第 56 卷 第 9 期 2007 年 9 月
1000-3290/2007/56(09)/5054-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.56, No.9, September, 2007
©2007 Chin. Phys. Soc.

扩展的 Jacobi 椭圆函数展开法和 Zakharov 方程组的新的精确周期解*

吴国将 张 苗 史良马 张文亮 韩家骅†

(安徽大学物理与材料科学学院，合肥 230039)

(2006 年 11 月 6 日收到；2007 年 1 月 9 日收到修改稿)

对 Jacobi 椭圆函数展开法进行了扩展，且利用这一方法求出了 Zakharov 方程组的一系列新的精确周期解，在极限情况下可得到相应的孤波解，补充了前面研究的结果.

关键词：Jacobi 椭圆函数展开法，非线性发展方程，精确解，周期解

PACC：0340K，0290

1. 引 言

求解非线性发展方程的精确解在非线性问题的研究中占有非常重要的地位. 近几年，研究人员对求解非线性发展方程的精确解提出了许多方法，如齐次平衡法[1—4]、双曲函数法[5—10]、sine-cosine 方法[11]等. 但这些方法只能求得非线性方程的冲击波解和孤波解，不能求得非线性方程广义上的周期解. 为解决这个问题，刘等人提出了 Jacobi 椭圆函数展开法[12—15]，该方法可借助计算机代数系统得以实现，故得到了广泛的推广和应用[16—19]. 然而，寻找新形式的精确解仍然是一件很有意义的工作. 本文在前面工作的基础上对 Jacobi 椭圆函数展开法进行了扩展，并用该方法求出了 Zakharov 方程组一系列新形式的精确周期解，当 $m\to 1$ 时，这些解可退化为相应的孤波解.

2. 方法简述

非线性发展方程的一般形式可以写为

$$F(u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xt}, u_{xx}\cdots) = 0, \tag{1}$$

式中的 F 是关于变元 $u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xt}, u_{xx}\cdots$ 的多项式.

引入变换

$$u(x, t) = u(\xi),$$
$$\xi = k(x - ct) + \xi_0, \tag{2}$$

其中 k 和 c 是非零的待定常数，ξ_0 是一任意常数. 把(2)式代入(1)式得到关于 $u(\xi)$ 的常微分方程

$$F(u, u', u'', \cdots) = 0. \tag{3}$$

设方程(3)具有如下形式的行波解：

$$u(\xi) = \sum_{i=1}^{n} a_i f^i(\xi) + \sum_{i=1}^{n} b_i f^{i-1}(\xi) g(\xi) + \sum_{i=1}^{n} c_i f^{i-1}(\xi) h(\xi) + a_0, \tag{4}$$

其中 $a_0, a_i, b_i, c_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 是待定常数，正整数 n 的值通过平衡方程(3)中非线性项和最高阶导数项来确定. 把(4)式代入(3)式会得到一关于 $f(\xi)$，$g(\xi)$ 和 $h(\xi)$ 的多项式方程，化简该方程后令 $f^i(\xi)$，$f^i(\xi)g(\xi)$，$f^i(\xi)h(\xi)$，$f^i(\xi)g(\xi)h(\xi)$ $(i = 0, 1, 2, \cdots)$ 项的系数为 0，就得到一包含所有待定系数 $k, c, a_0, a_i, b_i, c_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 的非线性代数方程组 NAES，求解该 NAES 最终可获得(1)式的精确周期解.

为了寻找新形式的精确周期解，选取 $f(\xi)$，$g(\xi)$，$h(\xi)$ 满足如下条件：

$$\frac{df}{d\xi} = \lambda g h,$$
$$\frac{dg}{d\xi} = p_1 f h + q_1 h,$$

* 安徽省自然科学基金(批准号：01041188)及安徽省省级精品课程基金资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail：jiahuahan@sina.com

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\xi}=p_2fg+q_2g,$$
$$g^2=p_3f^2+q_3f+r_1,$$
$$h^2=p_4f^2+q_4f+r_2,\qquad(5)$$

其中 $\lambda, p_1, p_2, p_3, p_4, q_1, q_2, q_3, q_4, r_1, r_2$ 的值由选定的 $f(\xi)$, $g(\xi)$, $h(\xi)$ 来确定. 利用(5)式通过构造不同形式的 $f(\xi)$, $g(\xi)$, $h(\xi)$ 可以求得非线性方程的一系列新形式的精确周期解.

