

基于斑点噪声的拖尾 Rayleigh 分布的合成孔径雷达 图像最大后验概率降噪^{*}

孙增国 韩崇昭

(西安交通大学电子与信息工程学院, 西安 710049)

(2005 年 11 月 17 日收到 2007 年 3 月 28 日收到修改稿)

为了反映合成孔径雷达图像中斑点噪声尖峰厚尾的统计特征, 使用拖尾 Rayleigh 分布来描述斑点噪声. 基于 Gamma 先验分布和斑点噪声的拖尾 Rayleigh 分布, 推导出了合成孔径雷达图像的最大后验概率滤波方程, 并给出了它在特定特征参数时的解析形式. 使用 Mellin 变换从观察图像估计拖尾 Rayleigh 分布的未知参数, 给出了在斑点噪声的拖尾 Rayleigh 分布下的最大后验概率降噪试验和量化指标. 为了消除滑动窗大小和噪声强度对降噪结果的影响, 给出了降噪能力随滑动窗大小和噪声方差的动态变化关系. 结果表明, 拖尾 Rayleigh 分布尖峰厚尾的特征符合斑点噪声的真实统计特性, 因此与 Rayleigh 分布以及 Kuan 滤波相比, 基于斑点噪声的拖尾 Rayleigh 分布的最大后验概率滤波具有较强的降噪能力.

关键词: 斑点噪声, 拖尾 Rayleigh 分布, 最大后验概率降噪, Mellin 变换

PACC: 4230V, 4240F, 0210

1. 引 言

合成孔径雷达(SAR)由于相干成像方式产生斑点噪声, 严重干扰人们对图像的解译^[1-3]. 基于最小均方误差(MMSE)的降噪方法只有当噪声为高斯分布时才会取得最优的降噪效果. 实际的噪声往往是非高斯的, 此时基于最大后验概率(MAP)的滤波方法可以取得更好的降噪效果^[3-5]. MAP 滤波要求知道斑点噪声的统计分布, 对于 SAR 幅值图像, 一般使用 Rayleigh 分布来描述斑点噪声. Rayleigh 分布具有解析的密度函数, 但它却不能精确反映斑点噪声尖峰厚尾的冲激型的统计特征. Nikias 和 Shao^[6]建立了雷达回波的微观模型, 由广义中心极限定理得到回波实部和虚部服从 α 稳定分布, 并指出 α 稳定分布具有尖峰厚尾的统计特征. Kuruoglu 和 Zerubi^[7]使用对称 α 稳定分布描述 SAR 图像的回波信号, 并推导出了 SAR 幅值图像服从拖尾 Rayleigh 分布. 本文使用拖尾 Rayleigh 分布来描述斑点噪声, 从而符合斑点噪声尖峰厚尾的统计特征. 基于真实图像的 Gamma 先验分布和斑点噪声的拖尾 Rayleigh 分布, 推导出了 SAR 图像 MAP 滤波的一般形式, 同时给出

了当特征指数为特殊值时的解析表达形式. 本文使用 Mellin 变换从观察图像估计拖尾 Rayleigh 分布的未知参数, 最后给出了在斑点噪声的拖尾 Rayleigh 分布下的 MAP 降噪试验, 由此对相关结论加以验证.

2. 斑点噪声的拖尾 Rayleigh 分布

斑点噪声是由雷达回波的干涉引起的. SAR 发射相干电磁波照射地物目标, 回波由于干涉作用会有很大的随机起伏, 在图像上表现为亮暗相间的颗粒状噪声. 当地物目标的粗糙程度大于雷达波长时, 可以认为分辨单元内存在若干散射体, 每个散射体均散射电磁波. 由于散射体均处于同一分辨单元内, 雷达无法分辨这些目标, 故它所收到的信号是这些散射体回波的矢量和. 每一个散射体的回波相位同传感器与该点之间的距离有关, 当传感器有一点移动时, 所有的回波相位都要发生变化, 从而引起合成幅度发生变化. 这样, 当传感器移动中连续观测同一地区域时将得到不同的合成幅度值. 这种合成幅度的连续变化导致了斑点的产生^[3]. 可见, 斑点不是一般意义上的噪声, 它不是在成像过程中外加的, 而

^{*} 国家重点基础研究发展规划(批准号: 2001CB309405)和国家自然科学基金(批准号: 60574033)资助的课题.

