第 56 卷 第 9 期 2007 年 9 月
1000-3290/2007/56(09)/5041-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.56, No.9, September, 2007

求 Emden-Fowler 方程积分的分析力学方法*

梅凤翔† 解加芳 铁强

（北京理工大学理学院力学系，北京 100081）

（2006 年 12 月 7 日收到；2006 年 12 月 14 日收到修改稿）

研究求 Emden-Fowler 方程积分的分析力学方法，包括 Hamilton-Poisson 方法，Lagrange-Noether 方法，Lie-Hojman 方法以及 Hamilton-Jacobi 方法等.

关键词：Emden-Fowler 方程，分析力学，Poisson 方法，Noether 定理

PACC：0320

1. 引 言

著名的 Emden-Fowler 方程出现于物理学和工程的各个分支[1]. 此方程有一个著名的积分，通常用 Lagrange 系统或 Hamilton 系统的 Noether 理论来求得[2—4]. 本文提出分析力学的其他方法来求方程的积分，包括 Hamilton-Poisson 方法，Lagrange-Noether 方法，在一定条件下还可应用 Hojman 方法以及 Hamilton-Jacobi 方法等.

2. Emden-Fowler 方程

Emden-Fowler 方程有形式

$$t\ddot{q}+2\dot{q}+at^m q^{2m+3}=0, \tag{1}$$

其中 a，m 为常数. 当取 $a=1$，$m=1$ 时，方程(1)成为 Emden 方程

$$t\ddot{q}+2\dot{q}+tq^5=0. \tag{2}$$

方程(1)有积分[1—4]

$$I=t^3\dot{q}^2+t^2q\dot{q}+\frac{a}{m+2}t^{m+2}q^{2m+4}=\text{const}. \tag{3}$$

3. Hamilton-Poisson 方法

将微分方程化成 Hamilton 方程或部分地化成 Hamilton 方程，利用 Poisson 条件或广义 Poisson 条件来求方程的积分[5]，这种方法称为 Hamilton-Poisson 方法.

令

$$p=t^2\dot{q}, \tag{4}$$

则方程(1)可 Hamilton 化，其 Hamilton 函数为[4]

$$H=\frac{1}{2}\left(p^2t^{-2}+\frac{a}{m+2}t^{m+1}q^{2m+4}\right). \tag{5}$$

Poisson 条件有形式

$$\frac{\partial I}{\partial t}+(I, H)=0, \tag{6}$$

其中 (I, H) 为 Poisson 括号. (6)式给出

$$\frac{\partial I}{\partial t}+\frac{\partial I}{\partial q}\frac{p}{t^2}+\frac{\partial I}{\partial p}(-2at^{m+1}q^{2m+3})=0. \tag{7}$$

方程(7)归结为

$$\frac{\mathrm{d}t}{1}=\frac{\mathrm{d}q}{p/t^2}=\frac{\mathrm{d}p}{-2at^{m+1}q^{2m+3}}. \tag{8}$$

令 $\mathrm{d}t=F$，则

$$\mathrm{d}q=\frac{p}{t^2}F, \quad \mathrm{d}p=-(2at^{m+1}q^{2m+3})F.$$

于是有

$$\left(at^{m+1}q^{2m+4}-\frac{p^2}{t^2}\right)\mathrm{d}t+(p+2at^{m+2}q^{2m+3})\mathrm{d}q$$
$$+\left(\frac{2p}{t}+q\right)\mathrm{d}p=0.$$

即

$$\mathrm{d}\left\{\frac{p^2}{t}+pq+\frac{a}{m+2}t^{m+2}q^{2m+4}\right\}=0.$$

积分得

$$I=\frac{p^2}{t}+pq+\frac{a}{m+2}t^{m+2}q^{2m+4}=\text{const}. \tag{9}$$

* 国家自然科学基金(批准号：10572021)和高等学校博士学科点专项科研基金(批准号：20040007022)资助的课题.

† E-mail：meifx@bit.edu.cn

将(4)式代入(9)式,便得积分(3).

方程(1)容易部分 Hamilton 化.令

$$\dot{q} = p, \quad H = \frac{1}{2}p^2, \tag{10}$$

则有

$$\dot{p} = -\frac{2}{t}p - at^{m-1}q^{2m+3}. \tag{11}$$

广义 Poisson 条件给出

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial q}p + \frac{\partial I}{\partial p}\left(-\frac{2}{t}p - at^{m-1}q^{2m+3}\right) = 0.$$

可找到

$$\mathrm{d}\left(t^3p^2 + t^2pq + \frac{a}{m+2}t^{m+2}q^{2m+4}\right) = 0.$$

由此可找到积分

$$I = t^3p^2 + t^2pq + \frac{a}{m+2}t^{m+2}q^{2m+4} = \mathrm{const}. \tag{12}$$

将(10)式代入(12)式,便得积分(3).