3. Zakharov 方程组

考虑如下形式的 Zakharov 方程组：

$$u_{tt}-c_s^2u_{xx}-\beta(|v|^2)_{xx}=0,$$
$$\mathrm{i}v_t+\alpha v_{xx}-\delta uv=0.\qquad(6)$$

方程组(6)是描写等离子体的高频运动或非线性光波的模型,其中 u 是离子的密度偏差, v 是电场强度的慢变振幅, c_s 是电子-离子热运动速度, $\alpha(>0)$, $\beta(>0)$, δ, c_s 为常数. 令

$$u(x,t)=u(\xi),$$
$$v=\phi(\xi)\exp[\mathrm{i}(px-\omega t)],$$
$$\xi=k(x-ct)+\xi_0,\qquad(7)$$

其中 p, ω, k, c 为待定常数. 将(7)式代入(6)式,得到

$$k^2(c^2-c_s^2)u''-\beta k^2(\phi^2)''=0,$$
$$\alpha k^2\phi''+(\omega-\alpha p^2)\phi-\delta u\phi+\mathrm{i}(2\alpha pk-kc)\phi'=0.\qquad(8)$$

对(8)式的第一式直接积分并取积分常数为零,则得

$$u=\frac{\beta}{c^2-c_s^2}\phi^2.\qquad(9)$$

在(8)式的第二式中取 $c=2\alpha p$,并把(9)式代入整理后得

$$\alpha k^2\phi''+(\omega-\alpha p^2)\phi-\frac{\delta\beta}{c^2-c_s^2}\phi^3=0.\qquad(10)$$

考虑方程(10)中最高阶导数项 ϕ'' 与与具支配地位非线性项 ϕ^3 齐次平衡,可确定(4)式中 $n=1$,于是方程(9)的解具有下列形式：

$$u(\xi)=a_0+a_1f(\xi)+b_1g(\xi)+c_1h(\xi).\qquad(11)$$

把方程(5)和(11)代入(10)式,收集 $f^i(\xi)g^j(\xi)h^k(\xi)$ $(i=0,1,2,\cdots;j=0,1;k=0,1)$ 的系数并令它们为零,就得到一个关于 k, c, a_0, a_1, b_1, c_1 的非线性方程组 NAES. 利用 Mathematica 求解该 NAES,就可以求得方程(10)的解. 下面分六种情况讨论.

情形 1　当

$$f(\xi)=\frac{1}{\mathrm{ns}\xi+r},$$
$$g(\xi)=\frac{\mathrm{cs}\xi}{\mathrm{ns}\xi+r},$$
$$h(\xi)=\frac{\mathrm{ds}\xi}{\mathrm{ns}\xi+r}\qquad(12)$$

时, $\lambda=1$, $p_1=-(1-r^2)$, $q_1=-r$, $p_2=-(m^2-r^2)$, $q_2=-r$, $p_3=r^2-1$, $q_3=-2r$, $r_1=1$, $p_4=-(m^2-r^2)$, $q_4=-2r$, $r_2=1$,,这里 r 为一常数, $\mathrm{ns}\xi=\frac{1}{\mathrm{sn}\xi}$, $\mathrm{cs}\xi=\frac{\mathrm{cn}\xi}{\mathrm{sn}\xi}$, $\mathrm{ds}\xi=\frac{\mathrm{dn}\xi}{\mathrm{sn}\xi}$. 若 $r=0$,就是文献[12—15]中介绍的 Jacobi 椭圆正弦函数展开法,本文取 $r\neq0$(以下同),代入可求得如下三组解：

$$u_1=\frac{(1-m^2)\alpha k^2}{2\delta}\left(\frac{\mathrm{cs}\xi}{\mathrm{ns}\xi\pm1}\right)^2,$$
$$v_1=\pm\sqrt{\frac{(1-m^2)\alpha(c^2-c_s^2)}{2\delta\beta}}\times k\frac{\mathrm{cs}\xi}{\mathrm{ns}\xi\pm1}\exp(\mathrm{i}px-\omega t),\qquad(13)$$

其中 $\xi=k(x-ct)+\xi$, $\omega=\frac{-(1+m^2)\alpha k^2+2\alpha p^2}{2}$;

$$u_2=\frac{(1-m^2)\alpha k^2}{2\delta}\left(\frac{\mathrm{ds}\xi}{\mathrm{ns}\xi\pm m}\right)^2,$$
$$v_2=\pm\sqrt{\frac{(m^2-1)\alpha(c^2-c_s^2)}{2\delta\beta}}\times k\frac{\mathrm{ds}\xi}{\mathrm{ns}\xi\pm m}\exp(\mathrm{i}px-\omega t),\qquad(14)$$

