

# 有界噪声和谐和激励联合作用下 一类非线性系统的混沌研究\*

雷佑铭<sup>†</sup> 徐 伟

(西北工业大学应用数学系, 西安 710072)

(2006 年 5 月 9 日收到, 2006 年 5 月 30 日收到修改稿)

研究一类有界噪声和谐和激励联合作用下的非线性系统, 首先用多尺度方法将该系统约化, 针对约化后的平均系统, 利用随机 Melnikov 过程方法结合均方值准则导出随机系统可能产生混沌运动的临界条件, 结果表明在一定的参数范围内, 随着 Weiner 过程强度参数值的增大, 混沌的临界激励幅值先递减继而递增. 同时, 用两类数值方法即最大 Lyapunov 指数法和 Poincare 截面法验证了解析结果.

关键词: 有界噪声, 多尺度, 随机 Melnikov 过程, 混沌

PACC: 0545

## 1. 引 言

系统

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + [\omega_0^2 + h\gamma(t)]x + \beta x^2 + \xi x^3 = \gamma \cos(\omega t), \quad (1)$$

可用来描述一个两端具有同一水平固定支撑的重弹性结构体在有界噪声和谐和激励联合作用下的单模态振动, 其中  $\alpha$  为阻尼系数,  $\beta$  和  $\xi$  分别为非线性恢复力的系数,  $\gamma$  为外激励谐和周期力的幅值,  $\gamma(t) = \cos(\nu t + \sigma B(t) + \chi)$  为同时具有随机频率 ( $B(t)$  为 Weiner 过程) 和随机相位 ( $\chi$  为  $(0, 2\pi)$  上的均匀分布随机变量) 的有界噪声<sup>[1]</sup>.

针对这一类系统的确定性情形, 即  $\gamma(t) = \cos(\nu t)$ , 许多学者利用 Melnikov 方法或摄动法结合数值方法探讨了其混沌及混沌控制<sup>[2-6]</sup>. 然而, 对于上述随机系统的混沌研究, 目前所得到的结果尚无定论. 1994 年 Xie<sup>[7]</sup> 用修正的 Melnikov 函数导出了谐和力与白噪声参激下 Duffing 振子出现混沌的条件, 发现弱噪声增大出现混沌的谐和力幅值, 而计算最大 Lyapunov 指数却发现噪声减小出现混沌的谐和力幅值, 两个结论正好相反. 1996 年 Lin 与 Yin<sup>[8]</sup> 研究了谐和力与白噪声外激下 Duffing 振子的

随机 Melnikov 过程, 发现弱噪声降低了出现混沌的谐和力幅值, 扩大了参数空间中的混沌域. 2001 年 Liu 等<sup>[9]</sup> 结合随机 Melnikov 过程方法<sup>[10]</sup> 和数值方法研究了有界噪声参激下 Duffing 振子的混沌运动, 发现对于较大的 Weiner 过程强度参数, 系统产生混沌的临界阈值随之增大而增大, 但是对于较小的强度参数, 两种方法得到的趋势不一致. 因此, 随机激励对于系统出现混沌的影响尚有待进一步研究<sup>[11, 12]</sup>.

## 2. 系统的约化

设  $\alpha, \beta, \xi, \gamma, h$  都为小参数,  $\omega$  和  $\omega_0$  满足共振关系  $\omega_0^2 = (p\omega/q)^2 + \delta$ ,  $p, q$  为不可约的正整数,  $\delta$  为调谐参数. 取  $\alpha = \mu\epsilon^2 \tilde{\alpha}$ ,  $\gamma = \epsilon \tilde{\gamma}$ ,  $\nu = \epsilon \tilde{\nu}$ ,  $\beta = \epsilon \tilde{\beta}$ ,  $h = \mu\epsilon^2 \tilde{h}$ ,  $\xi = \epsilon^2 \tilde{\xi}$ ,  $\delta = \epsilon^2 \tilde{\delta}$ , 其中  $0 < \epsilon \ll \mu \ll 1$ . 从而系统 (1) 可改写为

$$\ddot{x} + (p\omega/q)^2 x = \epsilon [-\tilde{\beta} x^2 + \tilde{\gamma} \cos(\omega t)] + \epsilon^2 [-\tilde{\delta} x - \mu \tilde{\alpha} \dot{x} - \tilde{\xi} x^3 - \mu \tilde{h} \gamma(t) x]. \quad (2)$$

不失一般性, 取  $p = q = 1$ , 利用多尺度方法<sup>[13-17]</sup> 将随机系统 (2) 约化. 设系统 (2) 近似解为

$$x(t, \epsilon) = x_0(T_0, T_1, T_2) + \epsilon x_1(T_0, T_1, T_2)$$

\* 国家自然科学基金重点项目(批准号:10332030), 国家自然科学基金面上项目(批准号:10502042)资助的课题.

