第 56 卷 第 9 期 2007 年 9 月
1000-3290/2007/56(09)/5049-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.56,No.9,September,2007

变系数广义 KdV 方程新的类孤波解和精确解

毛杰健† 杨建荣

(江西上饶师范学院物理系,上饶 334001)

(2006 年 11 月 3 日收到;2006 年 12 月 14 日收到修改稿)

用普通 KdV 方程作变换,构造变系数广义 KdV 方程的解,获得了变系数广义 KdV 方程新的 Jacobi 椭圆函数精确解、类孤波解、三角函数解和 Weierstrass 椭圆函数解.

关键词:KdV 方程,变系数广义 KdV 方程,类孤波解,精确解
PACC:0340K,0290

1. 引 言

含外力的变系数广义 Korteweg-de Vries(KdV)方程[1]

$$u_{x,t}+6F_1(u_x^2+uu_{x,x})+F_2u_{x,x,x,x}+6F_3u_x+F_4=0,\qquad(1)$$

式中 $u_{x,t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t},u_{x,x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\cdots,F_1,F_2,F_3,F_4$ 为 t 的函数. 如取(1)式中的外力项 $F_4=0$,则(1)式演化为

$$u_{x,t}+6F_1(u_x^2+uu_{x,x})+F_2u_{x,x,x,x}+6F_3u_x=0.\qquad(2)$$

方程(1)和(2)在流体力学、等离子体物理、气体动力学等领域有重要的应用[1],是物理学家和数学家感兴趣的方程之一. 为了求解非线性偏微分方程,文献[1]利用 Bäcklund 变换,得到了(1)式具有 Painlevé 性质条件下的解;文献[2]用截断展开方法获得广义变系数方程新的精确类孤波解;文献[3]用 Jacobi 椭圆函数展开法,获得不含外力项的变系数 KdV 方程的解;文献[4]利用 Backlund 变换研究了广义 KP 方程的类孤波解;文献[5,6]利用扩展的双曲正切函数法、文献[7]用反散射法研究了变系数存在外力项的 KdV 方程的精确解;文献[8]用新的综合的扩展方法,找到了变系数 KdV 方程的解;最近,文献[9]用扩展的 Jacobi 椭圆函数展开法,获得了普通 KdV 方程新的解;文献[10]获得了 KP 方程的新解;文献[11,12]用其他方法研究了非线性方程的解. 本文用普通 KdV 方程作变换,构造含外力的变系数广义 KdV 方程的解,获得了(1)和(2)式新的精确解、类孤波解、三角函数解和 Weierstrass 椭圆函数解.

2. 解的构造

对于普通的 KdV 方程

$$v_t+vv_x+\beta v_{x,x,x}=0,\qquad(3)$$

式中 β 为常数. 对 v 作行波变换 $v=v(\xi),\xi=x-ct$,代入(3)式,并积分两次,得[13]

$$\frac{dv}{d\xi}=\frac{1}{3}\sqrt{-\frac{3v(\xi)^3-9cv(\xi)^2-18Av(\xi)-18B}{\beta}},\qquad(4)$$

式中 c 为常数,A,B 为积分常数,$v(\xi)^2\equiv v^2(\xi)\equiv(v(\xi))^2$. 当 A,B,c,β 取不同的值时,(4)式的 v 有下列的解:

1)当 $B=0$,(4)式的 v 有 9 组 Jacobi 椭圆函数解:

$$v_1=\mathrm{sn}(\xi)^2,\ A=-\frac{1}{6m^2},$$

$$c=\frac{1+m^2}{3m^2},\ \beta=-\frac{1}{12m^2},\qquad(5)$$

$$v_2=\mathrm{cn}(\xi)^2,\ A=\frac{1-m^2}{6m^2},$$

$$c=\frac{2m^2-1}{3m^2},\ \beta=\frac{1}{12m^2},\qquad(6)$$

$$v_3=\mathrm{dn}(\xi)^2,\ A=\frac{-1+m^2}{6},$$

† E-mail:mjj821@sohu.com

$$c=\frac{2-m^2}{3},\ \beta=\frac{1}{12},\tag{7}$$

$$v_4=a\mathrm{sn}(\xi)^2,\ A=-\frac{a^2}{6m^2},$$
$$c=\frac{(1+m^2)a}{3m^2},\ \beta=-\frac{a}{12m^2},\tag{8}$$

