

# 色噪声驱动下调幅波的单模激光随机共振\*

张良英<sup>1)</sup> 曹 力<sup>2)</sup> 金国祥<sup>3)</sup>

1) 襄樊学院物理系, 襄樊 441053)

2) 华中科技大学激光技术国家重点实验室, 武汉 430074)

3) 武汉工程大学计算机学院, 武汉 430073)

(2006 年 11 月 14 日收到, 2006 年 12 月 18 日收到修改稿)

对单模激光增益模型的光强方程加入调幅波, 用线性化近似方法计算了以  $e$  指数形式关联的两色噪声驱动下光强的输出功率谱及信噪比. 结果表明噪声间互关联时间及互关联程度对随机共振影响很大, 信噪比随着载波信号频率  $\omega$  和调制信号频率  $\Omega$  的变化也和白噪声的变化曲线有很大不同.

关键词: 色噪声, 单模激光, 随机共振, 调幅波

PACC: 0540, 4260K

## 1. 引 言

近年来, 随机共振的研究在理论和实验上都取得了较大进展. 已有的研究成果基本上限于单频周期驱动信号<sup>[1-8]</sup>, 而实际应用要求宽频调制输入信号. 通讯中的载波也要求有很宽的频率范围. 将信号加载到激光辐射源上, 使激光作为传递信息的工具, 激光通讯有广阔的应用前景. 在以往对激光系统的随机共振研究中, 输入信号采用的是单一频率信号, 为更切合实际, 我们对单模激光增益模型的输入信号采用调幅波, 即将被传送的信息信号(低频调制信号)对高频载波进行调制, 得一载有信息信号的调幅波. 传统的随机共振一般由信噪比与噪声强度的关系来体现<sup>[9]</sup>, 文献 [10, 11] 在传统的随机共振基础上又发现了广义随机共振, 即信噪比随系统的其他一些特征参量(如信号的振幅、频率或噪声的相关时间等)的变化曲线出现极大值. 文献 [12] 研究了以  $\delta$  函数形式关联的两个白噪声驱动下单模激光增益模型的随机共振, 本文研究具有色关联的两个色噪声驱动下光强的输出功率谱及信噪比, 发现两噪声之间的关联程度  $\lambda$  和关联时间  $\tau_3$  对随机共振的影响很大, 信噪比随载波信号频率和调制信号频率的变化曲线与白噪声的情况大不相同.

## 2. 输入调幅波的单模激光增益模型光强相关函数及信噪比

单模激光增益模型<sup>[13]</sup>输入调幅波后的光强方程为

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt'} = & -2KI + \frac{2\Gamma}{1+\beta I}I + D + \frac{2I}{1+\beta I}\xi(t') \\ & + 2\sqrt{I}\gamma(t') + A[1 - B\cos(\Omega t')] \cos(\omega t'), \end{aligned} \quad (1)$$

式中的第 1 项为损失项, 第 2 项为增益项, 第 3 项为“虚假漂移项”, 第 4 项是由于增益参数涨落引起的乘性噪声项, 第 5 项是由于量子噪声引起的乘性噪声项, 第 6 项为信号调制项.

两噪声  $\xi(t')$  和  $\gamma(t')$  的统计性质为

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \gamma(t) = 0, \\ \xi(t)\xi(t') &= \frac{Q}{2\tau_1} \exp\left(-\frac{|t-t'|}{\tau_1}\right), \\ \gamma(t)\gamma(t') &= \frac{D}{2\tau_2} \exp\left(-\frac{|t-t'|}{\tau_2}\right), \\ \xi(t)\gamma(t') &= \gamma(t)\xi(t') \\ &= \frac{\lambda\sqrt{DQ}}{2\tau_3} \exp\left(-\frac{|t-t'|}{\tau_3}\right), \end{aligned} \quad (-1 \leq \lambda \leq 1). \quad (2)$$

这里,  $I$  为激光光强,  $\beta = \bar{A}/\Gamma$ ,  $\bar{A}$  和  $\Gamma$  分别为自饱和系数和增益系数,  $K$  为损失系数,  $A$  为载波信号

\* 国家自然科学基金(批准号: 10275025)及湖北省教育厅重点科研基金(批准号: D200725001)资助的课题.

