模型具有更强的适应性.当

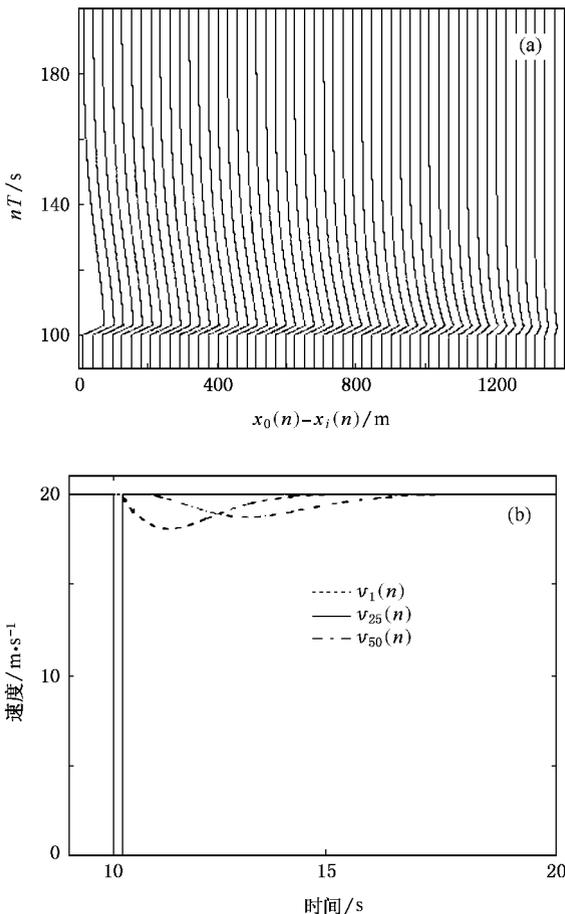


图 4 赵-高模型的数值模拟图 (a)时空斑图 (b)三辆车的速度演化

$0.914 < k_1 \leq 0.9618$  时,赵-高模型是不稳定的,而本文的模型是稳定的.图 4(a)是赵-高模型的时空斑图,图 4(b)是赵-高模型中三辆车的速度变化.仅从图 3(b)和图 4(b)就可以明显看出,在车流受到外界的扰动时,本文模型中各车辆的速度变化较赵-高模型更加平缓.

## 5. 结 论

本文在文献 [15] 的基础上,借助 ITS,提出了一个新的 CM 跟驰模型.对单车道交通流设计了反馈控制项,并采用文献 [9] 的向前递减的反馈增益形式,化多参数控制问题为单参数控制问题,然后基于稳定性理论得到了无交通拥堵的充分条件,以此来研究在 CM 跟驰模型中新的控制信号项对抑制交通拥堵的效果.

将我们所建立的模型与无控制模型、KKH 模型及赵-高模型在相同的基本参数下进行了数值模拟和比较.结果发现,本文模型得到的交通运行状况远优于无控制情形,也优于 KKH 模型的控制结果,与赵-高模型相比,由于考虑了更多的因素,可使系统的稳定度增加,车辆速度更加平稳.

另外,如要充分利用 ITS 在交通控制中的作用,还需要做更精细的分析,例如改善优化速度函数、考虑后车信息等.有关这方面的研究,我们将另文论述.

## 附 录

首先作  $z$  变换.令

$$z = \frac{w + 1}{w - 1},$$

则由 Hurwitz 稳定性理论知,如果多项式  $p_i(z)$  的系数满足如下条件:

$$1 + a_i + b_i > 0,$$

$$1 - b_i > 0,$$

$$1 - a_i + b_i > 0,$$

那么  $p_i(z)$  是稳定的.解之得

$$\alpha_i r_i T^2 - \alpha_i T < k_1 < \frac{4 - 2\alpha_i T + \alpha_i r_i T^2}{2}, \quad (A1)$$