<sup>†</sup> 通信作者. E-mail: leiyouming@nwpu.edu.cn

$$+ \varepsilon^2 x_2( T_0, T_1, T_2 ), \quad (3)$$

$$T_m = \varepsilon^m t, (m = 0, 1, 2). \quad (4)$$

记  $D_0 = \partial/\partial T_0, D_1 = \partial/\partial T_1, D_2 = \partial/\partial T_2$ , 时间导数记为关于  $T_0, T_1, T_2$  的微分

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2,$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2). \quad (5)$$

将(3)式代入(2)式, 结合(4)和(5)式, 并比较方程两边  $\varepsilon$  同次幂的系数, 得如下常微分方程组:

$$\varepsilon^0: D_0^2 x_0 + \omega^2 x_0 = 0, \quad (6)$$

$$\varepsilon^1: D_0^2 x_1 + \omega^2 x_1 = [ -\tilde{\beta} x_0^2 + \tilde{\gamma} \cos(\omega T_0) ] - 2D_0 D_1 x_0, \quad (7)$$

$$\varepsilon^2: D_0^2 x_2 + \omega^2 x_2 = [ -\tilde{\delta} x_0 - \mu \tilde{\alpha} D_0 x_0 - \mu \tilde{h} \tilde{\gamma}( T_0 ) x_0 - \tilde{\xi} x_0^3 ] + [ -2\tilde{\beta} x_0 x_1 ] - 2D_0 D_1 x_1 - 2D_0 D_2 x_0 - D_1^2 x_0. \quad (8)$$

由(6)式解得

$$x_0 = A( T_1, T_2 ) e^{i\omega T_0} + cc, \quad (9)$$

代入(7)式有

$$D_0^2 x_1 + \omega^2 x_1 = -\tilde{\beta} A^2 e^{2i\omega T_0} - \tilde{\beta} A \bar{A} + \frac{1}{2} \tilde{\gamma} e^{i\omega T_0} - 2i\omega D_1 A e^{i\omega T_0} + cc. \quad (10)$$

(10)式中消除长期项( secular terms ), 有

$$\frac{1}{2} \tilde{\gamma} e^{i\omega T_0} - 2i\omega D_1 A e^{i\omega T_0} = 0. \quad (11)$$

联立(10)和(11)式, 解得

$$x_1 = \frac{1}{3\omega^2} \tilde{\beta} A^2 e^{2i\omega T_0} - \frac{1}{\omega^2} \tilde{\beta} A \bar{A} + cc. \quad (12)$$

将(9)和(12)式代入(8)式, 并消除长期项, 有

$$\frac{10}{3\omega^2} \tilde{\beta}^2 A^2 \bar{A} - \tilde{\delta} A - i\omega \mu \tilde{\alpha} A - \mu \tilde{h} \tilde{\gamma}( T_0 ) A - 3\tilde{\xi} A^2 \bar{A} - 2i\omega D_2 A - D_1^2 A = 0, \quad (13)$$

从而得

$$D_0 A = 0, D_1 A = -\frac{i}{4\omega} \tilde{\gamma}, D_1^2 A = 0, D_2 A = -\frac{5i}{3\omega^3} \tilde{\beta}^2 A^2 \bar{A} + \frac{i}{2\omega} \tilde{\delta} A - \frac{1}{2} \mu \tilde{\alpha} A + \frac{i}{2\omega} \mu \tilde{h} \tilde{\gamma}( T_0 ) A + \frac{3i}{2\omega} \tilde{\xi} A^2 \bar{A}, \quad (14)$$

即

$$\dot{A} = -\varepsilon \frac{i}{4\omega} \tilde{\gamma} - \varepsilon^2 \frac{5i}{3\omega^3} \tilde{\beta}^2 A^2 \bar{A} + \varepsilon^2 \frac{i}{2\omega} \tilde{\delta} A$$

$$- \varepsilon^2 \frac{1}{2} \mu \tilde{\alpha} A + \varepsilon^2 \frac{i}{2\omega} \mu \tilde{h} \tilde{\gamma}( T_0 ) A + \varepsilon^2 \frac{3i}{2\omega} \tilde{\xi} A^2 \bar{A}. \quad (15)$$

将  $A$  写成极坐标形式  $A = \frac{1}{2} a e^{ib}$  (其中  $a, b$  都为实数, 且  $a > 0$ ), 令  $J = \frac{a^2}{2}$ , 则有

$$\begin{aligned} \dot{J} &= -\frac{1}{2\omega} \sqrt{2J} \gamma \sin b - \alpha J, \\ \dot{b} &= -\frac{1}{2\omega \sqrt{2J}} \gamma \cos b + \frac{1}{2\omega} \delta \\ &\quad - \frac{5}{6\omega^3} \beta^2 J + \frac{3}{4\omega} \xi J + \frac{1}{2\omega} h \tilde{\gamma}( t). \end{aligned} \quad (16)$$

为验证平均系统(16)和原系统(2)之间是否匹配, 取定参数值  $\omega = 1.1, \beta = 1.0, \gamma = 1.5, \delta = 3.0, \alpha = 1.0, \xi = 2.5, h = 4.8, \nu = 2.35, \sigma = 0.1, \mu = 0.1, \varepsilon = 0.01$ , 用六阶 Runge-Kutta 方法计算, 如图 1 所示, 平均系统的解和原系统的拟和程度相当准确.