其中 $\xi=k(x-2\alpha pt)+\xi$, $\omega=\frac{-(1+m^2)\alpha k^2+2\alpha p^2}{2}$;

$$u_3=\frac{\alpha k^2}{2(c^2-c_s^2)}\left[\frac{\sqrt{\frac{(m^2-r^2)(c_s^2-c^2)}{\delta}}\mathrm{cs}\xi}{\mathrm{ns}\xi+r}\pm\frac{\sqrt{\frac{(1-r^2)(c_s^2-c^2)}{\delta}}\mathrm{ds}\xi}{\mathrm{ns}\xi+r}\right]^2,$$
$$v_3=\pm\sqrt{\frac{\alpha}{2\beta}}k\left[\frac{\sqrt{\frac{(m^2-r^2)(c_s^2-c^2)}{\delta}}\mathrm{cs}\xi}{\mathrm{ns}\xi+r}\pm\frac{\sqrt{\frac{(1-r^2)(c_s^2-c^2)}{\delta}}\mathrm{ds}\xi}{\mathrm{ns}\xi+r}\right]\exp(\mathrm{i}px-\omega t),\qquad(15)$$

其中 $\xi=k(x-2\alpha pt)+\xi$, $\omega=\frac{-(1+m^2)\alpha k^2+2\alpha p^2}{2}$,当 $r^2=1$ 时,上式变为(13)式,当 $r^2=m^2$ 时,上式变为

(14)式,当 $m\to 1$,且上式括号内取' + '号,则变为如下孤波解:

$$u_3' = \frac{2\alpha k^2(1-r^2)}{\delta}\left(\frac{1}{\cosh\xi + r\sinh\xi}\right)^2,$$

$$v_3' = \pm\sqrt{\frac{2\alpha(1-r^2)(c_s^2-c^2)}{\delta\beta}} \times k\frac{1}{\cosh\xi + r\sinh\xi}\exp(\mathrm{i}px-\omega t),\quad(16)$$

当 $r=\frac{3}{5}$ 时上式即为文献[20]中的(22)式.

情形 2 当

$$f(\xi) = \frac{1}{\mathrm{nc}\xi + r},$$

$$g(\xi) = \frac{\mathrm{sc}\xi}{\mathrm{nc}\xi + r},$$

$$h(\xi) = \frac{\mathrm{dc}\xi}{\mathrm{nc}\xi + r}\quad(17)$$

时,$\lambda=-1$,$p_1=1-r^2$,$q_1=r$,$p_2=m^2r^2-m^2-r^2$,$q_2=(1-m^2)r$,$p_3=r^2-1$,$q_3=-2r$,$r_1=1$,$p_4=-m^2r^2+m^2+r^2$,$q_4=-2(1-m^2)r$,$r_2=1-m^2$,这里 $\mathrm{nc}\xi=\frac{1}{\mathrm{cn}\xi}$,$\mathrm{sc}\xi=\frac{\mathrm{sn}\xi}{\mathrm{cn}\xi}$,$\mathrm{dc}\xi=\frac{\mathrm{dn}\xi}{\mathrm{cn}\xi}$. 代入可以得到如下三组解:

$$u_4 = \frac{\alpha k^2}{2\delta}\left(\frac{\mathrm{sc}\xi}{\mathrm{nc}\xi\pm 1}\right)^2,$$

$$v_4 = \pm\sqrt{\frac{\alpha(c^2-c_s^2)}{2\delta\beta}}k\frac{\mathrm{sc}\xi}{\mathrm{nc}\xi\pm 1}\exp(\mathrm{i}px-\omega t),\quad(18)$$

其中 $\xi=k(x-2\alpha pt)+\xi$,$\omega=\frac{(2m^2-1)\alpha k^2+2\alpha p^2}{2}$;

$$u_5 = \frac{\alpha k^2}{2\delta(m^2-1)}\left(\frac{\mathrm{dc}\xi}{\mathrm{nc}\xi + r}\right)^2,$$

$$v_5 = \pm\sqrt{\frac{\alpha(c^2-c_s^2)}{2\delta\beta(m^2-1)}}k\frac{\mathrm{dc}\xi}{\mathrm{nc}\xi + r}\exp(\mathrm{i}px-\omega t),\quad(19)$$