且

$$0 < \alpha_i r_i T^2 < 4. \quad (A2)$$

再由

$$\|G_i(z)\|_{\max} \leq 1 \quad (|z| = 1, i = 1, 2, \dots, N-1)$$

可得

$$\begin{aligned} & \mathcal{X} (k_1 - k_2)^2 + 2\alpha_i r_i T^2 (k_1 - k_2) \\ & + \alpha_i^2 r_i^2 T^4 + 2 \sum_{l=2}^{s-1} (k_l - k_{l+1})^2 + 2k_s^2 \\ & \leq \alpha_i^2 + (b_i - 1)^2 \cos\theta + 4b_i \cos^2\theta \\ & + \left[ \mathcal{X} (k_1 - k_2)^2 - 2\alpha_i r_i T^2 (k_1 - k_2) \right. \\ & \left. + 2 \sum_{l=2}^{s-1} (k_l - k_{l+1})^2 + 2k_s^2 \right] \cos\theta \\ & (\forall \theta \in [0, 2\pi]). \end{aligned}$$

化简后可得

$$\begin{aligned} & \mathcal{X} (1 - \cos\theta) \left[ 2 + k_1^2 - 2\alpha_i T + \alpha_i^2 T^2 \right. \\ & - \alpha_i^2 r_i T^3 - k_1 (2 - 2\alpha_i T + \alpha_i r_i T^2) \\ & \left. + \mathcal{X} (-1 + k_1 + \alpha_i T - \alpha_i r_i T^2) \cos\theta \right. \\ & \left. - \sum_{l=1}^{s-1} (k_l - k_{l+1})^2 + (k_1 - k_2) \alpha_i r_i T^2 - k_s^2 \right] \geq 0 \\ & (\forall \theta \in [0, 2\pi]). \end{aligned}$$

因为  $1 - \cos\theta \geq 0, \forall \theta \in [0, 2\pi]$ , 所以上式可化为

$$\begin{aligned} & \mathcal{X} (-1 + k_1 + \alpha_i T - \alpha_i r_i T^2) \cos\theta + 2 + k_1^2 - 2\alpha_i T \\ & + \alpha_i^2 T^2 - \alpha_i^2 r_i T^3 - k_1 (2 - 2\alpha_i T + \alpha_i r_i T^2) \\ & + \alpha_i r_i T^2 (k_1 - k_2) - \sum_{l=1}^{s-1} (k_l - k_{l+1})^2 - k_s^2 \geq 0 \\ & (\forall \theta \in [0, 2\pi]). \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

又因为  $|\cos\theta| \leq 1$ , 所以(A3)式又可按如下三种情形进行简化.

**情形 1** 当  $-1 + k_1 + \alpha_i T - \alpha_i r_i T^2 > 0$  时, 有

$$\begin{aligned} & -\mathcal{X} (-1 + k_1 + \alpha_i T - \alpha_i r_i T^2) + 2 + k_1^2 \\ & - 2\alpha_i T + \alpha_i^2 T^2 - \alpha_i^2 r_i T^3 \\ & - k_1 (2 - 2\alpha_i T + \alpha_i r_i T^2) - \sum_{l=1}^{s-1} (k_l - k_{l+1})^2 \\ & + (k_1 - k_2) \alpha_i r_i T^2 - k_s^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

**情形 2** 当  $-1 + k_1 + \alpha_i T - \alpha_i r_i T^2 < 0$  时, 有

$$\begin{aligned} & \mathcal{X} (-1 + k_1 - \alpha_i T + \alpha_i^2 r_i T^2) + 2 + k_1^2 \\ & - 2\alpha_i T + \alpha_i^2 T^2 - \alpha_i^2 r_i T^3 \\ & - k_1 (2 - 2\alpha_i T + \alpha_i r_i T^2) - \sum_{l=1}^{s-1} (k_l - k_{l+1})^2 \\ & + (k_1 - k_2) \alpha_i r_i T^2 - k_s^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

**情形 3** 当  $-1 + k_1 + \alpha_i T - \alpha_i r_i T^2 = 0$  时, 有

$$\begin{aligned} & 2 + k_1^2 - 2\alpha_i T + \alpha_i r_i T^2 - \alpha_i^2 r_i T^3 \\ & - k_1 (2 - 2\alpha_i T + \alpha_i r_i T^2) - \sum_{l=1}^{s-1} (k_l - k_{l+1})^2 \\ & + (k_1 - k_2) \alpha_i r_i T^2 - k_s^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

我们先求解情形 1.