$$v_5=a\mathrm{cn}(\xi)^2,\ A=\frac{a^2(1-m^2)}{6m^2},$$
$$c=\frac{(2m^2-1)a}{3m^2},\ \beta=\frac{a}{12m^2},\tag{9}$$

$$v_6=a\mathrm{dn}(\xi)^2,\ A=\frac{a^2(-1+m^2)}{6},$$
$$c=\frac{(2-m^2)a}{3},\ \beta=\frac{a}{12},\tag{10}$$

$$v_7=a\mathrm{sn}(b\xi)^2,\ A=-\frac{a^2}{6m^2},$$
$$c=\frac{(1+m^2)a}{3m^2},\ \beta=-\frac{a}{12b^2m^2},\tag{11}$$

$$v_8=a\mathrm{cn}(b\xi)^2,\ A=\frac{a^2(1-m^2)}{6m^2},$$
$$c=\frac{(2m^2-1)a}{3m^2},\ \beta=\frac{a}{12b^2m^2},\tag{12}$$

$$v_9=a\mathrm{dn}(b\xi)^2,\ A=\frac{a^2(-1+m^2)}{6},$$
$$c=\frac{(2-m^2)a}{3},\ \beta=\frac{a}{12b^2},\tag{13}$$

式中 a,b 为实常数，sn，cn，dn 为 Jacobi 椭圆函数，m 为模数.

2）当 $y_1>y_2>y_3$，$a>0$，且均为实常数，(4)式的 v 有下列 2 组 Jacobi 椭圆函数解：

$$v_{10}=y_3+(y_2-y_3)\mathrm{sn}\left(\frac{\sqrt{a(y_1-y_3)}\xi}{2}\right)^2,$$
$$A=-\frac{y_1y_2+y_1y_3+y_3y_2}{6},$$
$$B=\frac{y_1y_2y_3}{6},$$
$$c=\frac{y_1+y_2+y_3}{3},$$
$$\beta=-\frac{1}{3a},$$
$$m=\sqrt{\frac{y_2-y_3}{y_1-y_3}};\tag{14}$$

$$v_{11}=y_2+(y_1-y_2)\mathrm{cn}\left(\frac{\sqrt{a(y_1-y_3)}\xi}{2}\right)^2,$$
$$A=-\frac{y_1y_2+y_1y_3+y_3y_2}{6},$$
$$B=\frac{y_1y_2y_3}{6},$$
$$c=\frac{y_1+y_2+y_3}{3},$$
$$\beta=\frac{1}{3a},$$
$$m=\sqrt{\frac{y_1-y_2}{y_1-y_3}}.\tag{15}$$

3）当 $A=0$，$B=0$，$c=\frac{a}{3b}$，$\beta=-\frac{1}{3b}$，(4)式的 v 有双曲函数和三角函数解：

$$v_{12}=-\frac{a\,\mathrm{sech}\left(\frac{\sqrt{a}\xi}{2}\right)^2}{b},\ a>0,\ b<0;\tag{16}$$

$$v_{13}=\frac{a\,\mathrm{csch}\left(\frac{\sqrt{a}\xi}{2}\right)^2}{b},\ a>0,\ b>0;\tag{17}$$

$$v_{14}=-\frac{a\sec\left(\frac{\sqrt{-a}\xi}{2}\right)^2}{b},\ a<0.\tag{18}$$

式中 a,b 为实常数.

4）当 $c=0$，(4)式的 v 有 Weierstress 椭圆函数解：

$$v_{15}=p(\xi,a,b),\ A=\frac{a}{24},\ B=\frac{b}{24},\ \beta=-\frac{1}{12},\tag{19}$$

式中 a,b 为 Weierstress 椭圆函数不变量.

为了利用(4)式作变换，将(4)式的 v 对 ξ 求导，得

$$\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}\xi^2}=\frac{-v(\xi)^2+2cv(\xi)+2A}{2\beta},$$
$$\frac{\mathrm{d}^3v}{\mathrm{d}\xi^3}=\sqrt{3}\sqrt{\frac{-v(\xi)^3+3cv(\xi)^2+6Av(\xi)+6B}{\beta}}\times(-v(\xi)+c)/(3\beta),$$
$$\frac{\mathrm{d}^4v}{\mathrm{d}\xi^4}=(5v(\xi)^3-15cv(\xi)^2-18Av(\xi)+6c^2v(\xi)+6cA-12B)/(6\beta^2).\tag{20}$$

