

# 非线性 Rosen-Zener 跃迁\*

叶地发<sup>1,2,3)</sup> 傅立斌<sup>2)</sup> 赵 鸿<sup>3)</sup> 刘 杰<sup>2)</sup>

1) 中国工程物理研究院北京研究生部, 北京 100088)

2) 北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100088)

3) 厦门大学物理系, 厦门 361005)

(2006 年 10 月 11 日收到 2006 年 11 月 25 日收到修改稿)

研究了非线性两模系统的 Rosen-Zener 跃迁。在绝热近似下,对基态能相同的两个模式,非线性相互作用使原子表现出强烈的集体行为,它们总是趋向于聚集到同一个模式上。因此外场的绝热调制能够把原子从一种模式彻底转移到另一种模式上。在经典相空间中,可以成功地解释该现象。提议利用现有的玻色爱因斯坦凝聚实验观测这一效应。

关键词: Bose-Einstein 凝聚, Rosen-Zener 跃迁, Rabi 振荡, 受激 Raman 绝热暗通道

PACC: 0365, 4250, 7335

## 1. 引 言

1995 年玻色-爱因斯坦凝聚 ( Bose-Einstein condensation, BEC ) 的实现<sup>[1-3]</sup>, 引发了实验和理论上的广泛兴趣。实验方面, 各种具有简单拓扑结构的系统正逐步得到技术人员的青睐: Albiez 等人成功地实现了由双势阱中两团弱耦合 BEC 组成的 Josephson 结<sup>[4,5]</sup>; Hall 报道了在原子芯片上制造非对称双势阱的实验方案<sup>[6]</sup>。理论方面, 为了探索这一新的物态的有趣性质, 人们引进了众多的模型<sup>[7,8]</sup>。其中最简单也是被研究得最多的是两模系统。它的动力学性质主要取决于三个参数, 即基态能级差, 两模间耦合强度  $v$  以及 BEC 特有的原子间非线性相互作用常数  $c$ <sup>[9-15]</sup>。有意思的是由于非线性相互作用的引入, 导致了绝热隧穿率的破坏<sup>[9,16]</sup>, 动力学不稳定性<sup>[17-19]</sup> 及自俘获<sup>[4,20-22]</sup> 等新奇的量子现象, 并在实验上成功实现。本文所要研究的是非线性 Rosen-Zener 跃迁<sup>[23]</sup>。所谓 Rosen-Zener 跃迁, 是指通

过改变两个模式间的耦合强度来调整粒子在两模间的分布( 早期研究的 Landau-Zener 隧穿的做法是改变模式间基态能级差, 通过量子共振调整粒子的分布, 为了区分这两种不同的机理, 我们采用跃迁一词来代替隧穿)。我们的最主要发现是在绝热极限下, 当耦合常数的调整幅度超过非线性相互作用常数时, 粒子可能全部被转移到另一个模式上, 要么全部停留在原来的模式上, 表现出强烈的集体行为。同时我们还将讨论基态能级差不为零时这一现象的影响。最后, 我们简单讨论了现有实验条件下如何观测该现象。

## 2. 模 型

非线性两模系统布居数的动力学演化可以由无量纲化的薛定谔方程描述,

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = H(t) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad (1)$$

其中

$$H(t) = \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{2} + \frac{c}{2}(|b|^2 - |a|^2) & \frac{v}{2} \\ \frac{v}{2} & -\frac{\gamma}{2} - \frac{c}{2}(|b|^2 - |a|^2) \end{bmatrix}, \quad (2)$$

\* 国家自然科学基金(批准号: 10474008, 10445005)和中国工程物理研究院预研基金资助的课题。

式中  $\gamma$  是能级差,  $c$  是原子间非线性相互作用常数,  $v$  是耦合常数,  $|a|^2$ ,  $|b|^2$  分别是原子处在两种模式上的概率, 须保证总粒子数守恒, 不妨取  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ .