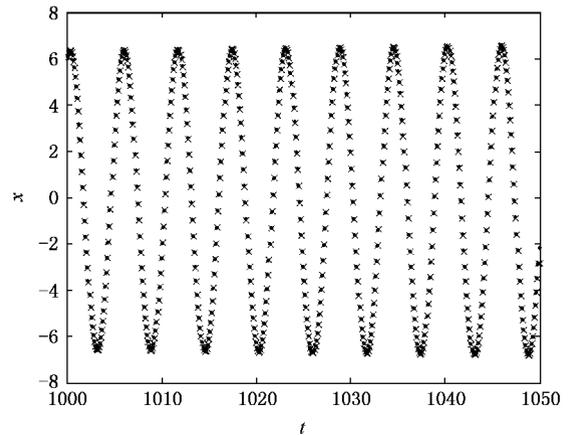


图 1 平均系统和原系统的时间历程图(其中  $\times$  表示由系统(2)直接模拟得到,  $\cdot$  表示由平均系统(16)得到)

### 3. 平均系统的混沌研究

#### 3.1. 同宿轨道

显然, 约化后的平均系统(16)在未扰情形(即  $\mu = 0$ )是一 Hamilton 系统, 此时系统为

$$\begin{aligned} \dot{J} &= -\frac{1}{2\omega} \sqrt{2J} \gamma \sin b, \\ \dot{b} &= -\frac{1}{2\omega \sqrt{2J}} \gamma \cos b + \frac{1}{2\omega} \delta \end{aligned}$$

$$-\frac{5}{6\omega^3}\beta^2 J + \frac{3}{4\omega}\xi J. \quad (17)$$

系统 (17) 对应的 Hamilton 函数为

$$H(J, b) = -\frac{1}{2\omega}\gamma\sqrt{2J}\cos b + \frac{1}{2\omega}\delta J - \frac{5}{12\omega^3}\beta^2 J^2 + \frac{3}{8\omega}\xi J^2. \quad (18)$$

设 Hamilton 系统 (17) 的奇点  $(J_0, b_0)$ , 则  $b_0 = k\pi$  ( $k$  为任意整数),  $J_0$  满足

$$J^3 + AJ^2 + BJ + C = 0, \quad (19)$$

其中  $A = 4\delta/D, B = (2\delta/D)^2, C = -2(\gamma/D)^2, D = 3\xi - 10\beta^2/3\omega^2$ .

记  $X \triangleq J + B/3$ , 则方程转化为如下形式:

$$X^3 + PX + Q = 0, \quad (20)$$

其中  $P = B - A^2/3, Q = 2A^3/27 - AB/3 + C$ . 代数方程 (20) 解的判别式为  $\Delta = (P/3)^2 + (Q/2)^2$ , 因此, 方程 (20) 有实根的充分条件为

$$\Delta < 0 \text{ 或 } \Delta = 0 \text{ 或 } \Delta > 0, \quad \delta D < 0, \quad (21)$$

根据该条件即可以讨论未扰系统 (17) 的分岔, 固定参数  $\xi = 2, \beta = 1, \omega_0 = 1$ , 利用 Maple 作出其分岔曲线, 如图 2 所示.

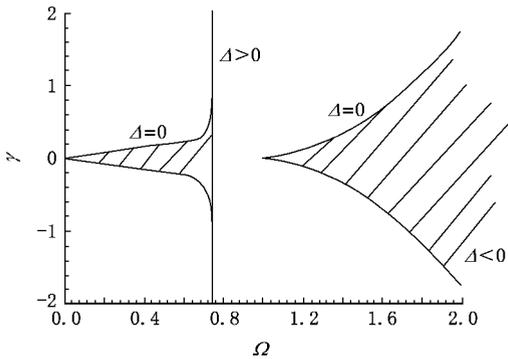


图 2 系统 (17) 的分岔曲线

当参数取值于阴影区域时, 系统有三个奇点, 即两个中心和一个双曲鞍点; 在空白区域, 系统仅有一个中心. 因此, 当  $\delta D < 0$ , 且  $\Delta < 0$  时, 有两个中心  $(J_1, b_1)$  ( $J_3, b_3$ ) 和一个双曲鞍点  $(J_2, b_2)$ , 此时通过鞍点的稳定流形和不稳定流形构成同宿轨道. 设  $H(J, b) = H(J_2, b_2) = H_0$ , 则同宿轨道为 (如图 3)

$$J_{\pm}(t) = G_{\pm}(t) + J_2, \quad b_{\pm}(t) = \arccos\left[\frac{2\omega}{\gamma\sqrt{2J_{\pm}(t)}}\left(\frac{\delta}{2\omega}J_{\pm}(t) + \frac{A_0}{8\omega}J_{\pm}^2(t) - H_0\right)\right], \quad (22)$$