是 SAR 图像的固有现象,是雷达回波经干涉后在图像上的反映. Kuruoglu 等^[7]假定 SAR 图像分辨单元内的回波信号服从特殊的 α 稳定分布——对称 α 稳定分布,由此推导出幅值图像服从拖尾 Rayleigh 分布,其概率密度函数表示如下:

$$f_{\alpha,\gamma}(x) = x \int_0^\infty \rho \exp(-\gamma\rho^\alpha) J_0(\rho x) d\rho, \quad (1)$$

式中特征指数 $0 < \alpha \leq 2$, 尺度参数 $\gamma > 0$, J_0 为第一类零阶 Bessel 函数. 当 $\alpha = 1$ 及 $\alpha = 2$ 时,拖尾 Rayleigh 分布存在解析形式的概率密度函数,后者就是一般的 Rayleigh 分布,即 Rayleigh 分布是拖尾 Rayleigh 分布在特征指数为 2 时的特例.

Rayleigh 分布和拖尾 Rayleigh 分布($\alpha \neq 2$)的差异集中体现在尾部^[6]. 对于非 Rayleigh 分布的其他拖尾 Rayleigh 分布的随机变量 A ,

$$\lim_{a \rightarrow \infty} a^\alpha P(A) = (2\pi/\alpha)B(\alpha, \gamma) \quad (A > a), \quad (2)$$

式中 $B(\alpha, \gamma)$ 是依赖于 α 和 γ 的常数. 可以看出,拖尾 Rayleigh 分布具有代数拖尾,这就决定了非 Rayleigh 分布的拖尾 Rayleigh 分布具有较厚的拖尾.

拖尾 Rayleigh 分布由 α 和 γ 决定,但两者的作用不同. 假定 X 服从拖尾 Rayleigh 分布,则随机变量

$Y = \frac{X}{\gamma^{1/\alpha}}$ 的概率分布函数如下:

$$F_Y(y) = \int_0^{\gamma^{1/\alpha} y} \left[x \int_0^\infty \rho \exp(-\gamma\rho^\alpha) J_0(\rho x) d\rho \right] dx. \quad (3)$$

对(3)式两边求导,则 Y 的概率密度函数如下:

$$f_Y(y) = \gamma^{2/\alpha} y^{2/\alpha} \int_0^\infty \rho \exp(-\gamma\rho^\alpha) J_0(\gamma\rho^{1/\alpha} y) d\rho. \quad (4)$$

作变量代换 $s = \gamma\rho^{1/\alpha}$ 并经过适当化简,可得

$$f_Y(y) = y \int_0^\infty s \exp(-s^\alpha) J_0(sy) ds. \quad (5)$$

由此可见, Y 仍然服从拖尾 Rayleigh 分布,并且尺度参数变为 1,这说明拖尾 Rayleigh 分布 X 可以通过变换 $Y = \frac{X}{\gamma^{1/\alpha}}$ 进行标准化. 标准的拖尾 Rayleigh 分布($\gamma = 1$)在不同的 α 时的概率密度函数如图 1 所示. 可见拖尾 Rayleigh 分布具有明显的尖峰和厚尾的统计特征,并且 α 值越小,尖峰和厚尾就越明显. 当 $\alpha = 2$ 时,拖尾 Rayleigh 分布变为一般的 Rayleigh 分布,因此它的拖尾就最弱. 总之,特征指数 α 集中反映了拖尾 Rayleigh 分布的拖尾

程度.