Rosen-Zener 跃迁是利用外场调节模式间的耦合强度, 从而实现原子在模式间转移的过程. 首先将原子全部制备在一个态上, 然后开始扫描外场, 原子在两种模式间振荡, 定义扫描结束后原子转移到另一个态上的概率为跃迁率. 在数值模拟过程中, 一般保持  $\gamma, c$  为常值, 同时取  $v = v_0 \sin^2\left(\frac{\pi t}{T}\right)$ , 式中  $T$  称为脉冲扫描周期,  $T$  越大, 外场变化速度越慢, 绝热条件越能得到满足. 下面先考虑两种模式完全对

称, 即  $\gamma = 0$  的情况.

为了便于对比, 我们先给出线性情况下 ( $c = 0$ ) 的解析结果. 这时方程相对简单, 不妨假设初始时刻粒子全部在  $a$  模式上, 即初始条件为  $(a, b) = (1, 0)$ , 直接求解线性微分方程组 (2) 容易得到  $t$  时刻粒子处在另一模式  $b$  上的概率为

$$P(t) = |b(t)|^2 = \sin^2\left(v_0 \frac{2\pi t - T \sin \frac{2\pi t}{T}}{8\pi}\right), \quad (3)$$

令  $t = T$  得跃迁率 (如图 1(a))

$$\Gamma = P(T) = \sin^2\left(\frac{v_0 T}{4}\right). \quad (4)$$

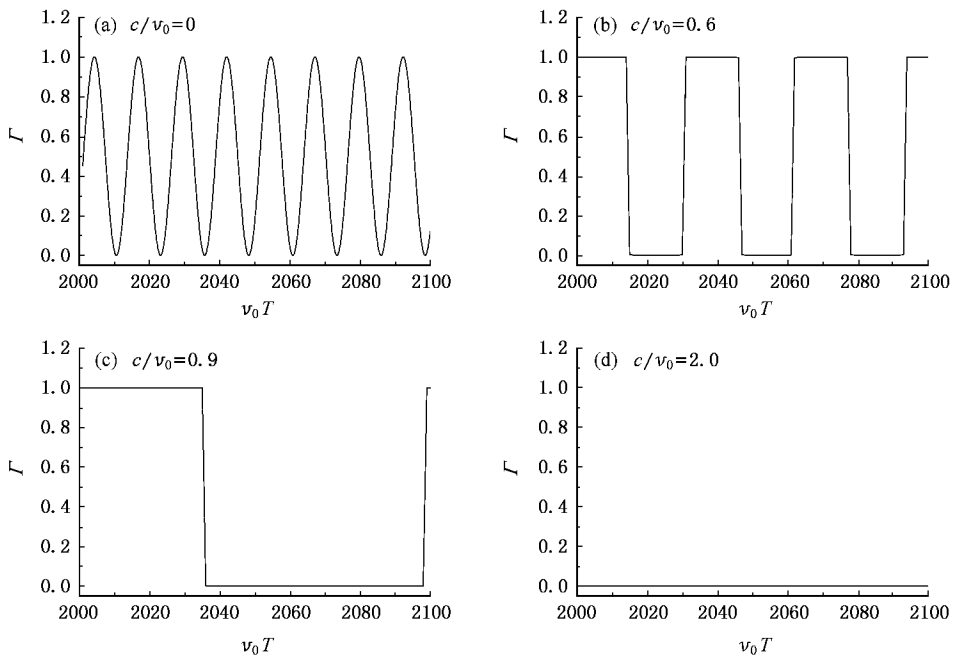


图 1 不同相互作用常数下跃迁率随外场扫描周期的变化 ( $v_0 T \gg 4\pi$  是绝热条件, 选择计算的区间 2000—2100 满足这一关系. 相互作用的存在导致跃迁率只能是 1 或者 0)

这一结论的物理含义相当清晰. 我们知道  $c = 0$  意味着原子间无相互作用, 在两模对称的条件下, 如果初始时刻原子的分布不对称, 不难预见原子将在两模间作无阻尼的周期振荡. 对于  $v$  为定值的情况,  $v/2$  就是周期振荡的角频率, 即熟知的 Rabi 频率. 但若  $v$  随时间变化, 振荡频率应修正为  $v(t)/2$  的平均值,

$$\Omega_{ra} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{v_0}{2} \sin^2\left(\frac{\pi t}{T}\right) dt = \frac{v_0}{4}, \quad (5)$$

与 (4) 给出的频率一致. 由此还可以给出绝热演化条件, 即外场的变化速度应远小于系统演化速度,

$\pi/T \ll v_0/4$  或写成  $v_0 T \gg 4\pi$ . 下面重点讨论绝热区的跃迁率随扫描周期的变化关系.