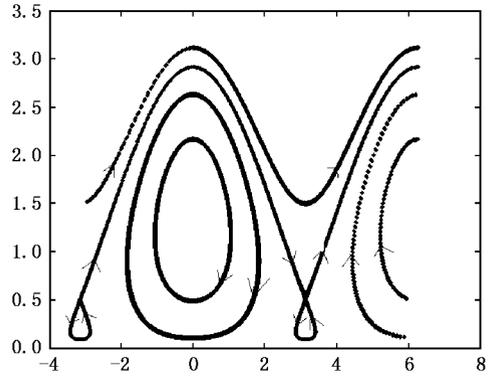


图 3 系统 (17) 的同宿轨道

其中

$$G_{\pm}(t) = \begin{cases} \pm \frac{2c_+ c_-}{(c_+ - c_-)\cosh(ct) \pm (c_+ + c_-)}, & A_0 > 0, \\ \mp \frac{2c_+ c_-}{(c_+ - c_-)\cosh(ct) \mp (c_+ + c_-)}, & A_0 < 0, \end{cases} \quad c = \frac{|A_0|}{8\omega} \sqrt{-c_+ c_-}, \quad c_{\pm} = \alpha k \pm \sqrt{2kJ_2}, \quad k = -2 \frac{\delta}{A_0} - J_2, \quad A_0 = 3\xi - 10\beta^2/3\omega^2.$$

### 3.2. 随机 Melnikov 过程

采用随机 Melnikov 方法<sup>[10]</sup>, 得到如下与平均系统 (16) 相应的随机 Melnikov 过程,

$$M_{\pm}(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{\pm}(\xi)\gamma(t_0 - \xi)d\xi - k_{\pm} \quad (23)$$

其中  $h_{\pm}(t) = \frac{h}{4\omega^2}\sqrt{2J_{\pm}(t)}\gamma\sin b_{\pm}(t)$ , 而  $(J_{\pm}(t), b_{\pm}(t))$  为同宿轨道所对应的解 (22) 式, 其中

$$k_{\pm} = \frac{\alpha}{|A_0|} [3A_0\rho - 8\delta(\pi - \phi_0)], \quad k_{-} = \frac{\alpha}{|A_0|} [3A_0\rho + 8\delta\phi_0]. \quad (24)$$

易得 随机 Melnikov 过程  $M(t_0)$  的均值为

$$E[M_{\pm}(t_0)] = -k_{\pm}. \quad (25)$$

随机 Melnikov 过程  $M(t_0)$  的谱密度为

$$\psi_M(\omega) = |\alpha(\omega)^2| S_{\gamma}(\omega), \quad (26)$$

其中

$$\alpha(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)\exp(-i\omega\xi)d\xi.$$

给定参数  $\xi = 2.0, \beta = 1.0, \gamma = 1.0, \omega = 2.0, \delta = -3$  ( $\omega_0 = 1$ ),  $\nu = 2.0$ , 随机 Melnikov 过程  $M_{\pm}(t_0)$  的功率谱  $\psi_M(\omega)$  如图 4 所示.

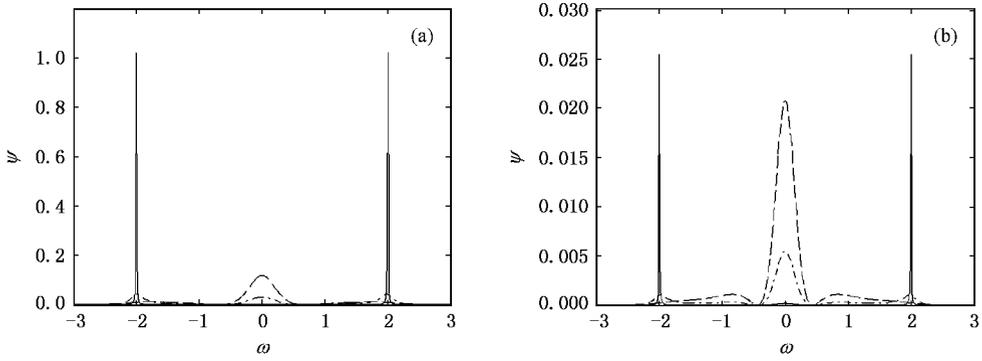


图4 随机 Melnikov 过程  $M_{\pm}(t_0)$  的功率谱  $\psi_{M_{\pm}}(\omega)$  示意图 (a)  $\psi_{M_+}(\omega)$  (b)  $\psi_{M_-}(\omega)$ , 其中实线对应  $\sigma=0.1$ , 虚线对应  $\sigma=0.5$  横线对应  $\sigma=1.0$

随机 Melnikov 过程  $M(t_0)$  的方差为

$$\sigma_M^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_M(\omega) d\omega, \quad (27)$$

对应于随机 Melnikov 过程  $M_{\pm}(t_0)$  的方差  $\sigma_{M_{\pm}}^2$  分别如图 5 所示.