振幅,  $B$  为调制信号振幅,  $\Omega$  为低频调制信号频率,  $\omega$  为高频载波信号频率,  $\tau_1$  为抽运噪声自关联时间,  $\tau_2$  为量子噪声自关联时间,  $\tau_3$  为两噪声间的互关联时间,  $\lambda$  为衡量噪声关联程度的参数,  $Q, D$  分别为抽运噪声和量子噪声强度.

将(1)式在确定论定态光强  $I_0 = (\Gamma - K) \beta K$  附近线性化. 令

$$I = I_0 + \epsilon(t'),$$

代入(1)式可得线性化方程为

$$\begin{aligned} \frac{d\epsilon(t')}{dt} = & -\gamma\epsilon(t') + D + \frac{2I_0}{1 + \beta I_0} \xi(t') \\ & + 2\sqrt{I_0} \eta(t') + A[1 - B\cos(\Omega t')] \\ & \times \cos(\omega t'), \end{aligned} \quad (3)$$

式中  $\epsilon(t')$  为微扰项,  $\gamma = 2K(\Gamma - K)/\Gamma$ .

根据平均光强相关函数的定义

$$\begin{aligned} \alpha(t) = & \lim_{t' \rightarrow \infty} \frac{I(t' + t)I(t')}{\langle I(t' + t)I(t') \rangle} \\ = & \lim_{t' \rightarrow \infty} \frac{\Omega}{2\pi} \int_{t'}^{t'+\frac{2\pi}{\Omega}} I(t' + t)I(t') dt', \end{aligned} \quad (4)$$

可得到平均光强相关函数, 对得到的平均光强相关函数进行傅里叶变换, 得到光强功率谱为

$$S(\omega') = S_1(\omega') + S_2(\omega').$$

这里,  $S_1(\omega')$  为输出信号功率谱,  $S_2(\omega')$  为输出噪声功率谱, 具体表达式分别为

$$\begin{aligned} S_1(\omega') = & \frac{\pi A^2 \delta(\omega' - \omega)}{2(\gamma^2 + \omega^2)} \\ & + \frac{\pi A^2 B^2 \delta(\omega' - (\omega + \Omega))}{8(\gamma^2 + (\omega + \Omega)^2)} \\ & + \frac{\pi A^2 B^2 \delta(\omega' - (\omega - \Omega))}{8(\gamma^2 + (\omega - \Omega)^2)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2(\omega') = & \left[ \frac{4I_0^2 Q}{(1 + \beta I_0)(\omega'^2 \tau_1^2 + 1)} \right. \\ & + \frac{8I_0^{3/2} \lambda \sqrt{DQ}}{(1 + \beta I_0)(\omega'^2 \tau_3^2 + 1)} \\ & \left. + \frac{4I_0 D}{\omega'^2 \tau_2^2 + 1} \right] \frac{1}{(\gamma^2 + \omega'^2)}. \end{aligned}$$

输出信号功率谱中有三个频率信号, 这三个信号频率处的单位噪声功率分别为

$$\begin{aligned} S_2(\omega' = \omega) = & \left[ \frac{4I_0^2 Q}{(1 + \beta I_0)(\omega^2 \tau_1^2 + 1)} \right. \\ & \left. + \frac{8I_0^{3/2} \lambda \sqrt{DQ}}{(1 + \beta I_0)(\omega^2 \tau_3^2 + 1)} \right. \end{aligned}$$

$$\left. + \frac{4I_0 D}{\omega^2 \tau_2^2 + 1} \right] \frac{1}{(\gamma^2 + \omega'^2)},$$