其中 $\xi=k(x-2\alpha pt)+\xi$,$\omega=\frac{(2m^2-1)\alpha k^2+2\alpha p^2}{2}$,$r^2=\frac{m^2}{m^2-1}$,由于 $0\leqslant m\leqslant 1$,故 r 必为虚数,所以此解为复标量场中一组解;

$$u_6 = \frac{\alpha k^2}{2\delta}\left[\frac{\sqrt{m^2+r^2-m^2r^2}\,\mathrm{sc}\xi}{\mathrm{ns}\xi + r} \pm \frac{\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{dc}\xi}{\mathrm{nc}\xi + r}\right]^2,$$

$$v_6 = \pm\sqrt{\frac{\alpha(c^2-c_s^2)}{2\delta\beta}}k\left[\frac{\sqrt{m^2+r^2-m^2r^2}\,\mathrm{sc}\xi}{\mathrm{nc}\xi + r} \pm \frac{\sqrt{r^2-1}\,\mathrm{dc}\xi}{\mathrm{nc}\xi + r}\right]\exp(\mathrm{i}px-\omega t),\quad(20)$$

其中 $\xi=k(x-2\alpha pt)+\xi$,$\omega=\frac{(2m^2-1)\alpha k^2+2\alpha p^2}{2}$,当 $r^2=1$ 时,上式变为(18)式,当 $r^2=\frac{m^2}{m^2-1}$ 时,上式变为(19)式,当 $m\to 1$ 时,该解退化为

$$u_6' = \frac{\alpha k^2}{2\delta}\left(\frac{\sinh\xi\pm\sqrt{r^2-1}}{\cosh\xi + r}\right)^2,$$

$$v_6' = \pm\sqrt{\frac{\alpha(c^2-c_s^2)}{2\delta\beta}}k\frac{\sinh\xi\pm\sqrt{r^2-1}}{\cosh\xi + r} \times \exp(\mathrm{i}px-\omega t).\quad(21)$$

上式对应文献[20]的(32)式,当 $r=\pm 1$ 时,与该文献的(30)式相同.

情形 3 当

$$f(\xi) = \frac{1}{\mathrm{nd}\xi + r},$$

$$g(\xi) = \frac{\mathrm{sd}\xi}{\mathrm{nd}\xi + r},$$

$$h(\xi) = \frac{\mathrm{cd}\xi}{\mathrm{nd}\xi + r}\quad(22)$$

时,$\lambda=-m^2$,$p_1=1-r^2$,$q_1=r$,$p_2=r^2-1-m^2r^2$,$q_2=r(m^2-1)$,$p_3=\frac{r^2-1}{m^2}$,$q_3=-\frac{2r}{m^2}$,$r_1=\frac{1}{m_2}$,$p_4=\frac{1-r^2+m^2r^2}{m^2}$,$q_4=\frac{2r(1-m^2)}{m^2}$,$r_2=-\frac{1-m^2}{m^2}$,这里 $\mathrm{nd}\xi=\frac{1}{\mathrm{dn}\xi}$,$\mathrm{sd}\xi=\frac{\mathrm{sn}\xi}{\mathrm{dn}\xi}$,$\mathrm{cd}\xi=\frac{\mathrm{cn}\xi}{\mathrm{dn}\xi}$,代入可求得如下三组解:

$$u_7 = \frac{\alpha k^2m^4}{2\delta}\left(\frac{\mathrm{sd}\xi}{\mathrm{nd}\xi\pm 1}\right)^2,$$

$$v_7 = \pm\sqrt{\frac{\alpha m^4(c^2-c_s^2)}{2\delta\beta}}k\frac{\mathrm{sd}\xi}{\mathrm{nd}\xi\pm 1}\exp(\mathrm{i}px-\omega t),\quad(23)$$

其中 $\xi=k(x-2\alpha pt)+\xi$,$\omega=\omega=\frac{(2-m^2)\alpha k^2+2\alpha p^2}{2}$;

$$u_8 = \frac{\alpha k^2m^4}{2\delta(1-m^2)}\left(\frac{\mathrm{cd}\xi}{\mathrm{nd}\xi + r}\right)^2,$$

$$v_8 = \pm\sqrt{\frac{\alpha m^4(c^2-c_s^2)}{2\delta\beta(1-m^2)}}k\frac{\mathrm{cd}\xi}{\mathrm{nd}\xi + r}\exp(\mathrm{i}px-\omega t),\quad(24)$$