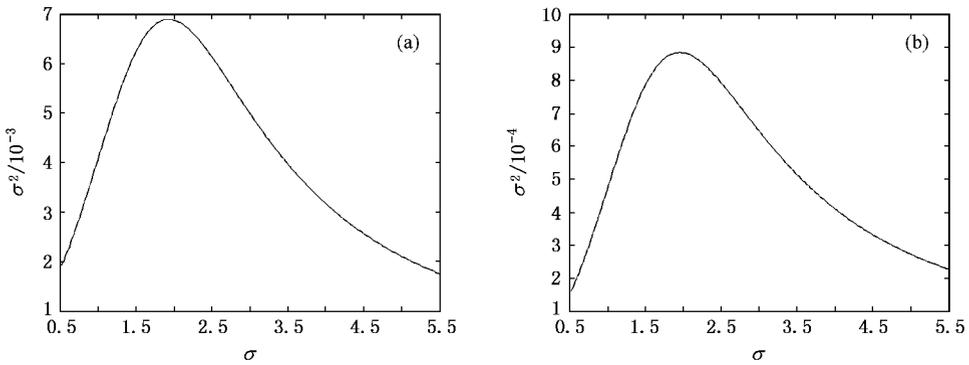


图5 随机 Melnikov 过程  $M_{\pm}(t_0)$  的方差  $\sigma_{M_{\pm}}^2$  随参数  $\sigma$  变化图 (a)  $\sigma_{M_+}^2$ ; (b)  $\sigma_{M_-}^2$

因此在均方意义下,随机 Melnikov 过程出现简单零点的必要条件为

$$h \geq \frac{2\alpha [3A_0\rho - 8\delta(\pi - \phi_0)]}{\omega\sigma_{M_+} |A_0|} \text{ 或}$$

$$h \geq \frac{2\alpha [3A_0\rho + 8\delta\phi_0]}{\omega\sigma_{M_-} |A_0|}, \quad (28)$$