由  $-1 + k_1 + \alpha_i T - \alpha_i r_i T^2 > 0$ , 并考虑到(A1)和(A2)式,

可得

$$\begin{aligned} & 1 - \alpha_i T + \alpha_i r_i T^2 < k_1 \\ & < 2 - 2\alpha_i T + \frac{1}{2} \alpha_i r_i T^2, \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

$$0 < \alpha_i r_i T^2 < 2. \quad (\text{A8})$$

将  $k_l = \frac{2}{3^l} R (l = 1, 2, \dots, s-1), k_s = \frac{1}{3^{s-1}} R, R > 0$  代入(A4)

式, 可得

$$\begin{aligned} & \left( \frac{2}{9} - 11 \times 9^{-s} \right) R^2 - \frac{2}{9} [12 + \alpha_i R (r_i T - 6)] R \\ & - (\alpha_i T - 2) [2 + \alpha_i R (r_i T - 1)] \geq 0. \end{aligned} \quad (\text{A9})$$

令

$$A_1 = \frac{2}{9} - \frac{11}{9^{-s}},$$

$$B_1 = \frac{2}{9} (12 + \alpha_i r_i T^2 - 6\alpha_i T),$$

$$C_1 = \alpha_i T - 2,$$

$$D_1 = 2 + \alpha_i r_i T^2 - \alpha_i T.$$

当  $B_1 \geq 0$  时, 必有  $D_1 \geq 0$ ; 当  $C_1 \geq 0$  时, 有  $\Delta_1 = B_1^2 + 4A_1 C_1 D_1 \geq B_1^2$ . 所以, 我们得到

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2} (\alpha_i r_i T^2 - \alpha_i T + 1) < R \\ & < \min \left\{ \frac{3(4 - 2\alpha_i T + \alpha_i r_i T^2)}{4}, R_{11} \right\}, \end{aligned}$$

其中

$$R_{11} = \frac{B_1 + \sqrt{\Delta_1}}{2A_1}.$$

当  $C_1 < 0$  即  $0 < \alpha_i T < 2$  时, 有  $\Delta_1 = B_1^2 + 4A_1 C_1 D_1 < B_1^2$ . 所以当  $\Delta_1 > 0$  时, 我们得到

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2} (\alpha_i r_i T^2 - \alpha_i T + 1) < R \\ & < \min \left\{ \frac{3(4 - 2\alpha_i T + \alpha_i r_i T^2)}{4}, R_{12} \right\}, \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} & \max \left\{ \frac{3}{2} (\alpha_i r_i T^2 - \alpha_i T + 1), R_{11} \right\} \\ & < R < \frac{3(4 - 2\alpha_i T + \alpha_i r_i T^2)}{4}, \end{aligned}$$

其中

$$R_{12} = \frac{B_1 - \sqrt{\Delta_1}}{2A_1}.$$

当  $B_1 < 0$  且  $C_1 D_1 > 0$  时, 有  $\Delta_1 = B_1^2 + 4A_1 C_1 D_1 \geq B_1^2$ . 所以, 我们得到

$$\begin{aligned} & \max \left\{ \frac{3}{2} (\alpha_i r_i T^2 - \alpha_i T + 1), R_{11} \right\} \\ & < R < \frac{3(4 - 2\alpha_i T + \alpha_i r_i T^2)}{4}. \end{aligned}$$

接着, 再求解情形 2.

由  $-1 + k_1 + \alpha_i T - \alpha_i r_i T^2 < 0$ , 并考虑到 (A1) 和 (A2) 式, 可得

$$\alpha_i r_i T^2 - \alpha_i r_i T < k_1$$

$$< \min \left\{ \frac{4 - 2\alpha_i r_i T + \alpha_i r_i T^2}{2} (1 - \alpha_i r_i T + \alpha_i r_i T^2) \right\}, \quad (\text{A10})$$

$$0 < \alpha_i r_i T^2 < 4. \quad (\text{A11})$$

将  $k_l = \frac{2}{3^l} R$  ( $l = 1, 2, \dots, s-1$ ),  $k_s = \frac{1}{3^{s-1}} R$ ,  $R > 0$  代入 (A5) 式, 可得

$$\left( \frac{2}{9} - 11 \times 9^{-s} \right) R^2 - \frac{2}{9} \alpha_i T (r_i T - 6) R + \alpha_i T^2 (2 - 2r_i - \alpha_i r_i T) \geq 0. \quad (\text{A12})$$