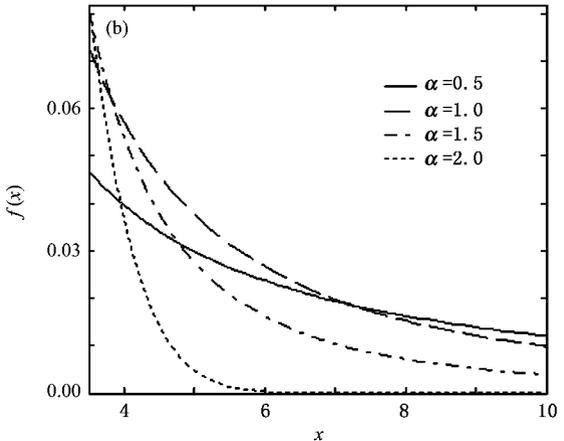
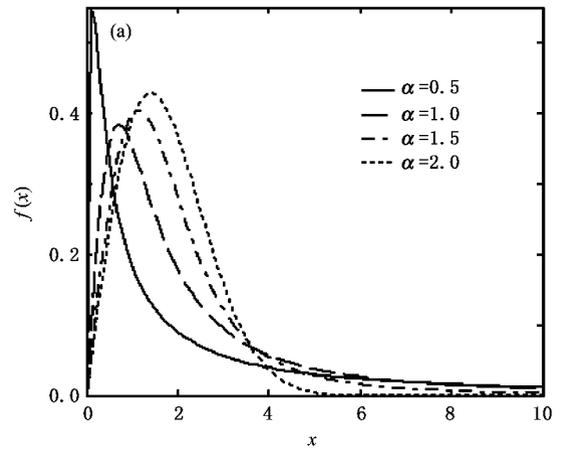


图 1 标准拖尾 Rayleigh 分布的概率密度函数 (a)拖尾 Rayleigh 分布的概率密度函数 (b)为(a)图的尾部

文献 [6] 指出,冲激型噪声具有尖峰厚尾的统计特征. 对于特定 SAR 图像,可用斑点噪声的归一化直方图近似描述其统计分布,并分别用 Rayleigh 分布和拖尾 Rayleigh 分布对斑点噪声的统计分布进行建模,结果如图 2 所示. 对于 Rayleigh 分布, $\alpha = 2, \gamma = 619.5$; 对于拖尾 Rayleigh 分布, $\alpha = 1, \gamma = 18.3$. 表 1 给出了两种建模方法产生的均方误差 (MSE), MSE 均以 10^{-6} 为量级. 从表 1 可知,斑点噪声同样具有冲激型噪声尖峰厚尾的统计特征,因此基于拖尾 Rayleigh 分布的建模方法具有较高的精度. Rayleigh 分布不能反映斑点噪声尖峰厚尾的统计特征,用其建模所产生的 MSE 要比拖尾 Rayleigh 分布约大一个数量级. 因此,在斑点噪声的拖尾 Rayleigh 分布下的 MAP 滤波应该有更强的降噪能力.