从图 1 中可以看出, 跃迁率的变化规律大致可分成三个区间讨论: 1)  $c/v_0 = 0$ , 跃迁率随外场扫描周期作正弦式变化, 与解析式 (4) 相一致. 2)  $0 < c/v_0 < 1$ , 正弦式变化过渡为矩形式变化, 意味着原子只能聚集在同一模式上. 并且  $c/v_0$  越大, 变化周期越长. 3)  $c/v_0 > 1$ , 跃迁率始终为 0, BEC 原子在外场变化结束后总回到原来的状态.

这些结果有点出乎意料, 为了挖掘隐含于其中的物理实质, 我们引进了相图分析法. 我们知道, 一

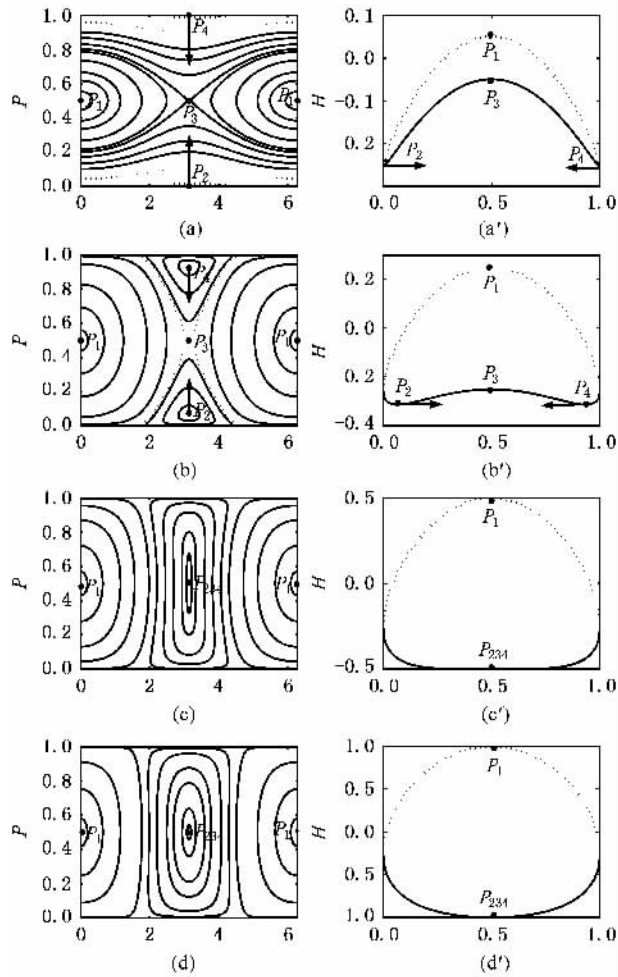


图 2 第一列描述随  $v$  值变化的相图演化.  $c = 1, v$  分别取 (a) 0.1; (b) 0.5; (c) 1; (d) 2. 第二列是相应的能量曲线, 曲线上半部分相位差为 0, 下半部分则为  $\pi$  (左右两列的不动点是一一对应的. 箭头代表随着  $v$  的增大不动点的演化方向.  $c = v$  时不动点发生碰撞)

个量子 Hamilton 算符总能对应一系列描述同一系统的经典 Hamilton 量, 在本模型中, 等效 Hamilton 量可以写成<sup>[24]</sup>

$$H = v \sqrt{p(1-p)} \cos \theta + \frac{c}{4} (2p - 1)^2 + \frac{\gamma}{2} (2p - 1), \quad (6)$$

其中  $p = |b(t)|^2$  是原子从模式  $a$  开始演化, 经过时间  $t$  后停留在模式  $b$  上的概率.  $\theta = \theta_a - \theta_b$  是两模式的相位差, 它们构成了  $H$  的一对正则变量. 以  $\theta$  为横轴,  $p$  为纵轴作  $H$  的等高线就是我们所需的相图.