令

$$B_2 = \frac{2}{9} (\alpha_i r_i T^2 - 6\alpha_i T),$$

$$C_2 = \alpha_i T^2 (2 - 2r_i - \alpha_i r_i T).$$

当  $B_2 \geq 0, C_2 \leq 0$  时, 有  $\Delta_2 = B_2^2 - 4A_1 C_2 \geq B_2^2$ . 所以, 我们得到

$$\frac{3}{2} (\alpha_i r_i T^2 - \alpha_i r_i T) < R < \min \left\{ \frac{3}{2} \left( \frac{4 - 2\alpha_i r_i T + \alpha_i r_i T^2}{2} \right), \frac{3}{2} (1 - \alpha_i r_i T + \alpha_i r_i T^2) \right\}, R_{21}$$

其中

$$R_{21} = \frac{B_2 + \sqrt{\Delta_2}}{2A_1}.$$

当  $C_1 > 0$  时, 有  $\Delta_2 = B_2^2 + 4A_1 C_2 < B_2^2$ . 所以, 当  $\Delta_2 > 0$  时, 我们得到

$$\frac{3}{2} (\alpha_i r_i T^2 - \alpha_i r_i T) < R < \min \left\{ \frac{3}{2} \left( \frac{4 - 2\alpha_i r_i T + \alpha_i r_i T^2}{2} \right), \frac{3}{2} (1 - \alpha_i r_i T + \alpha_i r_i T^2) \right\}, R_{21}$$

或

$$\max \left\{ \frac{3}{2} (\alpha_i r_i T^2 - \alpha_i r_i T), R_{22} \right\} < R$$

$$< \min \left\{ \frac{3}{2} \left( \frac{4 - 2\alpha_i r_i T + \alpha_i r_i T^2}{2} \right), \frac{3}{2} (1 - \alpha_i r_i T + \alpha_i r_i T^2) \right\},$$

其中

$$R_{22} = \frac{B_2 - \sqrt{\Delta_2}}{2A_1}.$$

当  $B_2 < 0$  且  $C_2 < 0$  时, 有  $\Delta_2 = B_2^2 - 4A_1 C_2 > B_2^2$ . 所以, 我们得到

$$\max \left\{ \frac{3}{2} (\alpha_i r_i T^2 - \alpha_i r_i T), R_{21} \right\} < R < \min \left\{ \frac{3}{2} \left( \frac{4 - 2\alpha_i r_i T + \alpha_i r_i T^2}{2} \right), \frac{3}{2} (1 - \alpha_i r_i T + \alpha_i r_i T^2) \right\}.$$

最后, 求解情形 3.

由  $-1 + k_1 + \alpha_i T - \alpha_i r_i T^2 = 0$ , 并考虑到 (A1) 和 (A2) 式, 可得

$$k_1 = 1 - \alpha_i T + \alpha_i r_i T^2, \quad (\text{A13})$$

$$0 < \alpha_i r_i T^2 < 4, \quad (\text{A14})$$

将  $k_l = \frac{2}{3^l} R$  ( $l = 1, 2, \dots, s-1$ ),  $k_s = \frac{1}{3^{s-1}} R$ ,  $R > 0$  代入 (A3) 式, 可得

$$\left( \frac{2}{9} - 11 \times 9^{-s} \right) R^2 - \frac{2}{9} (6 - 6\alpha_i T + \alpha_i r_i T^2) R + 2 - 2\alpha_i T + \alpha_i^2 (T^2 - r_i T^3) \geq 0. \quad (\text{A15})$$

从而,  $R$  满足

$$R = \frac{3}{2} (1 - \alpha_i T + \alpha_i r_i T^2), \frac{3}{2} (\alpha_i r_i T^2 - \alpha_i T) < R < \frac{3}{2} \left( \frac{4 - 2\alpha_i T + \alpha_i r_i T^2}{2} \right), \left( \frac{2}{9} - \frac{11}{9^s} \right) (1 - \alpha_i T + \alpha_i r_i T^2)^2 - \frac{2}{9} (6 - 6\alpha_i T + \alpha_i r_i T^2) (1 - \alpha_i T + \alpha_i r_i T^2) + 2 - 2\alpha_i T + \alpha_i^2 (T^2 - r_i T^3) \geq 0,$$