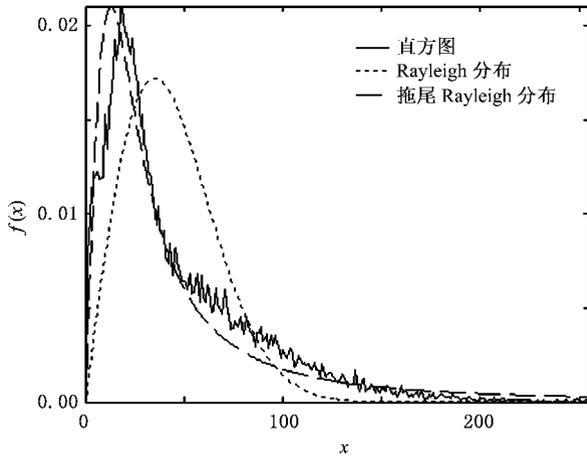


图2 基于 Rayleigh 分布和拖尾 Rayleigh 分布的斑点噪声统计分布建模

表1 不同建模方法产生的 MSE

建模方法	MSE/10 ⁻⁶
Rayleigh 分布	10.625
拖尾 Rayleigh 分布	2.3557

3. 斑点噪声的拖尾 Rayleigh 分布描述下的 MAP 降噪

充分发育的斑点噪声服从乘性噪声模型 $I = uR$, I 和 R 分别为观察图像和真实图像, u 为斑点噪声. 假设它为均值平稳的随机过程. 在 u 和 R 相互独立的条件下可得真实图像的统计量如下^[8]: \bar{R} 和 \bar{I} 分别为真实图像和观察图像的均值, C_R , C_I 和 C_u 分别为真实图像、观察图像以及噪声的标准差系数, 它们定义为相应标准差与均值的比值.

$$\bar{R} = \bar{I}, \quad (6)$$

$$C_R^2 = \frac{C_I^2 - C_u^2}{1 + C_u^2}. \quad (7)$$

MAP 滤波考虑后验概率 $f(R|I)$ 最大化时真实图像的估计问题^[3,9,10], 根据贝叶斯公式, 后验概率可写为如下形式:

$$f(R|I) = \frac{f(I|R)f(R)}{f(I)}. \quad (8)$$

对(8)式两边取对数, 利用对数的单调性质, 可得如下的 MAP 滤波方程:

$$\left. \frac{\partial \ln f(I|R)}{\partial R} + \frac{\partial \ln f(R)}{\partial R} \right|_{R=\hat{R}_{\text{MAP}}} = 0. \quad (9)$$

考虑如下分布函数:

$$\begin{aligned} F(i|R) &= P\{I \leq i | R\} \\ &= P\left\{u \leq \frac{i}{R} \mid R\right\} \\ &= \int_0^{i/R} f_u(x) \lambda x. \end{aligned} \quad (10)$$

对(10)式求导可得相应的概率密度函数

$$f(I|R) = \frac{1}{R} f_u\left(\frac{I}{R}\right) = \frac{1}{R} f_u(u). \quad (11)$$

把(11)式代入(9)式, 可得最终的 MAP 滤波方程

$$-\frac{1}{R} + \frac{\partial \ln f_u(u)}{\partial R} + \frac{\partial \ln f_R(R)}{\partial R} \Big|_{R=\hat{R}_{\text{MAP}}} = 0 \quad (12)$$

式中 $f_u(u)$ 和 $f_R(R)$ 分别为斑点噪声的统计分布和真实图像的先验分布. 可见 MAP 滤波方程由噪声项和真实图像的先验分布两部分组成. 噪声和真实图像的不同概率密度函数对应不同的 MAP 滤波方程. 真实图像的先验分布和地物目标特征有关, 一般假定为 Gamma 分布, 其概率密度函数如下^[3]:

$$f(R) = \frac{\lambda^\lambda}{R^\lambda} \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \exp\left(-\frac{\lambda R}{R}\right) R^{\lambda-1}, \quad (13)$$

式中 $\lambda = 1/C_R^2$. 此时

$$\frac{\partial \ln f(R)}{\partial R} = -\frac{\lambda}{R} + \frac{\lambda-1}{R}. \quad (14)$$

使用拖尾 Rayleigh 分布来描述斑点噪声, 此时

$$\frac{\partial \ln f_u(u)}{\partial R} = -\frac{1}{R} + \frac{I \int_0^\infty \rho^2 \exp(-\gamma \rho^\alpha) \mathcal{J}_1(I\rho/R) \lambda \rho}{R^2 \int_0^\infty \rho \exp(-\gamma \rho^\alpha) \mathcal{J}_0(I\rho/R) \lambda \rho}. \quad (15)$$