$$\begin{aligned} S_2(\omega' = \omega + \Omega) = & \left[ \frac{4I_0^2 Q}{(1 + \beta I_0)(\omega + \Omega)^2 \tau_1^2 + 1)} \right. \\ & + \frac{8I_0^{3/2} \lambda \sqrt{DQ}}{(1 + \beta I_0)(\omega + \Omega)^2 \tau_3^2 + 1)} \\ & \left. + \frac{4I_0 D}{(\omega + \Omega)^2 \tau_2^2 + 1} \right] \\ & \times \frac{1}{(\gamma^2 + (\omega + \Omega)^2)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2(\omega' = \omega - \Omega) = & \left[ \frac{4I_0^2 Q}{(1 + \beta I_0)(\omega - \Omega)^2 \tau_1^2 + 1)} \right. \\ & + \frac{8I_0^{3/2} \lambda \sqrt{DQ}}{(1 + \beta I_0)(\omega - \Omega)^2 \tau_3^2 + 1)} \\ & \left. + \frac{4I_0 D}{(\omega - \Omega)^2 \tau_2^2 + 1} \right] \\ & \times \frac{1}{(\gamma^2 + (\omega - \Omega)^2)}. \end{aligned}$$

输出信号总功率为

$$\begin{aligned} P_s = & \int_0^\infty S_1(\omega') d\omega' \\ = & \frac{\pi A^2}{2(\gamma^2 + \omega^2)} + \frac{\pi A^2 B^2}{8(\gamma^2 + (\omega + \Omega)^2)} \\ & + \frac{\pi A^2 B^2}{8(\gamma^2 + (\omega - \Omega)^2)}. \end{aligned} \quad (5)$$

信噪比  $R$  定义为输出信号总功率与三个信号频率处单位噪声功率之和的比值(只取正  $\omega$  的谱),

$$R = \frac{P_s}{S_2(\omega' = \omega) + S_2(\omega' = \omega + \Omega) + S_2(\omega' = \omega - \Omega)} \quad (6)$$

### 3. 输出光强的随机共振

#### 3.1. 信噪比随抽运噪声强度和量子噪声强度的变化

图 1(a) 是根据(6)式以衡量噪声关联程度的量  $\lambda$  为参数画出的  $R-Q$  曲线, 从图中可看到, 当  $\lambda$  为负时信噪比随抽运噪声强度的变化出现一极大值, 即出现随机共振现象, 峰值随着  $\lambda$  绝对值的增大而增高, 极值位置向右移动. 当  $\lambda$  为零和正时,  $R-Q$  曲线单调衰减. 这种现象和单频周期信号驱动的结果相同.

图 1(b) 是根据(6)式以噪声间互关联时间  $\tau_3$  为参数画出的  $R-Q$  曲线, 只有当  $\tau_3$  大于或等于  $\tau_2$