结合此条件,取定上述参数,在参数平面中考察  $\sigma$  和  $h/\alpha$  (激励幅值和阻尼系数之比)如图6所示,发

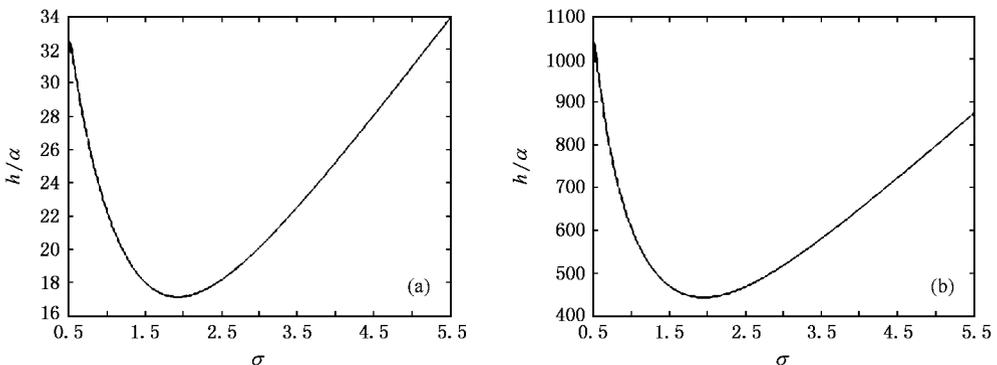


图6 随机 Melnikov 过程  $M_{\pm}(t_0)$  的混沌阈值示意图 (a)  $M_+(t_0)$  (b)  $M_-(t_0)$

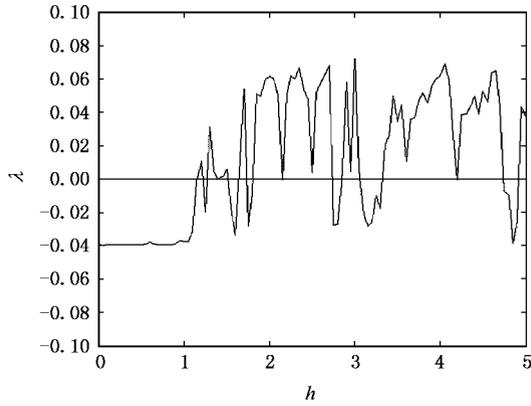
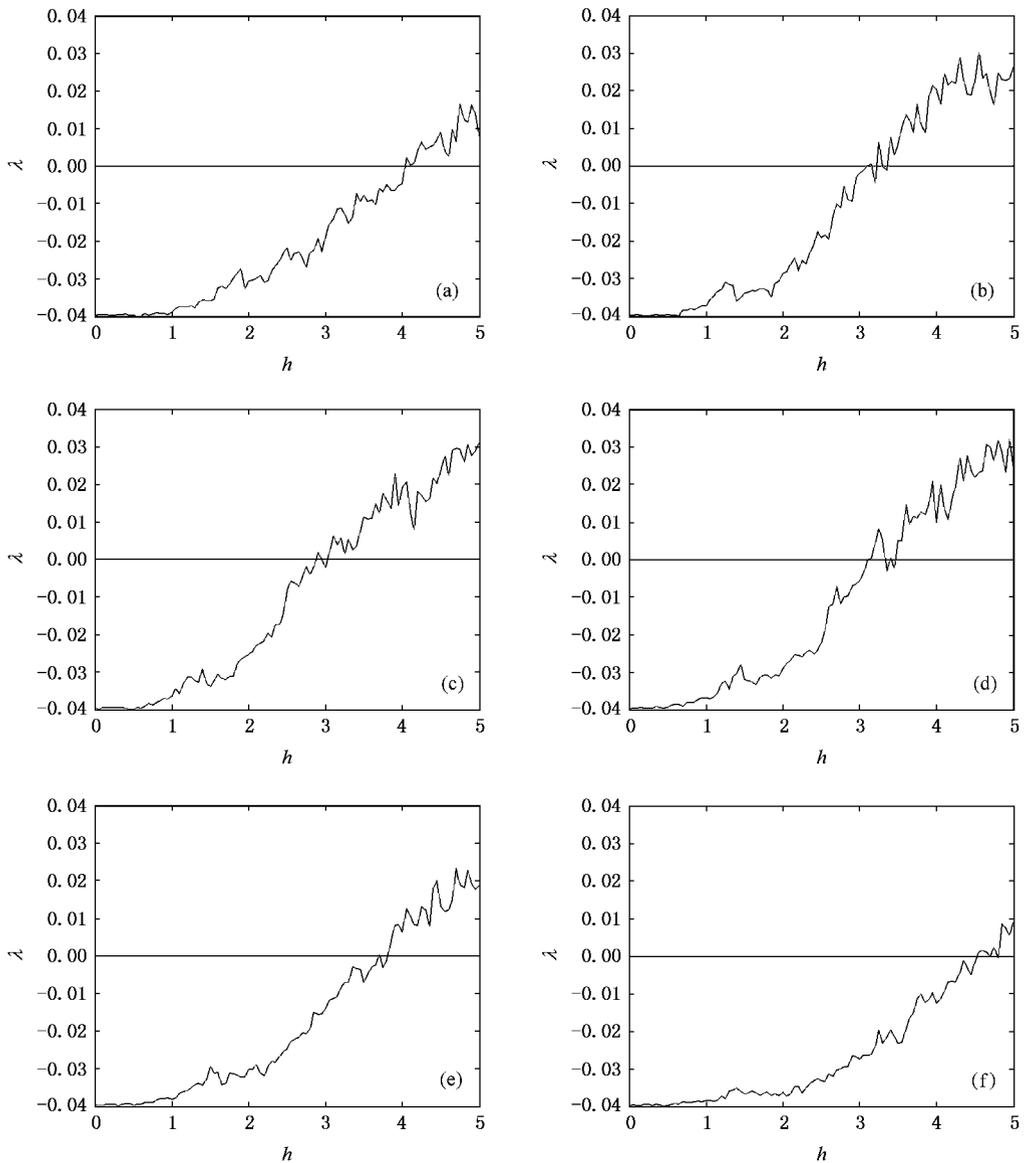


图 7 系统 (16) 在谐和激励下的最大 Lyapunov 指数随激励幅值的变化

图 8 系统 (16) 在有界噪声激励下的最大 Lyapunov 指数随激励幅值的变化 (a)  $\sigma = 1.0$  (b)  $\sigma = 1.5$  (c)  $\sigma = 2.0$  ; (d)  $\sigma = 2.5$  (e)  $\sigma = 3.0$  (f)  $\sigma = 4.0$

现随着 Weiner 过程强度参数  $\sigma$  的增大, 在小噪声情形  $\sigma_{M_{\pm}}^2$  和  $h/\alpha$  影响不大. 继续增大  $\sigma$ ,  $\sigma_{M_{\pm}}^2$  也越来越大, 混沌阈值  $h/\alpha$  则越来越小, 表明有界噪声在频率上的扩散增强了引发系统产生混沌运动的效应. 并且从图中可以看出  $\sigma_{M_{\pm}}^2$  有一个最大值, 即强度参数增加到某一个临界值  $\sigma_c \approx 1.95$  时, 进一步增大  $\sigma$ ,  $\sigma_{M_{\pm}}^2$  将变得越来越小, 阈值  $h/\alpha$  则越来越大, 表明此时非线性系统在随机激励的主导作用下提高了混沌阈值. 倘若取定参数  $\sigma$ , 则随着阻尼系数  $\alpha$  的增大, 临界幅值  $h$  亦越来越大, 这表明阻尼的耗散减弱了引发随机系统产生混沌运动的效应.

## 4. 平均系统的数值研究

### 4.1. Lyapunov 指数方法

本文利用 Wolf<sup>[18]</sup> 算法计算随机系统的平均 Lyapunov 指数. 由最大 Lyapunov 指数为零, 得到产生混沌的临界值. 针对上述参数, 对不同的 Weiner 过程强度参数值  $\sigma$ , 最大 Lyapunov 指数与有界噪声幅值  $h$  的函数关系如图 7 和 8 所示. 由图 7 和图 8 (a)–(c) 可知, 随着强度参数  $\sigma$  的增加, 混沌阈值  $h$  越来越小, 表明有界噪声在频率上的扩散增强了引