4. Lagrange-Noether 方法

将微分方程化成 Lagrange 方程或部分地化成 Lagrange 方程,利用 Noether 定理来求方程的积分,这种方法称为 Lagrange-Noether 方法.

方程(1)可 Lagrange 化,其 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}t^2\dot{q}^2 - \frac{a}{2m+4}t^{m+1}q^{2m+4}. \tag{13}$$

Noether 定理给出[2—7],如果无限小生成元 $\xi_0 = \xi_0(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$, $\xi_s = \xi_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 和规范函数 $G_N = G_N(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 满足 Noether 等式

$$L\dot{\xi}_0 + X^{(1)}(L) + \dot{G}_N = 0, \tag{14}$$

其中

$$X^{(1)} = \xi_0\frac{\partial}{\partial t} + \xi_s\frac{\partial}{\partial q_s} + (\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}, \tag{15}$$

则 Lagrange 系统有 Noether 守恒量

$$I_N = L\xi_0 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + G_N = \mathrm{const}. \tag{16}$$

将(13)式代入(14)式,得

$$L\dot{\xi}_0 + \left(t\dot{q}^2 - \frac{a(m+1)}{2m+4}t^mq^{2m+4}\right)\xi_0 + (t^2\dot{q})(\dot{\xi} - \dot{q}\dot{\xi}_0) - at^{m+1}q^{2m+3}\xi + \dot{G}_N = 0. \tag{17}$$

它有如下解:

$$\xi_0 = -2t, \quad \xi = q, \quad G_N = 0. \tag{18}$$

将(18)式代入(16)式,得

$$I_N = t^3\dot{q}^2 + t^2q\dot{q} + \frac{a}{m+2}t^{m+2}q^{2m+4} = \mathrm{const}. \tag{19}$$

对一般的微分方程,Lagrange 化有很严格的限制[7].但是,部分 Lagrange 化却十分容易.对方程(1),令

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^2, \quad Q = -\frac{2}{t}\dot{q} - at^{m-1}q^{2m+3}, \tag{20}$$

相应的 Noether 等式给出

$$\frac{1}{2}\dot{q}^2\dot{\xi}_0 + \dot{q}(\dot{\xi} - \dot{q}\dot{\xi}_0) - \left(\frac{2}{t}\dot{q} + at^{m-1}q^{2m+3}\right)(\xi - \dot{q}\xi_0) + \dot{G}_N = 0. \tag{21}$$

它有解

$$\xi_0 = -2t^3, \quad \xi = t^2q, \quad G_N = -t^3\dot{q}^2 + \frac{a}{m+2}t^{m+2}q^{2m+4}. \tag{22}$$

Noether 守恒量仍为(19)式.

5. Lie-Hojman 方法

在时间不变的特殊无限小变换下,Lie 对称性在一定条件下可直接求得 Hojman 型守恒量[8—18].

方程(1)表为

$$\ddot{q} = -\frac{2}{t}\dot{q} - at^{m-1}q^{2m+3}. \tag{23}$$

在时间不变的特殊无限小变换下,Lie 对称性的确定方程为

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi = -\frac{2}{t}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi - a(2m+3)t^{m-1}q^{2m+2}\xi. \tag{24}$$

Hojman 定理指出[8],对于满足(24)式的 ξ,如果存在某函数 $\mu = \mu(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 使得

$$-\frac{2}{t} + \frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\ln\mu = 0. \tag{25}$$

则方程(23)有 Hojman 型守恒量

$$I_{\mathrm{H}} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial q}(\mu\xi) + \frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\mu\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi\right) = \mathrm{const}. \tag{26}$$

对于一般的 m,不易由(24)式求得生成元 ξ.现在假设 $m = -\frac{3}{2}$,则由(24)式求得

$$\xi = 1, \tag{27}$$

$$\xi = \frac{1}{2}(t^2\dot{q} + 2at^{1/2})^2. \tag{28}$$

方程(25)有解

$$\mu = t^2, \tag{29}$$

$$\mu = t^2(t^3\dot{q}^2 + t^2 q\dot{q} + 2at^{1/2}q). \tag{30}$$

将(27),(29)式代入(26)式,得

$$I_{\mathrm{H}} = (t^3\dot{q}^2 + t^2 q\dot{q} + 2at^{1/2}q)^{-1}(t^2\dot{q} + 2at^{1/2}) = \mathrm{const}. \tag{31}$$

将(28),(29)式代入(26)式,得

$$I_{\mathrm{H}} = t^2\dot{q} + 2at^{1/2} = \mathrm{const}. \tag{32}$$

(31),(32)式是在当 $m = -\frac{3}{2}$ 时,Emden-Fowler 方程的积分.