图中的极值点由下式给出:

$$\theta^* = 0, \pi; \quad (7)$$

$$\frac{v(1-2p^*)}{2\sqrt{p^*(1-p^*)}} - \alpha(1-2p^*) + \gamma = 0. \quad (8)$$

对于  $\gamma = 0$  的情况: (1) 当  $v < c$  时, 方程有四个解,

$$(\theta^*, p^*) = (0, 1/2), (\pi, 1/2), \left( \pi, \frac{1}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) \right),$$

相图上有四个对应的不动点. (2) 当  $v > c$  时, 方程只有两个解  $(\theta^*, p^*) = (0, 1/2), (\pi, 1/2)$ , 相图上只有两个不动点, 另两个在  $c = v$  时相互碰撞, 随后消失.

现在我们让  $(a, b)$  从  $(1, 0)$  开始演化.  $t = 0$  时  $v = 0, (1, 0)$  近似为本征态, 对应于相图  $\alpha$  (a) 中的不动点  $P_2$ . 而绝热定理表明: 如果  $(a, b)$  的初始状态是不动点 (椭圆点), 那么它在整个绝热演化过程中将始终保持为不动点. 因此随着时间的演化,  $v$  变大,  $P_2$  向上移, 逐渐向  $P_3$  靠近. 若  $c/v_0 > 1$ , 在  $t = T/2$  时,  $P_2, P_3$  靠得最近 (图  $\alpha$  (b)). 此后  $v$  开始变小,  $P_2$  沿着原来的路径返回到起始点, 因此跃迁率总是等于零.

但若  $c/v_0 < 1$ , 存在时刻  $t^*$  满足  $c = v(t^*)$ , 不难解得

$$t^* = T \sin^{-1} \left( \frac{\sqrt{c/v_0}}{\pi} \right). \quad (9)$$

这意味着  $P_2, P_3, P_4$  碰在一起, 融合成为一个三重简并态, 记为  $P_{234}$  (图  $\alpha$  (c)), 它是一个稳定的不动点. 然后随着时间的演化,  $P_{234}$  保持在相图的中心不动, 变化的只是它周围的轨道, 这一状态只能保持到  $t = T/2$  (即  $v$  达到最大值的时候 (图  $\alpha$  (d))). 紧接着  $P_{234}$  开始沿着原来的路径返回, 直到  $t^{**} = T - t^*$  (即  $c$  等于  $v(t^{**})$ ),  $P_{234}$  再次分裂为  $P_2, P_3, P_4$  三个不动点. 现在, 有趣的问题出现了,  $(a, b)$  将绕着哪个不动点继续演化呢?

如果绝热定理严格成立的话, 我们有足够的理由相信, 原子能够停留在  $P_3$  (不稳定不动点) 上不动. 但事实上, 在实际系统中,  $T \rightarrow \infty, v \rightarrow 0$  无法严格成立, 即初态不一定是严格的本征态, 演化过程不一定是严格的绝热过程, 因此  $(a, b)$  总是在不动点附近轨道作小摆动 (图 3). 原子各有一半的概率绕  $P_2$  和  $P_4$  返回. 如果  $(a, b)$  绕着  $P_2$  返回, 跃迁率为 0; 反之若  $(a, b)$  绕着  $P_4$  返回, 跃迁率则为 1. 上述理论分析与数值计算结果相当符合. 在图 3 中分

别给出了跃迁率为 0 和 1 的两条实际演化路径.