对于非线性偏微分方程

$$G(u,u_t,u_{x,t},u_x,u_{x,x}\cdots F)=0,\tag{21}$$

其中 F 是依赖于时间 t 的函数，为外力项. 设(21)式有如下形式的解：

$$u=P+Qv(\xi),\ \xi=\xi(x,t),\ P=P(x,t),\ Q=Q(x,t),\tag{22}$$

式中 $v(\xi)$ 为(4)式的解. 将(22)式代入(21)式，得到关于 $\frac{\mathrm{d}^iv}{\mathrm{d}\xi^i}$ 的方程，用(4)和(20)式右边替换左边，合并

有关 $v^j(\xi)\left(\sqrt{\frac{-3v(\xi)^3+9v(\xi)^2+18Av(\xi)+18B}{\beta}}\right)^k$ 的同类项，并令它们的系数为零，从而可定得 P，Q，ξ. 我们把这一方法，应用于求解含外力项的变系数广义 KdV 方程.

3. 变系数广义 KdV 方程(1)式的解

首先，将(22)式代入(1)式，得到关于 $\frac{\mathrm{d}^i v}{\mathrm{d}\xi^i}$ ($i=1,2,3,4$) 的方程，用(4)和(20)式右边替换 $\frac{\mathrm{d}^i v}{\mathrm{d}\xi^i}$，合并 $v^j(\xi)\left(\sqrt{\frac{-3v(\xi)^3+9v(\xi)^2+18Av(\xi)+18B}{\beta}}\right)^k$ 的同类项(当 $k=0$，$j=0,1,\cdots,4$；当 $k=1$，$j=0,1$)，并令它的系数为零，由此可得到如下的偏微分方程组：

$$
\begin{aligned}
&(6F_1PP_{x,x}\beta^2-2F_2Q\xi_x^4B+F_2Q\xi_x^4cA\\
&+Q\xi_t\xi_x\beta A+6F_1PQ\xi_x^2\beta A+12F_2Q_x\xi_x\xi_{x,x}\beta A\\
&+12F_1Q^2\xi_x^2\beta B+3F_2Q\xi_{x,x}^2\beta A+6F_2Q_{x,x}\xi_x^2\beta A\\
&+4F_2Q\xi_x\xi_{x,x,x}\beta A+P_{t,x}\beta^2+F_4\beta^2\\
&+F_2P_{x,x,x,x}\beta^2+6F_1P_x^2\beta^2\\
&+6F_3P_x\beta^2)/\beta^2=0,
\end{aligned}
\tag{23}
$$

$$
\begin{aligned}
&(F_2Q_{x,x,x,x}\beta^2+6F_3Q_x\beta^2+6F_1PQ_{x,x}\beta^2\\
&+12F_1P_xQ_x\beta^2+6F_1QP_{x,x}\beta^2-3F_2Q\xi_x^4A\\
&+F_2Q\xi_x^4c^2+Q\xi_t\xi_x\beta c+18F_1Q^2\xi_x^2\beta A+6F_1PQ\xi_x^2\beta c\\
&+12F_2Q_x\xi_x\xi_{x,x}\beta c+3F_2Q\xi_{x,x}^2\beta c+6F_2Q_{x,x}\xi_x^2\beta c\\
&+4F_2Q\xi_x\xi_{x,x,x}\beta c+Q_{t,x}\beta^2)/\beta^2=0,
\end{aligned}
\tag{24}
$$

$$
\begin{aligned}
&(12F_1Q_x^2\beta^2+12F_1QQ_{x,x}\beta^2-5F_2Q\xi_x^4c\\
&-Q\xi_t\xi_x\beta+24F_1Q^2\xi_x^2\beta c-6F_1PQ\xi_x^2\beta\\
&-12F_2Q_x\xi_x\xi_{x,x}\beta-3F_2Q\xi_{x,x}^2\beta\\
&-6F_2Q_{x,x}\xi_x^2\beta-4F_2Q\xi_x\xi_{x,x,x}\beta)/(2\beta^2)=0,
\end{aligned}
\tag{25}
$$