6. Hamilton-Jacobi 方法

将微分方程化成 Hamilton 系统,便可利用 Hamilton-Jacobi 方法来求解[16].

对方程(1),其 Hamilton 函数为(5)式.因此,可建立相应的 Hamilton-Jacobi 方程

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2}\left\{t^{-2}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{a}{m+2}t^{m+1}q^{2m+4}\right\} = 0. \tag{33}$$

方程(33)不易用分离变量法求全积分.现在假设 $m = -3$,则方程(33)成为

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2}t^{-2}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 - aq^{-2}\right\} = 0. \tag{34}$$

令

$$S = S_1(t) + S_2(q). \tag{35}$$

将(35)式代入方程(34),分离变量,得

$$2t^2\frac{\partial S_1}{\partial t} = aq^{-2} - \left(\frac{\partial S_2}{\partial q}\right)^2 = C_1.$$

由此求得

$$S_1 = -\frac{C_1}{2t} \quad S_2 = \int (aq^{-2} - C_1)^{1/2}\mathrm{d}q.$$

Hamilton-Jacobi 方法给出

$$C_2 = \frac{\partial S}{\partial C_1} = -\frac{1}{2t} - \frac{1}{2}\int (aq^{-2} - C_1)^{-1/2}\mathrm{d}q,$$

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = -a\int (aq^{-2} - C_1)^{-1/2}q^{-3}\mathrm{d}q. \tag{36}$$

这就是当 $m = -3$ 时,Emden-Fowler 方程的解.

7. 结　　论

本文利用分析力学方法研究了 Emden-Fowler 方程的经典积分,在特殊情况下,还可利用 Hamilton-Jacobi 方法求出最终解.因此,分析力学的方法不仅可解分析力学中的问题,而且也能用来求解一般的常微分方程.

[1] Rosenau P 1984 *Int. J. Non-linear Mech.* **19** 303
[2] Vujanović B 1970 *J. Non-linear Mech.* **5** 269
[3] Djukić Dj S 1973 *J. Non-linear Mech.* **8** 479
[4] Li Z P 1993 *Classical and Quantal Dynamics of Constrained Systems and Their Symmetrical Properties* (Beijing: Beijing University of Technology Press) (in Chinese) [李子平 1993 经典和量子约束系统及其对称性质 (北京:北京工业大学出版社)]
[5] Mei F X 1999 *Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用 (北京:科学出版社)]
[6] Zhao Y Y, Mei F X 1999 *Symmetries and Invariants of Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [赵跃宇、梅凤翔 1999 力学系统的对称性与不变量 (北京:科学出版社)]
[7] Santilli R M 1978 *Foundations of Theoretical Mechanics* Ⅰ (New York: Sprignr-Verlag)
[8] Hojman S A 1992 *J. Phys. A: Gen Math* **25** L251
[9] Mei F X 2002 *Chin. Sci. Bulletin* **47** 2049
[10] Zhang Y 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1832 [张　毅 2003 物理学报 **52** 1832]
[11] Luo S K, Mei F X 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 666 [罗绍凯、梅凤翔 2004 物理学报 **53** 666]
[12] Qiao Y F, Zhao S H, Lie R J 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2035 [乔永芬、赵淑红、李仁杰 2004 物理学报 **53** 2035]
[13] Fang J H, Zhang P Y 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 4041 [方建会、张鹏玉 2004 物理学报 **53** 4041]
[14] Zhang H B, Chen L Q, Liu R W, Gu S L 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2489 [张宏彬、陈立群、刘荣万、顾书龙 2005 物理学报 **54** 2489]
[15] Xu X J, Mei F X, Qin M C 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1009 [许学军、梅凤翔、秦茂昌 2005 物理学报 **54** 1009]
[16] Mei F X, Wu H B, Zhang Y F 2006 *Chin. Phys.* **15** 1662
[17] Zheng S W, Tang Y F, Fu J L 2006 *Chin. Phys.* **15** 243
[18] Shang M, Chen X W 2006 *Chin. Phys.* **15** 2788

Methods of analytical mechanics for integrating the Emden-Fowler equation*

Mei Feng-Xiang† Xie Jia-Fang Gang Tie-Qiang

(*Department of Mechanics*, *Faculty of Science*, *Beijing Institute of Technology*, *Beijing* 100081, *China*)

(Received 7 December 2006; revised manuscript received 14 December 2006)

Abstract

The methods of analytical mechanics for solving the Emden-Fowler equation are presented in this paper, including the Hamilton-Poisson method, the Lagrange-Noether method, the Lie-Hojman method and the Hamilton-Jacobi method.

Keywords: Emden-Fowler equation, analytical mechanics, Poisson method, Noether theory

PACC: 0320

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10572021) and the Doctoral Program Foundation of Institution of Higher Education of China (Grant No. 20040007022).

† E-mail: meifx@bit.edu.cn