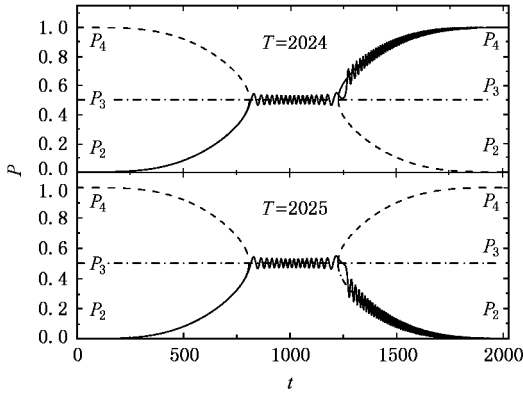


图 3  $c/v_0 = 0.9$  时的两条实际演化曲线(两个相当接近的  $T$ , 却由于原子最后一次跨越势垒的速度不同而经历截然不同的演化路径. 点线是被原子放弃绕行的不动点, 点划线是不稳定的不动点)

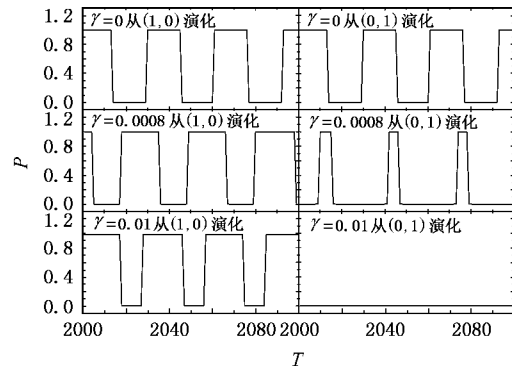


图 4  $\gamma$  对跃迁率的影响 ( $c = 0.6, v = 1.0$  (1.0) 意味着从高能模式开始演化 (0,1) 则代表低能模式.  $\gamma$  的存在使得从两个模式开始演化的跃迁率不再对称, 甚至始终无法跃迁)

以上讨论的是两模式对称(基态能相同)的情况, 这在实验上难以完全实现, 我们接下来考虑基态能级的微小偏差对绝热跃迁率的影响. 我们更感兴趣的是  $\gamma$  较小, 而  $v_0$  较大的情况, 这时  $\gamma$  可视为微扰, 系统的性质不会发生太大的变化. 从图 4 中可以看出, 由于  $\gamma$  的存在使得绝热跃迁率表现出高度不对称性. 随着  $\gamma$  的增加, 从高能模式向低能模式的跃迁得到加强, 而从低能模式向高能模式的跃迁则受到抑制, 甚至无法发生. 同时跃迁率仍然非常接近 0 和 1, 这是由 BEC 原子的集体性质所决定的. 这些现象依旧可以采用前面引入的相图和能量曲线的方法进行解释, 过程类似, 不再赘述.

### 3. 应 用

两模系统在物理实验中广泛存在. 例如, 它可以用来描述双势阱系统中的 BEC 原子<sup>[4]</sup>, 此时  $\gamma$  是两阱的零点能级差, 在图 5 中等于  $E_{A0} - E_{B0}$ , 与势阱的形状有关.  $c$  体现了同一阱中原子的碰撞强度, 低温时只考虑 s 波散射.  $c > 0$  表示原子间相互排斥,  $c < 0$  表示原子间相互吸引.  $v$  是两阱的耦合强度, 与势垒的高度有关. 势垒越高, 耦合越小. 在实验中, 势垒由一束蓝失谐的激光产生. 刚开始的激光强度足够大, 这时候  $v$  趋于零, 原子无法发生跃迁. 然后随着激光的减小, 原子开始在两阱中振荡, 并在激光反向增大到原来的强度后形成稳定的分布. 根据我们的研究发现, 原子最终会以绝对的优势停留在其中的一个阱中.