其中 $\xi=k(x-2\alpha pt)+\xi$,$\omega=\omega=\frac{(2-m^2)\alpha k^2+2\alpha p^2}{2}$,$r^2=\frac{1}{1-m^2}$;

$$u_9 = \frac{\alpha k^2}{2\delta(c^2-c_s^2)}\left[\frac{\sqrt{\frac{(1-r^2+m^2r^2)(c^2-c_s^2)}{\delta}}\,\mathrm{sc}\xi}{\mathrm{nc}\xi + r}\right.$$

$$\pm\frac{\sqrt{\frac{(r^2-1)(c^2-c_s^2)}{\delta}}\mathrm{dc}\xi}{\mathrm{nc}\xi+r}\Bigg]^2,$$

$$v_9=\pm\sqrt{\frac{\alpha m^2}{2\beta}}k\Bigg[\frac{\sqrt{\frac{(1-r^2+m^2r^2)(c^2-c_s^2)}{\delta}}\mathrm{sd}\xi}{\mathrm{nd}\xi+r}$$
$$\pm\frac{\sqrt{\frac{(r^2-1)(c^2-c_s^2)}{\delta}}\mathrm{cd}\xi}{\mathrm{nd}\xi+r}\Bigg]\exp(\mathrm{i}px-\omega t),\tag{25}$$

其中 $\xi=k(x-2\alpha pt)+\xi,\omega=\omega=\frac{(2-m^2)\alpha k^2+2\alpha p^2}{2}$，当 $r^2=1$ 时，上式变为(23)式，当 $r^2=\frac{1}{1-m^2}$时，上式变为(24)式，当 $m\to1$ 且上式括号内取‘ + ’时，该解同样给出(21)式.

情形 4　当

$$f(\xi)=\frac{1}{\mathrm{sn}\xi+r},$$
$$g(\xi)=\frac{\mathrm{cn}\xi}{\mathrm{sn}\xi+r},$$
$$h(\xi)=\frac{\mathrm{dn}\xi}{\mathrm{sn}\xi+r}\tag{26}$$

时，$\lambda=-1,p_1=r^2-1,q_1=-r,p_2=m^2r^2-1,q_2=-m^2r,p_3=1-r^2,q_3=2r,r_1=-1,p_4=1-m^2r^2,q_4=2m^2r,r_2=-m^2$，代入可求得如下三组解：

$$u_{10}=\frac{\alpha k^2(1-m^2)}{2\delta}\left(\frac{\mathrm{cn}\xi}{\mathrm{sn}\xi\pm1}\right)^2,$$
$$v_{10}=\pm\sqrt{\frac{\alpha(1-m^2)(c^2-c_s^2)}{2\delta\beta}}k\frac{\mathrm{cn}\xi}{\mathrm{sn}\xi\pm1}$$
$$\times\exp(\mathrm{i}px-\omega t),\tag{27}$$

其中 $\xi=k(x-2\alpha pt)+\xi,\omega=\frac{-(1+m^2)\alpha k^2+2\alpha p^2}{2}$；

$$u_{11}=\frac{\alpha k^2(m^2-1)}{2\delta m^2}\left(\frac{\mathrm{dn}\xi}{\mathrm{sn}\xi+r}\right)^2,$$
$$v_{11}=\pm\sqrt{\frac{\alpha(m^2-1)(c^2-c_s^2)}{2\delta\beta m^2}}k\frac{\mathrm{dn}\xi}{\mathrm{sn}\xi+r}$$
$$\times\exp(\mathrm{i}px-\omega t),\tag{28}$$