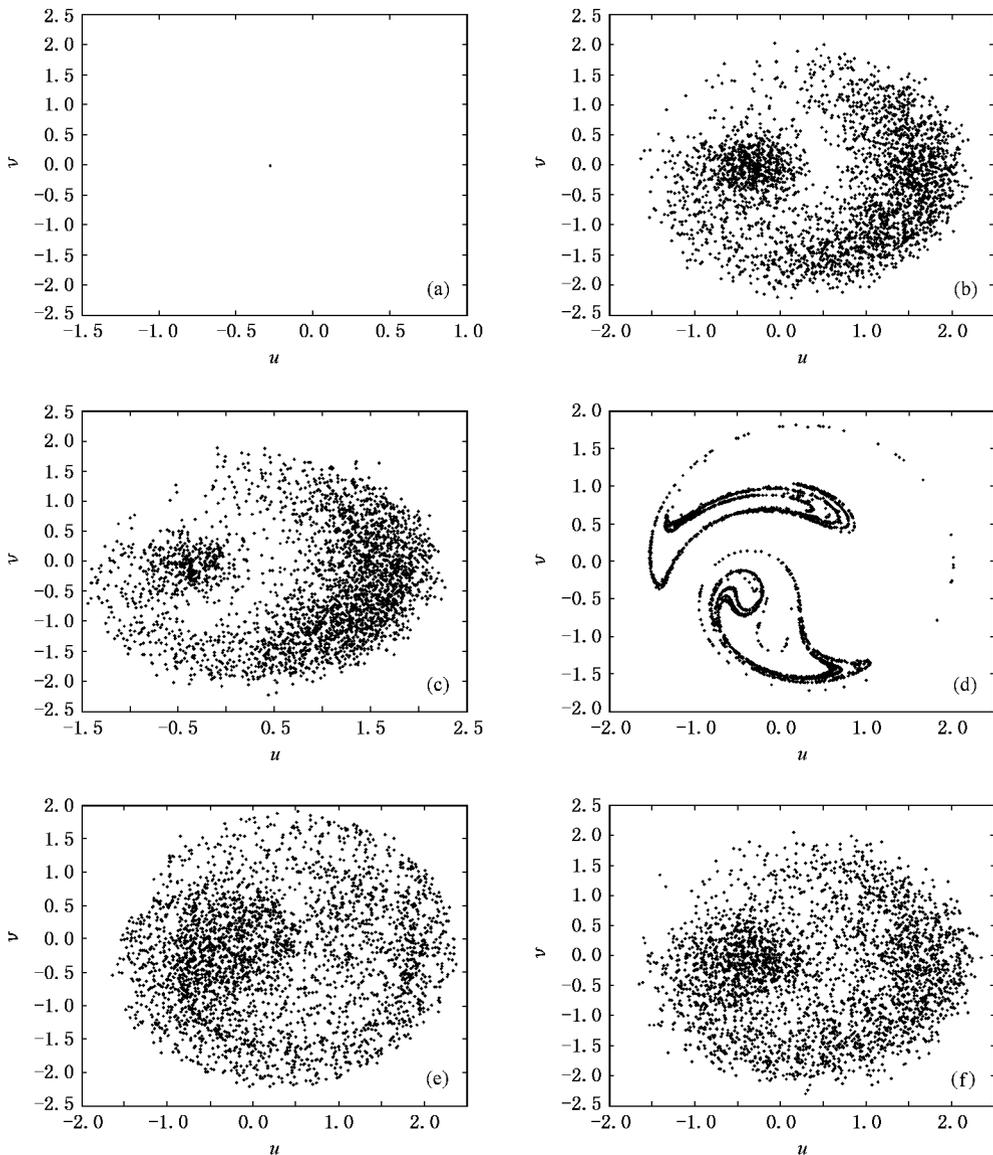


图9 随机系统(16)的平均 Poincaré 截面 (a)  $h=3.5, \sigma=0$  (b)  $h=3.5, \sigma=1.0$  (c)  $h=3.5, \sigma=4.0$  (d)  $h=2.0, \sigma=0$  (e)  $h=1.5, \sigma=0.3$  (f)  $h=3.5, \sigma=2.0$

发系统产生混沌运动的效应. 但是当强度参数增加到某一个临界值  $\sigma_c \approx 1.95$  时, 从图 8(c)–(f) 中可以看出, 进一步增大  $\sigma$ , 阈值  $h$  则越来越大, 表明此时非线性系统在随机激励的主导作用下提高了混沌阈值. 由此可见, 随机 Melnikov 过程方法和 Lyapunov 指数方法所得到的结论相符合. 不过, 后者所得到的混沌阈值略大于前者, 这是因为前者只是产生同宿混沌的必要条件.

#### 4.2. Poincare 截面

为证实上述结果, 我们对系统(16)作平均 Poincare 映射  $P: \Sigma \rightarrow \Sigma, \Sigma = \{(\bar{J}, \bar{b}) | t = 0, T, 2T, \dots\} \subseteq R^2$ , 即对应于某一固定初值得到的不同轨道作统计平均, 得到平均 Poincare 映射. 为便于在有限相空间中考察系统的性态, 将系统(16)转换为直角坐标形式, 令  $u = \sqrt{2J} \cos(b), v = \sqrt{2J} \sin(b)$ . 由图 7 和 8 知当  $h = 3.5, \sigma$  分别为  $\sigma = 0, \sigma = 1.0$  和  $\sigma = 4.0$  时系统的最大 Lyapunov 指数小于零, 而  $h = 2.0, \sigma = 0, h = 1.5, \sigma = 0.3$  和  $h = 3.5, \sigma = 2.0$  时系统的最大 Lyapunov 指数大于零. 在 Poincare 截面分析中, 分别选取上述参数, 计算结果如图 9 所示. 从图中可以看出, 对应于最大 Lyapunov 指数小于零

时的平均 Poincare 截面, 随机激励使得系统表现为普通的随机运动, 即噪声使得相点分散呈现较大的随机吸引子, 而最大 Lyapunov 指数大于零时相点一团糟, 表现为随机混沌运动. 由图 9(a)→(b)→(f)→(c)可知, 固定有界噪声的激励幅值  $h$ , 随着 Weiner 过程强度参数值  $\sigma$  的增大, 系统表现为由确定性运动→普通的随机运动→随机混沌运动→完全随机运动, 其变化趋势与随机 Melnikov 过程方法所得到的结论完全一致.