且

$$0 < \alpha_i r_i T^2 < 4.$$

[1] Whitham G B 1990 *Proc. R. Soc.* **428** 49

[2] Nagatani T, Nakanishi K 1998 *Phys. Rev. E* **57** 6415

[3] Newell G F 1961 *Oper. Res.* **9** 209

[4] Bando M, Hasebe K, Nakayama A 1995 *Phys. Rev. E* **51** 1035

[5] Nagatani T 1999 *Phys. Rev. E* **60** 6395

[6] Lenz H, Wagner C K, Sollacher R 1999 *Euro. Phys. J. B* **7** 331

[7] Hasebe K, Nakayama A, Sugiyama Y 2004 *Phys. Rev. E* **69** 017103

[8] Hasebe K, Nakayama A, Sugiyama Y 2003 *Phys. Rev. E* **68** 026102

[9] Ge H X, Dai S Q 2004 *Phys. Rev. E* **70** 066134

[10] Kerner B S, Konhauser P, Schilker M 1995 *Phys. Rev. E* **51** 6243

- [ 11 ] Komatsu T S ,Sasa S 1995 *Phys. Rev. E* **52** 5574
- [ 12 ] Treiber M ,Hennecke A ,Helbing D 2000 *Phys. Rev. E* **62** 1805
- [ 13 ] Yukawa S ,Kikuchi M 1995 *J. Phys. Soc. Jpn.* **64** 35
- [ 14 ] Tadaki S 1998 *J. Phys. Soc. Jpn.* **67** 2270
- [ 15 ] Konishi K ,Kokame H ,Hirata K 1999 *Phys. Rev. E* **60** 4000
- [ 16 ] Zhao X M ,Gao Z Y 2006 *Physica A* **366** 513
- [ 17 ] Oldenbourg R C ,Sartarius H 1948 *The Dynamics of Automatic Control* ( New York : American Society of Mechanical Engineers ) p189

## A modified coupled map car-following model based on application of intelligent transportation system and control of traffic congestion<sup>\*</sup>

Han Xiang-Lin<sup>1)2)</sup> Jiang Chang-Yuan<sup>1)</sup> Ge Hong-Xia<sup>3)</sup> Dai Shi-Qiang<sup>2)†</sup>

<sup>1)</sup> *School of Science ,Huzhou Teachers College ,Huzhou 313000 ,China*

<sup>2)</sup> *Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics ,Shanghai University ,Shanghai 200072 ,China*

<sup>3)</sup> *Institute of Science ,Ningbo University ,Ningbo 315211 ,China*

( Received 30 September 2006 ; revised manuscript received 2 April 2007 )

### Abstract

A modified coupled map car-following model is proposed for a one-way with the application of intelligent transportation system to describe the dynamic characteristics of one-way traffic flow and the control of traffic congestion. Based on the present model and the theory of feedback control ,the stability criteria are given for the change of speed of the lead vehicle. The theoretical analysis shows that the information on more leading vehicles of each vehicle could lead to a stabilization effect for the traffic flow ,that is ,the stability conditions could be considerably weakened. The corresponding numerical simulations confirm the correctness of the theoretical analysis. Through comparing the present results with those in previous works ,it is concluded that the proposed control strategy is more effective in suppressing the formation of traffic congestion by applying and controlling the induction information provided by the intelligent transportation system.

**Keywords** : traffic flow , intelligent transportation system , coupled map car-following model , control of traffic congestion

**PACC** : 0550 , 0520

<sup>\*</sup> Project supported by the State Key Development Program for Basic Research of China ( Grant No. 2006CB705500 ) ,the Key Program of the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 10532060 ) ,the National Natural Science Foundation of China ( Grant Nos. 10471039 , 10602025 ) ,the Doctoral Program of Ministry of Education ,China ( Grant No. 20040280014 ) ,the Foundation of Priority Academic Discipline of Shanghai , China ( Grant No. Y0103 ) and the Natural Science Foundation of Zhejiang Province , China ( Grant No. Y606268 ).

<sup>†</sup> E-mail : sqdai@shu.edu.cn