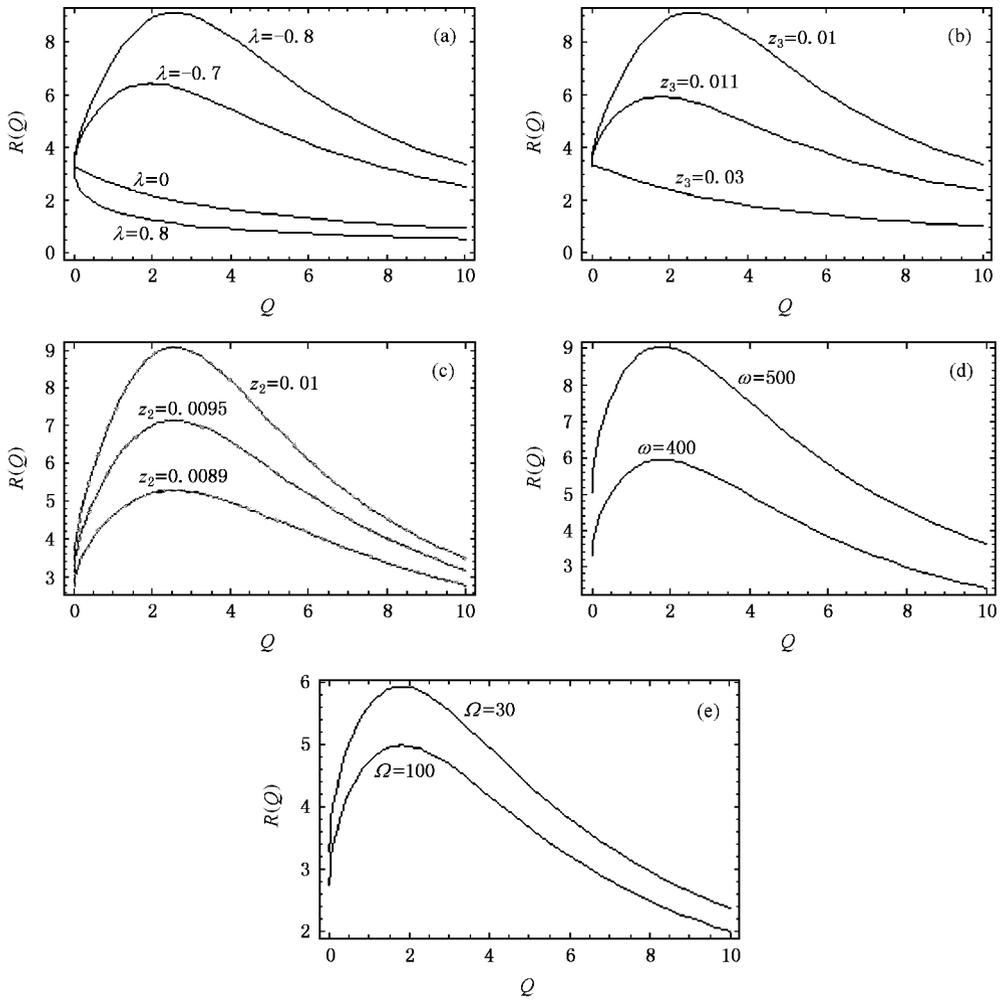


图 1 信噪比随抽运噪声强度的变化 ( $\beta = 1, I_0 = 1, \gamma = 400, \Omega = 30, B = 1, A = 1, \omega = 400, D = 1$ ) (a)  $\omega = 400, \Omega = 30, \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0.01$ ; (b)  $\lambda = -0.08, \tau_1 = \tau_2 = 0.01, \omega = 400, \Omega = 30$ ; (c)  $\tau_1 = \tau_3 = 0.01, \lambda = -0.8, \omega = 400, \Omega = 30$ ; (d)  $\tau_1 = \tau_2 = 0.01, \lambda = -0.8, \Omega = 30, \tau_3 = 0.011$  (e)  $\tau_1 = \tau_2 = 0.01, \lambda = -0.8, \omega = 400, \tau_3 = 30$

和  $\tau_1$  时 (小于  $\tau_2$  和  $\tau_1$  时信噪比为负), 信噪比随抽运噪声强度的变化曲线出现极大值, 从图中可看到, 峰值随着  $\tau_3$  的增大而降低, 极值位置向左移动.  $\tau_3$  增大到一定值时,  $R-Q$  曲线呈单调衰减.

图 1(c) 是根据(6)式以量子噪声自关联时间  $\tau_2$  为参数画出的  $R-Q$  曲线, 从图中可看到, 峰值随着  $\tau_2$  的增大而增大, 极值位置不变.

图 1(d) 是根据(6)式以高频载波信号频率  $\omega$  为参数画出的  $R-Q$  曲线, 从图中可看到, 峰值随着  $\omega$  的增大而增大, 极值位置不变.

图 1(e) 是根据(6)式以低频调制信号频率  $\Omega$  为参数画出的  $R-Q$  曲线, 从图中可看到, 峰值随着  $\Omega$  的增大而降低, 极值位置不变.

图 1 说明, 两噪声是色噪声且之间为色关联时,

噪声关联程度  $\lambda$  和噪声互关联时间  $\tau_3$  的取值对随机共振影响很大, 只有  $\lambda$  取负值时  $R-Q$  曲线才出现极大值,  $\lambda$  取零和正时共振峰消失. 两噪声之间关联时间  $\tau_3$  的取值必须大于或等于  $\tau_1, \tau_2$  才出现随机共振,  $\tau_3$  增大到一定值随机共振现象又消失, 所以  $\tau_3$  的取值有一定范围.  $R$  的峰值随着  $\omega$  的增大而增大, 随着  $\Omega$  的增大而降低, 这与两白噪声以白关联形式互关联<sup>[12]</sup>是不同的, 这时的  $R$  峰值不受  $\omega, \Omega$  影响.