把(14)(15)式代入(12)式中, 可得在 Gamma 先验分布和斑点噪声的拖尾 Rayleigh 分布下的 MAP 滤波方程的一般形式

$$\frac{\lambda-3}{\hat{R}} - \frac{\lambda}{\bar{I}} + \frac{I \int_0^\infty \rho^2 \exp(-\gamma \rho^\alpha) \mathcal{J}_1(I\rho/\hat{R}) \lambda \rho}{\hat{R}^2 \int_0^\infty \rho \exp(-\gamma \rho^\alpha) \mathcal{J}_0(I\rho/\hat{R}) \lambda \rho} = 0, \quad (16)$$

式中 \hat{R} 为真实图像 R 的 MAP 估计. 拖尾 Rayleigh 分布只有在特征指数 $\alpha = 1, 2$ 时存在解析的概率密度函数, 此时(16)式的 MAP 滤波方程可写为如下的解析形式:

$$\begin{aligned} \lambda \gamma^2 \hat{R}^3 - \bar{R} \gamma^2 (\lambda-3) \hat{R}^2 + \lambda I^2 \hat{R} - \lambda \bar{R} I^2 &= 0 \\ (\alpha = 1), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} 2\lambda \gamma \hat{R}^3 + \bar{R} \gamma (6-2\lambda) \hat{R}^2 - I^2 \bar{R} &= 0 \\ (\alpha = 2). \end{aligned} \quad (18)$$

MAP 滤波方程的系数由(6)(7)式计算得到, MAP 滤波对应多项式方程的求解, 只要方程的解在

局部均值和中心像素值之间,就可以作为真实图像的 MAP 估计^[3].

4. 基于 Mellin 变换的拖尾 Rayleigh 分布参数估计

对于定义在 $(0, \infty)$ 上的信号 $f(x)$, 其 Mellin 变换定义如下^[11]:

$$\Phi(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} f(x) dx. \quad (19)$$

$f(x)$ 的 r 阶二类累积量定义如下:

$$\tilde{k}_r = \left. \frac{d^r \ln \Phi(s)}{ds^r} \right|_{s=1}. \quad (20)$$

使用 Gamma 分布来描述真实图像, 由(19), (20)式可得真实图像的 Gamma 分布的 1 阶和 2 阶二类累积量如下:

$$\tilde{k}_{k(1)} = \psi(\lambda) - \ln\left(\frac{\lambda}{R}\right),$$

$$\tilde{k}_{k(2)} = \psi(1, \lambda), \quad (21)$$

式中 $\psi(\lambda)$ 是 Digamma 函数, $\psi(1, \lambda)$ 是 Polygamma 函数. 类似地, 斑点噪声的拖尾 Rayleigh 分布的 1 阶和 2 阶二类累积量为

$$\begin{aligned} \tilde{k}_{k(1)} &= \frac{\psi(1, \alpha - 1)}{\alpha} + \ln(2\gamma^{1/\alpha}), \\ \tilde{k}_{k(2)} &= \frac{\psi(1, 1)}{\alpha^2}. \end{aligned} \quad (22)$$

利用 Mellin 卷积以及斑点噪声的乘性模型, 我们可以把观察图像的二类累积量写为如下形式:

$$\tilde{k}_{k(r)} = \tilde{k}_{k(r)} + \tilde{k}_{k(r)}. \quad (23)$$

一般而言, 观察图像的 1 阶和 2 阶二类累积量可以由观察图像的样本估计如下:

$$\hat{k}_{k(1)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln I_i, \quad (24)$$

$$\hat{k}_{k(2)} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\ln I_i - \hat{k}_{k(1)})^2.$$