$$
-\frac{5\xi_x^2Q(-F_2\xi_x^2+6F_1Q\beta)}{6\beta^2}=0,
\tag{26}
$$

$$
\begin{aligned}
&(Q_x\xi_t\beta+Q_t\xi_x\beta+Q\xi_{t,x}\beta+F_2Q\xi_{x,x,x,x}\beta\\
&+6F_3Q\xi_x\beta+4F_2Q_x\xi_{x,x,x}\beta+6F_2Q_{x,x}\xi_{x,x}\beta\\
&+4F_2Q_{x,x,x}\xi_x\beta+12F_1P_xQ\xi_x\beta+12F_1PQ_x\xi_x\beta\\
&+6F_1PQ\xi_{x,x}\beta+4F_2Q_x\xi_x^3c\\
&+6F_2Q\xi_x^2\xi_{x,x}c)/(3\beta)=0,
\end{aligned}
\tag{27}
$$

$$
\begin{aligned}
&2(3F_1Q^2\xi_{x,x}\beta+12F_1Q_xQ\xi_x\beta-2F_2Q_x\xi_x^3\\
&-3F_2Q\xi_x^2\xi_{x,x})/(3\beta)=0,
\end{aligned}
\tag{28}
$$

式中 $P_{x,t}=\frac{\partial^2P}{\partial x\partial t}$，$Q_{x,t}=\frac{\partial^2Q}{\partial x\partial t}$，$\xi_{x,t}=\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial t}$，$\cdots$. 由(26)式解得

$$
Q=\frac{F_2\xi_x^2}{6F_1\beta},
\tag{29}
$$

将(29)式分别代入(23)，(24)，(25)，(27)和(28)式，解得

$$
\xi=F_5x+F_6,\quad P=-\frac{F_2F_5^3c+\beta F_{5,t}x+\beta F_{6,t}}{6F_5F_1\beta},\quad
Q=\frac{F_2F_5^2}{6F_1\beta},
\tag{30}
$$

式中 F_6 为 t 的任意函数，F_1，F_2，F_3，F_4 和 F_5 是受下列条件制约的 t 的函数：

$$
F_3=-\frac{F_{2,t}F_5F_1+F_2F_{5,t}F_1-F_2F_5F_{1,t}}{6F_2F_5F_1},
\tag{31}
$$

$$
F_4=-\frac{3F_{5,t}^2F_2-F_2F_{5,t,t}F_5+F_{5,t}F_{2,t}F_5}{6F_1F_5^2F_2}.
\tag{32}
$$

将(30)式代入(22)式，定得满足(1)式新的解为

$$
u=-\frac{F_2F_5^3c+\beta F_{5,t}x+\beta F_{6,t}}{6F_5F_1\beta}+\frac{F_2F_5^2v}{6F_1\beta},
\tag{33}
$$

式中 $F_{1,t}=\frac{\mathrm{d}F_1}{\mathrm{d}t}$，$F_{2,t}=\frac{\mathrm{d}F_2}{\mathrm{d}t}$，$\cdots$，$F_{6,t}=\frac{\mathrm{d}F_6}{\mathrm{d}t}$，用(5)—(19)式中的 v_1，v_2，$\cdots$，v_{15}，c，β 分别代替(33)式中的 c，v，β，可得到 15 组满足(1)式新的精确解：

$$
u_1=-\frac{-4F_2F_5^3-4F_2F_5^3m^2+F_{5,t}x+F_{6,t}+12F_2F_5^3m^2\mathrm{sn}(\xi)^2}{6F_5F_1},
$$

$$
u_2=\frac{-8F_2F_5^3m^2+4F_2F_5^3-F_{5,t}x-F_{6,t}+12F_2F_5^3m^2\mathrm{cn}(\xi)^2}{6F_5F_1},
$$

$$
u_3=\frac{-8F_2F_5^3+4F_2F_5^3m^2-F_{5,t}x-F_{6,t}+12F_2F_5^3\mathrm{dn}(\xi)^2}{6F_5F_1},
$$

$$
u_4=\frac{-8F_2F_5^3m^2+4F_2F_5^3-F_{5,t}x-F_{6,t}+12F_2F_5^3m^2\mathrm{sn}(\xi)^2}{6F_5F_1},
$$

$$
u_5=\frac{-8F_2F_5^3m^2+4F_2F_5^3-F_{5,t}x-F_{6,t}+12F_2F_5^3m^2\mathrm{cn}(\xi)^2}{6F_5F_1},
$$

$$u_6 = \frac{-8F_2F_5^3 + 4F_2F_5^3m^2 - F_{5,t}x - F_{6,t} + 12F_2F_5^3\mathrm{dn}(\xi)^2}{6F_5F_1},$$