## 5. 结 论

本文研究了有界噪声和谐和激励联合作用下的一类非线性系统, 首先用多尺度方法将该系统约化, 数值模拟表明约化后的平均系统的解和原系统的解拟和程度相当接近. 然后重点探讨了平均系统, 经过推导得出相应的随机 Melnikov 过程, 用均方值准则导出随机系统可能产生混沌运动的临界条件, 并得到了在一定的参数范围内, 随着 Weiner 过程强度参数值的增大, 混沌的临界激励幅值先递减继而递增. 该结论统一了文献 7–9 的结果. 同时, 利用数值方法研究证实了该结论.

- [ 1 ] Lin Y K, Cai G Q 1995 *Probabilistic structural dynamics: advanced theory and applications* (New York: Mc Graw Hill)
- [ 2 ] Zavodney L D, Nayfeh A H 1988 *Journal of Sound and Vibration* **120** 63
- [ 3 ] Szemplinska-Stupnicka W, Plaut R H, Hsieh J C 1989 *Journal of Applied Mechanics* **56** 947
- [ 4 ] Lin R, Leng G, Lee H P 1997 *Nonlinear Dynamics* **14** 1
- [ 5 ] Lima R, Pettini M 1990 *Physical Review A* **41** 726
- [ 6 ] Belhaq M, Houssni M 1999 *Nonlinear Dynamics* **18** 1
- [ 7 ] Xie W C 1994 *Nonlinear and Stochastic Dynamics*, ASME, AMD-19X DE-73 ) 215-225
- [ 8 ] Lin H, Yim S C S 1996 *Journal of Applied Mechanics* **63** 509
- [ 9 ] Liu W Y, Zhu W Q, Huang Z L 2001 *Chaos, Solitons and Fractals* **12** 527
- [ 10 ] Simiu E 2002 *Chaotic Transitions in Deterministic and Stochastic*

*Dynamical Systems* (Princeton University Press)

- [ 11 ] Li S, Xu W, Li R H 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1049 (in Chinese)  
[ 李 爽、徐 伟、李瑞红 2006 物理学报 **55** 1049 ]
- [ 12 ] Yang X L, Xu W, Sun Z K 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1678 (in Chinese)  
[ 杨晓丽、徐 伟、孙中奎 2006 物理学报 **55** 1678 ]
- [ 13 ] Tang J S, Fu W B, Li K A 2002 *Chin. Phys.* **11** 1004
- [ 14 ] Rajan S, Davies H G 1988 *Journal of Sound and Vibration* **123** 497
- [ 15 ] Nayfeh A H, Serhan S J 1990 *International Journal of Nonlinear Mechanics* **25** 493
- [ 16 ] Rong H W, Xu W, Fang T 1998 *Journal of Sound and Vibration* **210** 483
- [ 17 ] Yagasaki K, Sakata M, Kimura K 1990 *Journal of Applied Mechanics* **57** 209
- [ 18 ] Wolf A, Swift J, Swinney H, Vastano A 1985 *Physica D* **16** 285

# Homoclinic chaos in averaged oscillator subjected to combined deterministic and narrow-band random excitations<sup>\*</sup>

Lei You-Ming<sup>†</sup> Xu Wei

( *Department of Applied Mathematics , Northwestern Polytechnical University , Xi 'an 710072 , China* )

( Received 9 May 2006 ; revised manuscript received 30 May 2006 )

## Abstract

In the present paper , homoclinic chaos in averaged oscillator subjected to combined deterministic and narrow-band random excitations is investigated in detail. The method of multiple-scale is first used to reduce the oscillator subjected to combined deterministic and narrow-band random excitations to an averaged oscillator only under narrow-band random excitation. In order to determine the threshold of random excitation amplitude for the onset of chaos , the stochastic Melnikov technique is then applied to the averaged oscillator with mean-square criterion and it is found that the threshold of random excitation amplitude for the onset of chaos in the oscillator turns from increasing to decreasing as the intensity of the noise increases. On the other hand , another threshold of random excitation amplitude for the onset of chaos is obtained by calculating the largest Lyapunov exponents numerically. The Poincare maps are also used for verifying the conclusion. Qualitatively consistent results are obtained by the analytical and numerical methods.

**Keywords** : narrow-band random excitation , multiple-scale method , stochastic Melnikov process , chaos

**PACC** : 0545

---

<sup>\*</sup> Project supported by the State Key Program of National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 10332030 ) and by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 10502042 ).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail : leiyouming@nwpu.edu.cn