把(21)(22)和(24)式代入到(23)式中并经过适当

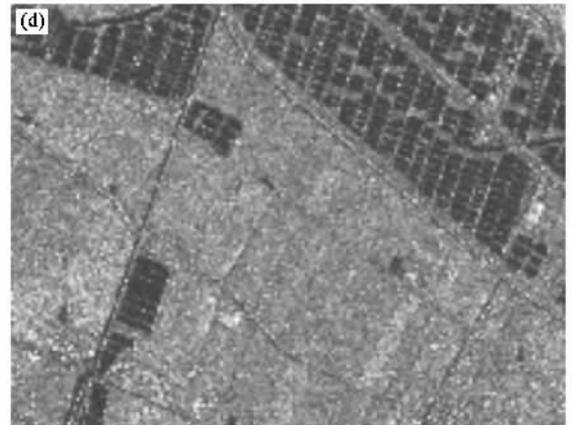
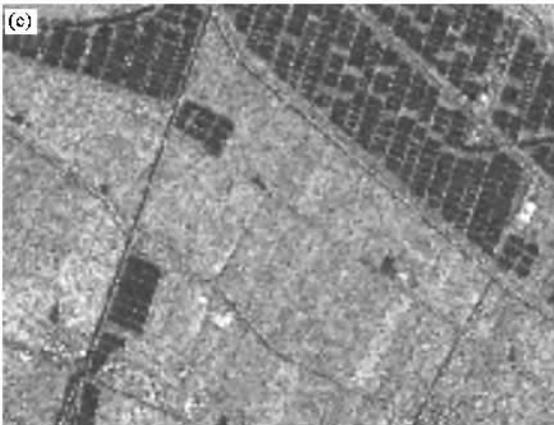
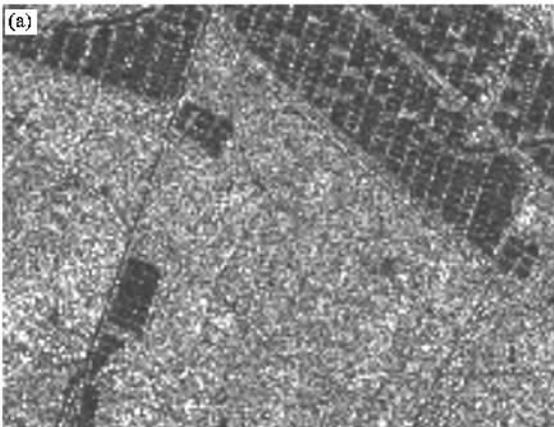


图 3 SAR 图像的降噪结果 滑动窗大小为 5. (a) SAR 图像 (b) MAP1 (c) MAP2 (d) Kuan 滤波

化简,斑点噪声的拖尾 Rayleigh 分布的参数可由观察图像估计得到,

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= \sqrt{\frac{\psi(1,1)}{\hat{k}_{\chi(2)} - \psi(1,\lambda)}}, \\ \hat{\gamma} &= \left\{ \frac{1}{2} \exp\left[\hat{k}_{\chi(1)} - \psi(\lambda)\right] + \ln\left(\frac{\lambda}{R}\right) + \frac{\psi(1)\chi(1 - \hat{\alpha})}{\hat{\alpha}} \right\}^{\hat{\alpha}}. \end{aligned} \quad (25)$$

5. MAP 降噪试验

图 3 给出了真实 SAR 图像的降噪结果. MAP1 表示在斑点噪声的拖尾 Rayleigh 分布描述下的 MAP 降噪, MAP2 表示在斑点噪声的 Rayleigh 分布描述下的 MAP 降噪. 为了与基于 MMSE 的降噪方法进行比较, 图 3 给出了这种方法的典型代表——Kuan 滤波结果. 为了定量比较不同降噪方法的优劣, 表 2 列出了图 3 降噪结果的量化指标^[8], 等效视数(ENL)定义为均匀区域的均值平方与方差的比值, 它表征斑点噪声的平滑程度. ENL 越大, 噪声平滑得越彻底, 降噪算法的降噪能力就越强. 可以看出利用拖尾 Rayleigh 分布尖峰厚尾的统计特性来描述斑点噪声, 得到的 MAP 滤波方程具有最强的降噪能力, Rayleigh 分布不能有效反映斑点噪声的这种特征, 因此由它导出的 MAP 滤波的降噪能力弱于基于 MMSE 的 Kuan 滤波的降噪能力.