其中 $\xi=k(x-2\alpha pt)+\xi,\omega=\frac{-(1+m^2)\alpha k^2+2\alpha p^2}{2},r=\pm\frac{1}{m}$；

$$u_{12}=\frac{\alpha k^2}{2\delta(c^2-c_s^2)}\Bigg[\frac{\sqrt{\frac{(1-m^2r^2)(c^2-c_s^2)}{\delta}}\mathrm{cn}\xi}{\mathrm{sn}\xi+r}$$
$$\pm\frac{\sqrt{\frac{(1-r^2)(c^2-c_s^2)}{\delta}}\mathrm{dn}\xi}{\mathrm{sn}\xi+r}\Bigg]^2,$$

$$v_{12}=\pm\sqrt{\frac{\alpha}{2\beta}}k\Bigg[\frac{\sqrt{\frac{(1-m^2r^2)(c^2-c_s^2)}{\delta}}\mathrm{cn}\xi}{\mathrm{sn}\xi+r}$$
$$\pm\frac{\sqrt{\frac{(1-r^2)(c^2-c_s^2)}{\delta}}\mathrm{dn}\xi}{\mathrm{sn}\xi+r}\Bigg]$$
$$\times\exp(\mathrm{i}px-\omega t),\tag{29}$$

$\xi=k(x-2\alpha pt)+\xi,\omega=\frac{-(1+m^2)\alpha k^2+2\alpha p^2}{2}$，当 $r^2=1$ 时，该解变为(27)式，当 $r^2=\frac{1}{m^2}$时，该解变为(28)式，当 $m\to1$ 且上式括号内取‘ + ’时，该解退化为

$$u'_{12}=\frac{2\alpha k^2(1-r^2)}{\delta(c^2-c_s^2)}\left(\frac{1}{\sinh\xi+r\cosh\xi}\right)^2,$$
$$v'_{12}=\pm\sqrt{\frac{2\alpha(1-r^2)(c^2-c_s^2)}{\delta\beta}}k\frac{1}{\sinh\xi+r\cosh\xi}$$
$$\times\exp(\mathrm{i}px-\omega t),\tag{30}$$

当 $r=\frac{5}{3}$时，上式也可变为文献[20]中的(22)式.

情形 5　当

$$f(\xi)=\frac{1}{\mathrm{cn}\xi+r},$$
$$g(\xi)=\frac{\mathrm{sn}\xi}{\mathrm{cn}\xi+r},$$
$$h(\xi)=\frac{\mathrm{dn}\xi}{\mathrm{cn}\xi+r}\tag{31}$$

时，$\lambda=1,p_1=1-r^2,q_1=r,p_2=1-m^2+m^2r^2,q_2=-m^2r,p_3=1-r^2,q_3=2r,r_1=-1,p_4=1-m^2+m^2r^2,q_4=-2m^2r,r_2=m^2$，代入可求得如下三组解：

$$u_{13}=\frac{\alpha k^2}{2\delta}\left(\frac{\mathrm{sn}\xi}{\mathrm{cn}\xi\pm1}\right)^2,$$
$$v_{13}=\pm\sqrt{\frac{\alpha(c^2-c_s^2)}{2\delta\beta}}k\frac{\mathrm{sn}\xi}{\mathrm{cn}\xi\pm1}$$
$$\times\exp(\mathrm{i}px-\omega t),\tag{32}$$

其中 $\xi=k(x-2\alpha pt)+\xi,\frac{(2m^2-1)\alpha k^2+2\alpha p^2}{2}$；

$$u_{14}=\frac{\alpha k^2}{2\delta m^2}\left(\frac{\mathrm{dn}\xi}{\mathrm{cn}\xi+r}\right)^2,$$
$$v_{14}=\pm\sqrt{\frac{\alpha(c^2-c_s^2)}{2\delta\beta m^2}}k\frac{\mathrm{dn}\xi}{\mathrm{cn}\xi+r}$$
$$\times\exp(\mathrm{i}px-\omega t),\tag{33}$$

其中 $\xi=k(x-2\alpha pt)+\xi$，$\omega=\dfrac{-(1+m^2)\alpha k^2+2\alpha p^2}{2}$，$r^2=\dfrac{m^2-1}{m^2}$考虑到 $0\leqslant m\leqslant1$，则 r 必为虚数，所以此解为复标量场中一组解；

$$u_{15}=\frac{\alpha k^2}{2\delta}\left(\frac{\sqrt{1-m^2+m^2r^2}\,\mathrm{sn}\xi}{\mathrm{cn}\xi+r}\pm\frac{\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{dn}\xi}{\mathrm{cn}\xi+r}\right)^2,$$

$$v_{15}=\pm\sqrt{\frac{\alpha(c^2-c_s^2)}{2\delta\beta}}k\left(\frac{\sqrt{1-m^2+m^2r^2}\,\mathrm{sn}\xi}{\mathrm{cn}\xi+r}\pm\frac{\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{dn}\xi}{\mathrm{cn}\xi+r}\right)\exp(\mathrm{i}px-\omega t),\tag{34}$$