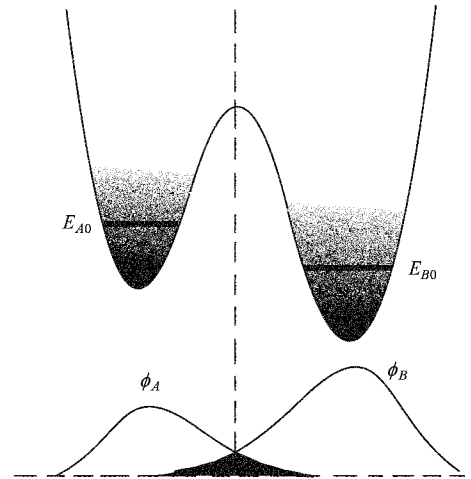


图 5 双势阱模型(横轴是空间坐标, 纵轴是外场强度(对上半图)或概率幅(对下半图). 右阱能级较低, 稳定后具有较多的原子. 势阱间的高势垒使得基态波函数的交叠部分面积小)

两模模型还可以用来描述 BEC 原子的两种不同的自旋态之间的跃迁. 这时  $\gamma$  是它们在磁场中的 Zeeman 能级差.  $c$  与自旋态间的 s 波散射长度有关, 由于不同自旋态的空间波函数交叠得非常厉害, 中间的碰撞起着主导作用. 目前实验上主要实现的是  $|F = 1, m_F = -1\rangle$  和  $|F = 2, m_F = 1\rangle$  两种自旋态的混合<sup>[25-27]</sup>. 通过调整自旋态间的耦合强度可以实现自旋的彻底转向, 例如把自旋朝上的粒子全部改变成自旋朝下, 从而实现顺磁体和反磁体之间的转化.

## 4. 结 论

本文研究了两模系统的 Rosen-Zener 跃迁. 出于对绝热演化的兴趣及讨论的方便,我们将两模间的耦合常数缓慢地从零变到最大值,然后再次降到零. 结果发现如果这一调整幅度小于非线性相互作用常数时,原子总在外场结束时回到原来的状态. 更有趣的是,如果调整幅度更大,以至于超过非线性相互作用常数,原子可能被完全转移到另一个模式上,否则只能全部回到原来的状态. 这说明非线性相互作用导致系统表现出明显的集体行为. 同时我们发现两模基态能的偏差加强了从高能模式向低能模式的跃迁,但对反方向的跃迁却起到了抑制作用. 这些现象类似于人们熟悉的受激拉曼绝热暗通道 (STIRAP)<sup>[28, 29]</sup>. 不同的是,STIRAP 需要第三个模态作为中介,从而把原子从一种模式全部转移到另一

个模式上. 我们的发现是即便在非线性的两模系统中也能实现这种模式间的彻底转移. 原因在于,当非线性常数超过两模间的耦合常数时,两模系统事实上有四个能量本征态. 与线性情况相比,多出来的两个本征能级恰恰是实现模式间转换的关键. 但是我们模型中的转移方式的好处是对实验条件的要求十分宽松. 例如外场扫描周期只要取一段区间中的任意值都能实现模式间转换. 这是和 Rabi 振荡<sup>[30]</sup>的最重要区别, Rabi 振荡只有在外场取一些特定值时才能实现模式间的彻底转换. 同时,尽管我们以按正弦平方形式变化的外场讨论全文,但从我们的相图分析看来,只要保证外场是绝热变化的,其具体形式并不会对我们的结果产生影响. 希望这些现象能够在现有的 BEC 实验中得到实现.

感谢吴飙教授,王兵兵教授,付盘铭教授,陈式刚教授和陈徐宗教授的有益讨论.