表 2 降噪结果的量化指标

降噪方法	ENL
MAP1	5.8087
MAP2	3.9667
Kuan 滤波	4.1171

上述的降噪结果是在固定滑动窗下得出的, 不能反映 MAP 滤波的一般特性. 另外, 降噪算法一般要用到斑点噪声的方差, 后者通常由图像的均匀区域估计得出^[3]. 为了克服噪声估计的误差, 全面反映斑点噪声拖尾 Rayleigh 分布描述下的 MAP 滤波的降噪性能, 图 4 给出了不同降噪算法的降噪能力随滑动窗大小以及噪声方差的动态变化曲线. 从图 4 可以看出, 由于拖尾 Rayleigh 分布反映了斑点噪声尖峰厚尾的统计特征, 因此在斑点噪声的拖尾 Rayleigh 分布描述下的 MAP 滤波的降噪能力最强, 这种较强的降噪能力和滑动窗的选择以及噪声强度

的估计没有关系. 另外, MAP 滤波对噪声有较高的容忍度, 在大噪声条件下仍有较好的降噪能力. Kuan 滤波方法在小噪声下可以取得较好的降噪效果, 但其降噪能力在噪声较大时就急剧下降. 综合考虑滑动窗和噪声强度两方面, 基于斑点噪声的拖尾 Rayleigh 分布的 MAP 滤波具有最强的降噪能力.

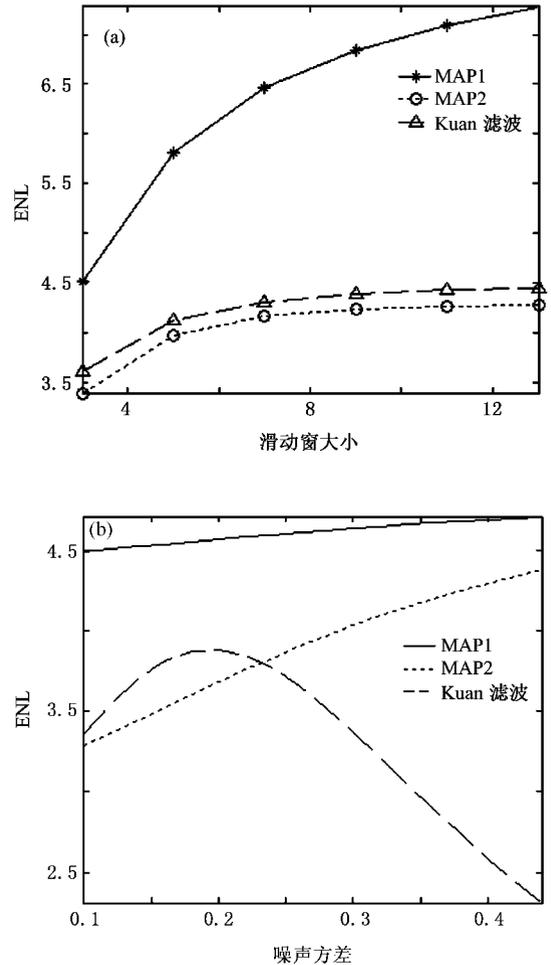


图 4 降噪能力随滑动窗大小和噪声方差的变化 (a) ENL 随滑动窗大小的变化, (b) ENL 随噪声方差的变化

6. 结 论

本文使用拖尾 Rayleigh 分布来描述斑点噪声尖峰厚尾的统计特征, 基于 Gamma 先验分布和斑点噪声的拖尾 Rayleigh 分布, 推导出了 MAP 滤波方程的一般形式, 并给出了特征指数为特殊值时的解析形式. 本文使用 Mellin 变换从观察图像中估计斑点噪声拖尾 Rayleigh 分布的未知参数. 最后, 给出了斑点噪声拖尾 Rayleigh 分布描述下的 MAP 降噪试验和量化指标. 为了消除滑动窗大小和噪声强度对降噪

结果的影响,给出了降噪能力随滑动窗大小和噪声方差的动态变化关系.结果表明,拖尾 Rayleigh 分布尖峰厚尾的统计特征符合斑点噪声的真实统计特性,因此,与 Rayleigh 分布以及 Kuan 滤波方法相比,基于斑点噪声的拖尾 Rayleigh 分布的 MAP 滤波具有较强的降噪能力.