其中 $\xi=k(x-2\alpha pt)+\xi$，$\dfrac{(2m^2-1)\alpha k^2+2\alpha p^2}{2}$，当 $r^2=1$ 时，该解变为(32)式，当 $r^2=\dfrac{m^2-1}{m^2}$时，该解变为(33)式，当 $m\to1$ 时，该解退化为

$$u'_{15}=\frac{\alpha k^2}{2\delta}\left(\frac{\sqrt{r^2}\sinh\xi\pm\sqrt{1-r^2}}{1+r\cosh\xi}\right)^2,$$

$$v'_{15}=\pm\sqrt{\frac{\alpha(c^2-c_s^2)}{2\delta\beta}}k\frac{\sqrt{r^2}\sinh\xi\pm\sqrt{1-r^2}}{1+r\cosh\xi}\times\exp(\mathrm{i}px-\omega t),\tag{35}$$

当 $r^2=1$ 时，上式也可变为文献[20]中的(30)式.

情形 6 当

$$f(\xi)=\frac{1}{\mathrm{dn}\xi+r},\quad g(\xi)=\frac{\mathrm{sn}\xi}{\mathrm{dn}\xi+r},\quad h(\xi)=\frac{\mathrm{cn}\xi}{\mathrm{dn}\xi+r}\tag{36}$$

时，$\lambda=m^2$，$p_1=1-r^2$，$q_1=r$，$p_2=r^2+m^2-1$，$q_2=-r$，$p_3=\dfrac{1-r^2}{m^2}$，$q_3=\dfrac{2r}{m^2}$，$r_1=-\dfrac{1}{m^2}$，$p_4=\dfrac{r^2+m^2-1}{m^2}$，$q_4=-\dfrac{2r}{m^2}$，$r_2=\dfrac{1}{m^2}$，代入可求得如下三组解：

$$u_{16}=\frac{\alpha k^2m^4}{2\delta}\left(\frac{\mathrm{sn}\xi}{\mathrm{dn}\xi\pm1}\right)^2,$$

$$v_{16}=\pm\sqrt{\frac{\alpha m^4(c^2-c_s^2)}{2\delta\beta}}k\frac{\mathrm{sn}\xi}{\mathrm{dn}\xi\pm1}\times\exp(\mathrm{i}px-\omega t),\tag{37}$$

其中

$$\xi=k(x-2\alpha pt)+\xi,\quad \omega=\frac{(2-m^2)\alpha k^2+2\alpha p^2}{2};$$

$$u_{17}=\frac{\alpha k^2m^4}{2\delta}\left(\frac{\mathrm{cn}\xi}{\mathrm{dn}\xi+r}\right)^2,$$

$$v_{17}=\pm\sqrt{\frac{\alpha m^4(c^2-c_s^2)}{2\delta\beta}}k\frac{\mathrm{cn}\xi}{\mathrm{dn}\xi+r}\times\exp(\mathrm{i}px-\omega t),\tag{38}$$

其中

$$\xi=k(x-2\alpha pt)+\xi,\quad \omega=\frac{(2-m^2)\alpha k^2+2\alpha p^2}{2},r^2=1-m^2;$$

$$u_{18}=\frac{\alpha k^2}{2\delta}\left(\frac{\sqrt{\dfrac{(m^2+r^2-1)(c^2-c_s^2)}{\delta}}\mathrm{sn}\xi}{\mathrm{dn}\xi+r}\pm\frac{\sqrt{\dfrac{(1-r^2)(c^2-c_s^2)}{\delta}}\mathrm{cn}\xi}{\mathrm{dn}\xi+r}\right)^2,$$

$$v_{18}=\pm\sqrt{\frac{m^2\alpha}{2\beta}}k\left(\frac{\sqrt{\dfrac{(m^2+r^2-1)(c^2-c_s^2)}{\delta}}\mathrm{sn}\xi}{\mathrm{dn}\xi+r}\pm\frac{\sqrt{\dfrac{(1-r^2)(c^2-c_s^2)}{\delta}}\mathrm{cn}\xi}{\mathrm{dn}\xi+r}\right)\times\exp(\mathrm{i}px-\omega t),\tag{39}$$

其中

$$\xi=k(x-2\alpha pt)+\xi,\quad \omega=\frac{(2-m^2)\alpha k^2+2\alpha p^2}{2},$$

当 $r^2=1$ 时，该解变为(37)式，当 $r^2=1-m^2$ 时，该解变为(38)式，当 $m\to1$ '时，该解退化为(35)式.