### 3.2. 信噪比 $R$ 随载波信号频率 $\omega$ 和调制信号频率 $\Omega$ 的变化曲线

图 2(a) 是根据(6)式以噪声间互关联时间  $\tau_3$  为参数画出的  $R-\omega$  曲线, 从图中看出  $\tau_3$  取值较小

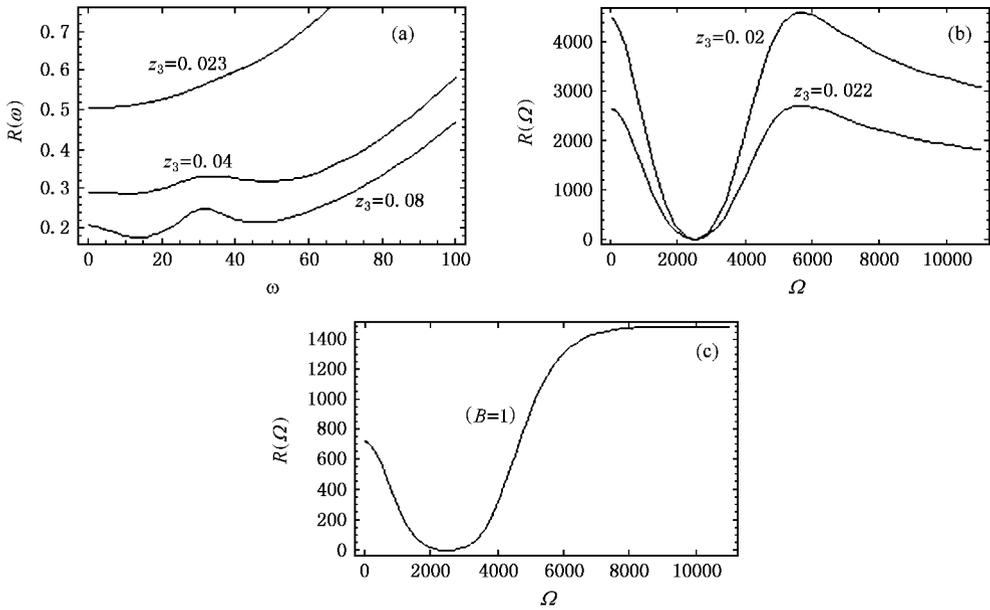


图 2 信噪比随载波信号频率和调制信号频率的变化 ( $\beta = 1, \gamma = 400, \mu A = 1, I_0 = 1, Q = 4, D = 1, \tau_1 = \tau_2 = 0.02, \lambda = -0.08$ ) (a)  $B = 3, \omega = 30$ ; (b)  $B = 3, \omega = 2500$ ; (c)  $\tau_3 = 0.022, \omega = 2500$

时  $R-\omega$  曲线单调上升, 随着  $\tau_3$  的增大曲线出现一个极大值和两个极小值, 且随着  $\tau_3$  的增大极大值向左移动, 峰值降低.

图 2(b) 是调制信号振幅  $B$  取值为 3 时根据 (6) 式以噪声间互关联时间  $\tau_3$  为参数画出的  $R-\Omega$  曲线, 从图中看出  $R-\Omega$  曲线出现一个极小值和一个极大值, 随着  $\tau_3$  的增大, 极值位置不变, 极大值峰值降低.

图 2(c) 是调制信号振幅  $B$  取值为 1 时画出的  $R-\Omega$  曲线, 从图中看出  $R-\Omega$  曲线只出现一个极小值, 没有极大值.

图 2 和文献 [12] 的图 2 比较, 发现色噪声的  $R-\omega$  曲线出现一个极大值和两个极小值, 而白噪声的  $R-\omega$  曲线出现一个极大值. 色噪声的  $R-\Omega$  曲线出现

一个极小值和一个极大值, 而白噪声的  $R-\Omega$  曲线出现一个极大值.