真实图像的先验分布与地物目标特征直接有

关,本文假定真实图像服从 Gamma 先验分布,在噪声的拖尾 Rayleigh 分布下推导出相应的 MAP 滤波方程.但 Gamma 分布不是真实图像的唯一分布,其他分布照样可以推导出对应的滤波方程.利用真实图像的其他先验分布,在斑点噪声的拖尾 Rayleigh 分布描述下的 MAP 降噪及其比较,应该是下一步的研究问题.

- [1] Wu Y G , Tao M D 2006 *Chin. Phys.* **15** 1137
- [2] Teng S Y , Cheng C F , Liu M , Gui W L , Xu Z Z 2005 *Chin. Phys.* **14** 1990
- [3] Oliver C , Quegan S 1998 *Understanding Synthetic Aperture Radar Images* (London , Boston : Artech House)
- [4] Xie Y , Xu J X , Kang Y M , Yang H J , Hu S J 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1121 (in Chinese) [谢 勇、徐健学、康艳梅、杨红军、胡三觉 2003 物理学报 **52** 1121]
- [5] Jiang K Y , Cai Z M 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4596 (in Chinese) [姜可宇、蔡志明 2005 物理学报 **54** 4596]
- [6] Nikias C L , Shao M 1995 *Signal Processing with Alpha-Stable Distribution and Application* (New York : Wiley)
- [7] Kuruoglu E E , Zerubi J 2004 *IEEE Trans. Image Proces.* **13** 527
- [8] Touzi R 2002 *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.* **40** 2392
- [9] Sendur L , Selesnick I W 2002 *IEEE Trans. Sign. Proces.* **50** 2744
- [10] Achim A , Kuruoglu E E 2005 *IEEE Trans. Sign. Proces. Lett.* **12** 17
- [11] Achim A , Kuruoglu E E , Zerubia J 2006 *IEEE Trans. Image Proces.* **15** 2686

Maximum a posteriori filtering for synthetic aperture radar images based on heavy-tailed Rayleigh distribution of speckle *

Sun Zeng-Guo Han Chong-Zhao

(School of Electronics and Information Engineering , Xi'an Jiaotong University , Xi'an 710049 , China)

(Received 17 November 2005 ; revised manuscript received 28 March 2007)

Abstract

In order to reflect the statistics of high peak and heavy tail , speckle in synthetic aperture radar images is modeled as heavy-tailed Rayleigh distribution. First , based on Gamma prior distribution and heavy-tailed Rayleigh distribution of speckle , the maximum a posteriori filtering equation is proposed and its analytical form is provided in given characteristic parameter. Second , parameters of heavy-tailed Rayleigh distribution are estimated from the observed image using Mellin transformation. Last , maximum a posteriori de-speckling experiments and their quantitative measures are given. In order to eliminate the influence of window size and noise intensity on de-speckling results , dynamic relations of the de-speckling capability to noise variance and window size are suggested respectively. Results demonstrate that the heavy-tailed Rayleigh distribution accords with the real statistics of speckle , so the maximum a posteriori filter in heavy-tailed Rayleigh distribution of speckle has higher capability of noise reduction compared to the one in Rayleigh distribution of speckle and the Kuan filter.

Keywords : speckle , heavy-tailed Rayleigh distribution , maximum a posteriori filtering , Mellin transformation

PACC : 4230V , 4240F , 0210

* Project supported by the State Key Development Program for Basic Research of China (Grant No. 2001CB309405) and the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60574033).