以上各周期解和孤波解皆为本文求得的新解，其中各孤波解在一定条件下都可变为文献[20]中的解.

4. 结 论

本文对 Jacobi 椭圆函数展开法进一步扩展，在此基础上求得了 Zakharov 方程组一系列新的精确周期解和孤波解. 本文的方法具有一定的普遍性，可以用来求解更多的非线性发展方程，例如非线性 Schrödinger 方程、KP 方程、Ginzburg-Landau 方程等.

[1] Wang M L 1995 *Phys*. *Lett* . A **199** 169
[2] Lei Y 1999 *Phys*. *Lett*. A **260** 55
[3] Fan E G，Zhang H Q 1998 *Acta Phys*. *Sin*. **47** 353（in Chinese）[范恩贵、张鸿庆 1998 物理学报 **47** 353]
[4] Fan E G 2000 *Acta Phys*. *Sin*. **49** 1409（in Chinese）[范恩贵 2000 物理学报 **49** 1409]
[5] Parkes E J，Duffy B R 1997 *Phys*. *Lett*. A **229** 217
[6] Fan E G 2000 *Phys*. *Lett*. A **277** 212
[7] Zhang G X，Li Z B，Duan Y S 2000 *Sci*. *China* A **30** 1103（in Chinese）[张桂戌、李志斌、段一士 2000 中国科学 A **30** 1103]
[8] Shi Y R，Lü K P，Duan W S，Zhao J B 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 2074（in Chinese）[石玉仁、吕克璞、段文山、赵金保 2001 物理学报 **50** 2074]
[9] Lü K P，Shi Y R，Duan W S *et al* 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 267（in Chinese）[吕克璞、石玉仁、段文山等 2003 物理学报 **52** 267]
[10] Guo G P，Zhang J F 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 1159（in Chinese）[郭冠平、张解放 2002 物理学报 **51** 1159]
[11] Yan C T 1996 *Phys*. *Lett*. A **224** 77
[12] Liu S K，Fu Z T，Liu S D，Zhao Q 2001 *Phys*. *Lett*. A **289** 69
[13] Fu Z T，Liu S K，Liu S D，Zhao Q 2001 *Phys*. *Lett*. A **290** 72
[14] Liu S K，Fu Z T，Liu S D，Zhao Q 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 2068（in Chinese）[刘式适、傅遵涛、刘式达、赵　强 2001 物理学报 **50** 2068]
[15] Liu S K，Fu Z T，Liu S D，Zhao Q 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 10（in Chinese）[刘式适、傅遵涛、刘式达、赵　强 2002 物理学报 **51** 10]
[16] Liu S D，Fu Z T，Liu S K，Zhao Q 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 718（in Chinese）[刘式达、傅遵涛、刘式适、赵　强 2002 物理学报 **51** 718]
[17] Yan Q Y，Zhang Y F，Wei X P 2003 *Chin*. *Phys*. **12** 131
[18] Chen L，Xu Y，Liu Z F，Han J H 2003 *Fzika* A **12** 61
[19] Shi Y R，Guo P，Lü K P，Duan W S 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 3265（in Chinese）[石玉仁、郭　鹏、吕克璞、段文山 2004 物理学报 **53** 3265]
[20] Huang D J，Zhang H Q 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 2434（in Chinese）[黄定江、张鸿庆 2004 物理学报 **53** 2434]

The extended expansion method for Jacobi elliptic function and new exact periodic solutions of Zakharov equations*

Wu Guo-Jiang　Zhang Miao　Shi Liang-Ma　Zhang Wen-Liang　Han Jia-Hua†
（*School of Physics and Material Science*，*Anhui University*，*Hefei*　230039，*China*）
（Received 6 November 2006；revised manuscript received 9 January 2007）

Abstract

We generalized the Jacobi elliptic function expansion method and obtained some new exact periodic solutions of Zakharov equations，thus replenished the known results of the equation using this method.

Keywords：Jacobian elliptic function expansion method，nonlinear evolution equation，exact solution，periodic solution
PACC：0340K，0290

* Project supported by the Natural Science Foundation of Anhui Province of China（Grant No. 01041188）and the Foundation of Classical Courses of Anhui Province.
† Corresponding author. E-mail：jiahuahan@sina.com