$$u_7 = -(-4F_2F_5^3b^2 - 4F_2F_5^3b^2m^2 + F_{5,t}x + F_{6,t} + 12F_2F_5^3b^2m^2\mathrm{sn}(b\xi)^2/(6F_5F_1),$$

$$u_8 = (-8F_2F_5^3b^2m^2 + 4F_2F_5^3b^2 - F_{5,t}x - F_{6,t} + 12F_2F_5^3b^2m^2\mathrm{cn}(b\xi)^2)/(6F_5F_1),$$

$$u_9 = (-8F_2F_5^3b^2 + 4F_2F_5^3b^2m^2 - F_{5,t}x - F_{6,t} + 12F_2F_5^3b^2\mathrm{dn}(b\xi)^2)/(6F_5F_1),$$

$$u_{10} = -\left(-F_2F_5^3ay_1 - F_2F_5^3ay_2 + 2F_2F_5^3ay_3 + F_{5,t}x + F_{6,t} - 3F_2F_5^3a(y_2 - y_3)\mathrm{sn}\left(\frac{\sqrt{a(y_1 - y_3)}\xi}{2}\right)^2\right)/(6F_5F_1),$$

$$u_{11} = \left(-F_2F_5^3ay_1 + 2F_2F_5^3ay_2 - F_2F_5^3ay_3 - F_{5,t}x - F_{6,t} - 3F_2F_5^3a(y_1 - y_2)\mathrm{cn}\left(\frac{\sqrt{a(y_1 - y_3)}\xi}{2}\right)^2\right)/(6F_5F_1),$$

$$u_{12} = \frac{-F_2F_5^3a - F_{5,t}x - F_{6,t} + 3F_2F_5^3a\,\mathrm{sech}\left(\frac{\sqrt{a}\xi}{2}\right)^2}{6F_5F_1},$$

$$u_{13} = \frac{-F_2F_5^3a - F_{5,t}x - F_{6,t} - 3F_2F_5^3a\,\mathrm{csch}\left(\frac{\sqrt{a}\xi}{2}\right)^2}{6F_5F_1},$$

$$u_{14} = \frac{-F_2F_5^3a - xF_{5,t} - F_{6,t} + 3F_2F_5^3a\sec\left(\frac{\sqrt{-a}\xi}{2}\right)^2}{6F_5F_1},$$

$$u_{15} = -\frac{F_{5,t}x + F_{6,t} + 12F_2F_5^3p(\xi, a, b)}{6F_5F_1}.$$

式中 ξ 由(30)式决定.其中 u_{12},u_{13} 为类孤波解,u_{15} 为 Weierstress 椭圆函数解. 当 $m\to1$,$\mathrm{sn}(\xi)=\tanh(\xi)$,$\mathrm{cn}(\xi)=\mathrm{sech}(\xi)$,$\mathrm{dn}(\xi)=\mathrm{sech}(\xi)$,$u_1\cdots u_{11}$ 由 Jacobi 椭圆函数精确解退化为类孤波解;当 $m\to0$,$\mathrm{sn}(\xi)=\sin(\xi)$,$\mathrm{dn}(\xi)=1$,$\mathrm{cn}(\xi)=\cos\xi$,$u_1\cdots u_{11}$ 由 Jacobi 椭圆函数精确解退化为三角函数精确解,不再列出. 由于解(33)式不含 A,B,所以 $u_2=u_5$,$u_3=u_6$.

4. 方程(2)式的解

如果取(30)式中的 $F_5=k_1$,k_1 为常数,由(30)—(32)式得

$$P = -\frac{F_2k_1^3c + \beta F_{6,t}}{6k_1F_1\beta},\ Q = \frac{F_2k_1^2}{6F_1\beta},\ F_4 = 0,$$

$$F_3 = -\frac{F_{2,t}F_1 - F_2F_{1,t}}{6F_2F_1},\ \xi = k_1x + F_6. \tag{34}$$

将(34)式代入(22)式,定得满足(2)式新的精确解为

$$u = -\frac{F_2k_1^3c + \beta F_{6,t} - F_2k_1^3v(\xi)}{6k_1F_1\beta}. \tag{35}$$

用(5)—(19)式中的 v_1,v_2,…,v_{15},c,β 分别代替(35)式中的 c,$v(\xi)$,β,得到 15 组满足(2)式的新的精确解、类孤波解、三角函数解和 Weierstress 椭圆函数解. 式中 ξ 由(34)式决定. 解的情况类似于 3.