### 4. 结 论

本文研究了具有色关联的两个色噪声驱动的单模激光增益模型输入调幅波后输出光强的随机共振现象, 得到的结果是只有  $\lambda$  取负值时出现随机共振, 两噪声之间互关联时间  $\tau_3$  的取值在一定范围内才出现随机共振现象. 载波信号和调制信号的频率对随机共振的峰值有影响, 随着载波信号频率  $\omega$  的增大而增大, 随着调制信号频率  $\Omega$  的增大而降低.  $R-\omega$  曲线出现一个极大值和两个极小值,  $R-\Omega$  曲线出现一个极小值和一个极大值.

[1] Kang Y M, Xu J X, Xie Y 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2712 (in Chinese) [康艳梅、徐健学、谢 勇 2003 物理学报 **52** 2712]  
 [2] Zhu H J, Li R, Wen X D 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2404 (in Chinese) [祝恒江、李 蓉、温孝东 2003 物理学报 **52** 2404]  
 [3] Zhang L Y, Cao L, Wu D J 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1174 (in Chinese) [张良英、曹 力、吴大进 2003 物理学报 **52** 1174]  
 [4] Luo X Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 977 (in Chinese) [罗晓琴 2002 物理学报 **51** 977]

[5] Li J H, Huang Z Q, Wang C Y 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 382 (in Chinese) [李静辉、黄祖洽、王存玉 1998 物理学报 **47** 382]  
 [6] Luo X Q, Zhu S Q 2004 *Chin. Phys.* **13** 1201  
 [7] Xiao F H, Yan G R, Han Y H 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 0396 (in Chinese) [肖方红、闫桂荣、韩雨航 2004 物理学报 **53** 0396]  
 [8] Jin Y F, Xu W, Li W, Xu M 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2562 (in Chinese) [靳艳飞、徐 伟、李 伟、徐 猛 2005 物理学报 **54** 2562]

- [ 9 ] Menamara B , Wiesenfeld K 1989 *Phys. Rev. A* **39** 4854 Chinese ) [ 张良英、曹 力、金国祥 2006 物理学报 **55** 6238 ]
- [ 10 ] Barykin A V , Seki K 1998 *Phys. Rev. E* **57** 6555 [ 13 ] Hernandez-Garcia E , Toral R , San Miguel M 1990 *Phys. Rev. A* **42** 6823
- [ 11 ] Berdichevsky V , Gitterman M 1999 *Phys. Rev. E* **60** 1494
- [ 12 ] Zhang L Y , Cao L , Jin G X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 6238 ( in

## Stochastic resonance of amplitude modulation wave in single-mode laser driven by color noises \*

Zhang Liang-Ying<sup>1)</sup> Cao Li<sup>2)</sup> Jin Guo-Xiang<sup>3)</sup>

1 *Department of Physics , Xiangfan University , Xiangfan 441053 , China )*

2 *State Key Laboratory of Laser Technology , Huazhong University of Science and Technology , Wuhan 430074 , China )*

3 *School of Computer Science , Wuhan Institute of Technology , Wuhan 430073 , China )*

( Received 14 November 2006 ; revised manuscript received 18 December 2006 )

### Abstract

By adding modulation wave to the equation of the laser intensity in the gain-noise model of the single-mode laser , we use the linear approximation method to calculate the power spectrum and signal-to-noise ratio ( SNR ) of the laser intensity , which is driven by two color noises correlated in the form of exponential function. The result shows that the correlated time and the correlated strength between the noises have great effect on the stochastic resonance ( SR ) , and the variations of SNR with the frequency of the carrier signal  $\omega$  and the modulator signal  $\Omega$  are quite different from the curve of variation of white noise.

**Keywords :** color noise , single-mode laser , stochastic resonance ( SR ) , amplitude modulation wave

**PACC :** 0540 , 4260K

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 10275025 ) and the Education Department of Hubei Province of China ( Grant No. D200725001 ).