- [ 1 ] Anderson M H , Ensher J R , Matthews M R *et al* 1995 *Science* **269** 198
- [ 2 ] Davis K B , Mewes M O , Andrews M R *et al* 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 3969
- [ 3 ] Bradley C C , Sackett C A , Tollett J J *et al* 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 1687
- [ 4 ] Albiez M , Gati R , Fölling J *et al* 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 010402
- [ 5 ] Xiao Y F , Wang D L , Wang F J *et al* 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 547 ( in Chinese ) [ 肖宇飞、王登龙、王凤姣等 2006 物理学报 **55** 547 ]
- [ 6 ] Hall B V , Whitlock S , Anderson R *et al* 2006 arXiv :cond-mat/0609014
- [ 7 ] Dalfovo F , Giorgini S , Pitaevskii L *et al* 1999 *Rev. Mod. Phys.* **71** 463
- [ 8 ] Leggett A 2001 *Rev. Mod. Phys.* **73** 307
- [ 9 ] Wu B , Niu Q 2000 *Phys. Rev. A* **61** 023402
- [ 10 ] Liu J , Fu L B , Ou B Y *et al* 2002 *Phys. Rev. A* **66** 023404
- [ 11 ] Fu L B , Chen S G 2005 *Phys. Rev. E* **71** 016607
- [ 12 ] Yan K Z , Tan W H 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1909 ( in Chinese ) [ 闫珂柱、谭维翰 2000 物理学报 **49** 1909 ]
- [ 13 ] Hu Z F , Du C G , Li S Q 2003 *Chin. Phys.* **12** 708
- [ 14 ] Zhang G F , Yin W , Liang J Q , Yan Q W 2004 *Chin. Phys.* **13** 988
- [ 15 ] Wei W 2005 *Chin. Phys.* **14** 2407
- [ 16 ] Cristiani M , Morsch O , Müller J H *et al* 2002 *Phys. Rev. A* **65** 063612
- [ 17 ] Liu J , Wang W G , Zhang C W *et al* 2005 *Phys. Rev. A* **72** 063623
- [ 18 ] Liu J , Zhang C W , Raizen M G *et al* 2006 *Phys. Rev. A* **73** 013601
- [ 19 ] Yuan D Q 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1634 ( in Chinese ) [ 袁都奇 2006 物理学报 **55** 1634 ]
- [ 20 ] Raghavan S , Smerzi A , and Fantoni S *et al* 2002 *Phys. Rev. A* **59** 620
- [ 21 ] Wang G F , Fu L B , Liu J 2006 *Phys. Rev. A* **73** 013619
- [ 22 ] Wang G F , Fu L B , Zhao H *et al* 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5003 ( in Chinese ) [ 王冠芳、傅立斌、赵 鸿等 2005 物理学报 **54** 5003 ]
- [ 23 ] Rosen N , Zener C 1932 *Phys. Rev.* **40** 502
- [ 24 ] Liu J , Wu B , Niu Q 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 170404
- [ 25 ] Hall D S , Matthews M R , Wieman C E *et al* 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 1543
- [ 26 ] Matthews M R , Hall D S , Jin D S *et al* 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 243
- [ 27 ] Hall D S , Matthews M R , Ensher J R *et al* 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 1539
- [ 28 ] Graefe E M , Korsch H J , Witthaut D 2006 *Phys. Rev. A* **73** 013617
- [ 29 ] Zhou M , Huang C J 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2514 ( in Chinese ) [ 周 明、黄春佳 2002 物理学报 **51** 2514 ]
- [ 30 ] Gentile T R , Hughey B J , Kleppner D 1989 *Phys. Rev. A* **40** 5103

# Nonlinear Rosen-Zener transition<sup>\*</sup>

Ye Di-Fa<sup>1,2,3)</sup> Fu Li-Bin<sup>2)</sup> Zhao Hong<sup>3)</sup> Liu Jie<sup>2)</sup>

1) *Beijing Graduate School, China Academy of Engineering Physics, Beijing 100088, China*

2) *Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100088, China*

3) *Department of Physics, Xiamen University, Xiamen 361005, China*

(Received 11 October 2006; revised manuscript received 25 November 2006)

## Abstract

We investigate the nonlinear Rosen-Zener transition in two-mode systems. A non-trivial collective behavior, in which all the atoms tend to stay at only one of the modes, emerges with the appearance of nonlinear interaction under the adiabatic approximation. The application of an external field can transfer the atoms from one mode to the other completely. Such phenomena can be fully understood with the help of the phase diagram. We expect the predicted effect will be detected in current BEC experiments.

**Keywords** : Bose-Einstein condensation, Rosen-Zener transition, Rabi oscillation, stimulated Raman adiabatic passage

**PACC** : 0365, 4250, 7335

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10474008, 10445005) and the Science and Technology Fund of CAEP.