5. 结　　论

方程(1)比(3)复杂,我们相信一个复杂系统的物理行为包含着简单系统的物理行为,简单系统的行为是复杂系统行为的特例,简单系统的解与复杂系统的解,存在一定的联系. 基于这一想法,本文用普通 KdV 方程的(4)式作变换,构造含外力项变系数广义 KdV 方程的解,获得了(1)和(2)式新的精确解、类孤波解、三角函数解和 Weierstress 椭圆函数解,解的结果,用 Maple 进行了验算. 而本方法是否具有普遍的意义,能否应用于构造含外力项变系数广义(2+1)维和(3+1)维的 KdV 方程的解,我们将作进一步的研究.

[1] Zhu Z N 1992 *Acta Phys*. *Sin*. **41** 1561（in Chinese）[朱佐农 1992 物理学报 **41** 1561]
Bountis T C，Singularities，Dynamical 1985 *System*. *Math*. *Stud*. No. 103，edited by S. N. Penevmatikos（North-Holland，New York）
[2] Zhang J F，Chen F Y 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 1648（in Chinese）[张解放、陈芳跃 2001 物理学报 **50** 1648]
Lou S Y 1998 *Acta Phys*. *Sin*. **47** 1937（in Chinese）[楼森岳 1998 物理学报 **47** 1937]
[3] Liu S K，Fu Z T，Liu S D，Zhao Q 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 1923（in Chinese）[刘式适、付遵涛、刘式达、赵　强 2002 物理学报 **51** 1923]
[4] Zhu Z N 1993 *Phys*. *Lett*. A **182** 277
[5] Yomba E 2004 *Chaos*，*Solitions & Fractals* **21** 75
[6] Elwakil S A，El-labany S K，Zahran M A，Sabry R 2004 *Chaos*，*Solitons & Fractals* **19** 1083
[7] Xie Y C 2003 *Phys*. *Lett*. A **310** 161
[8] Sabry R，Zahran M A，Fan E G 2004 *Phys*. *Lett*. A **326** 93
[9] Shi Y R，Guo P，Lv K P，Duan W S 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 3265（in Chinese）[石玉仁、郭　鹏、吕克璞、段文山 2004 物理学报 **53** 3265]
[10] Mao J J，Yang J R 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 4999（in Chinese）[毛杰健、杨建荣 2005 物理学报 **54** 4999]
Mao J J，Yang J R 2006 *Chin*. *Phys*. **15** 2408
[11] Chen Y，Wang Q，Li B 2005 *Chaos*，*Solitions & Fractals* **23** 1465
Sabry R，Zahran M A，Fan E 2004 *Phys*. *Lett*. A **326** 93
Hon Y C，Fan E G 2004 *Chaos*，*Solitions & Fractals* **19** 515
[12] Lou S Y，Tang X Y 2001 *Chin*. *Phys*. **10** 897
Zhang J F 2000 *Chin*. *Phys*. **9** 1
Zhang J F，Wu F M 1999 *Chin*. *Phys*. **8** 326
Zhang J F，Wu F M 2002 *Chin*. *Phys*. **11** 425
Zong F D，Dai C Q，Yang Q，Zhang J F 2006 *Acta Phys*. *Sin*. **55** 3805（in Chinese）[宗丰德、戴朝卿、杨　琴、张解放 2006 物理学报 **55** 3805]
[13] Liu S K，Liu S D 2000 *Nonlinear Equations in Physics*（Beijing：Peking University Press）[刘式适、刘式达 2000 物理学中的非线性方程（北京 北京大学出版社）]

New solitary-wave-like solutions and exact solutions to variable coefficient generalized KdV equation

Mao Jie-Jian　Yang Jian-Rong

（*Department of Physics*，*Shangrao Normal College*，*Shangrao*　334001，*China*）

（Received 3 November 2006；revised manuscript received 14 December 2006）

Abstract

By the transforming with general KdV equation，the solutions of the variable coefficient generalized KdV equation are constructed firstly. As a result，we successfully obtain the new exact Jacobi elliptic function solutions，solitary-wave-like solutions，trigonometric function solutions and Weierstrass elliptic function solutions of variable coefficient generalized KdV equation.

Keywords：KdV equation，variable coefficient generalized KdV equation，solitary-wave-like solution，exact solution

PACC：0340K，0290