

强耦合混沌系统中的近似同步*

吴 晔^{1,2,B)} 肖井华³⁾ 占 萌^{1)†}

1) 中国科学院武汉物理与数学研究所, 武汉 430071)

2) 中国科学院研究生院, 北京 100049)

3) 北京邮电大学理学院, 北京 100876)

(2006 年 11 月 23 日收到, 2006 年 12 月 27 日收到修改稿)

以单向驱动耦合 Lorenz 振子一维链为研究对象, 研究振子间的混沌同步行为. 数值计算结果表明, 对于变量 y 驱动 x 的耦合方式, 在合适的耦合强度下, 会出现第一个振子和第二个振子不同步, 而与次近邻非直接连接的振子(如第三个振子)近似同步. 进一步研究表明, 出现这一现象的原因是在大耦合强度下, 对于这种驱动方式, 第一个振子和第二个振子间出现驱动单变量近似同步, 虽然它们之间未出现所有变量的完全同步, 但是驱动信号事实上已经传递下去了.

关键词: Lorenz 振子, 混沌同步, 近似同步

PACC: 0545

1. 引 言

混沌同步以其在保密通信, 生命科学等领域的重要应用前景而受到广泛的关注, 从 Pecora 和 Carroll 提出一个非常简单的混沌驱动同步的模型^[1]以来, 混沌同步研究发展迅猛. 各种各样的同步形式被发现, 比如完全同步^[2-4], 广义同步^[5-9], 相同步^[7, 10, 11], 滞后同步^[12], 反相同步^[13, 14]. 完全同步是最普通和最简单的一种同步方式, 两个混沌系统最终完全步调一致; 广义同步指被驱动系统的输出是驱动系统的函数; 相同步指两个系统间的相位大致同步而振幅没有明显关系; 滞后同步指两个混沌系统之间差一个确定的时间常数; 反相同步指两个混沌系统的相位严格差 π 角度. 除此之外, 人们也发现在耦合非完全相同的混沌振子系统中, 随着耦合强度的增强, 振子将以近似一致的方式趋于完全同步^[12, 15]. 我们称这种同步方式为近似同步. 显然, 在这种条件下, 完全同步是近似同步在无穷强耦合强度条件下的极限情况. 本文将研究强耦合完全相同系统中的近似同步, 发现不仅可以是整个系统出现近似同步, 也可以是系统单个变量之间出现近似同步.

我们以单向驱动耦合 Lorenz 振子一维链^[6]为研究对象研究振子间的混沌同步行为. 我们发现对于一类耦合方式, 在第一个振子驱动第二个振子的强度超过同步所需的最大耦合强度, 而其他振子间的驱动强度在同步稳定区的时候, 第一个振子和第二个振子不再同步, 却与其他振子近似同步. 也就是说, 第二个振子“似乎”没有接收到第一个振子的信号, 却传递了第一个振子的同步信号. 由于第一个振子和第三个振子没有直接连接却实现了近似同步, 所以我们称这种同步方式为非直接连接近似同步. 本文将主要通过数值模拟描述这一现象的发生并简单解释其原因.

2. 非直接连接近似同步与单变量近似同步

我们关注 $N=3$ 的一维单向驱动耦合 Lorenz 振子, 驱动方式是 y 信号驱动 x 变量. 第一个振子驱动第二个振子的强度与第二个驱动第三个振子的强度不一样. 描述系统的方程为

$$\dot{x}_1 = \alpha(y_1 - x_1),$$

$$\dot{y}_1 = \rho x_1 - y_1 - x_1 z_1,$$

* 中科院武汉物理与数学所创新项目(批准号: T06S607), 国家自然科学基金(批准号: 10675161)资助的课题.

† E-mail: zhanmeng@wipm.ac.cn

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1 &= x_1 y_1 - \beta z_1, \\
 \dot{x}_2 &= \alpha (y_2 - x_2) + \varepsilon_1 (y_1 - y_2), \\
 \dot{y}_2 &= \rho x_2 - y_2 - x_2 z_2, \\
 \dot{z}_2 &= x_2 y_2 - \beta z_2, \\
 \dot{x}_3 &= \alpha (y_3 - x_3) + \varepsilon_2 (y_2 - y_3), \\
 \dot{y}_3 &= \rho x_3 - y_3 - x_3 z_3, \\
 \dot{z}_3 &= x_3 y_3 - \beta z_3.
 \end{aligned} \quad (1)$$

我们选取 $\sigma = 10$, $\rho = 28$, $\beta = 1$. 在这套参数下, Lorenz 振子表现出典型的双螺旋混沌行为, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 为驱动强度, $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$. 对于这种单向驱动的耦合振子系统, 首先来看只有两个振子时的同步情况. 在图 1 画出了其最大横截李亚普诺夫指数随耦合强度的变化图.

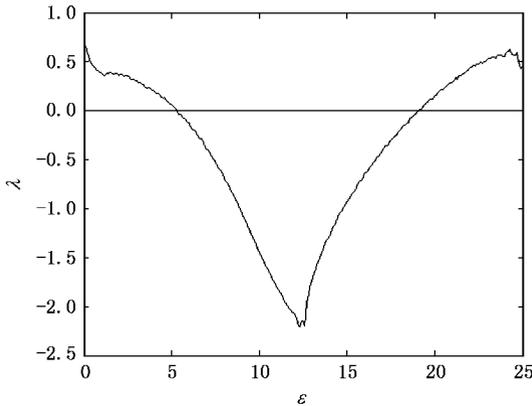


图 1 最大横截李亚普诺夫指数随耦合强度的变化图(图中最大李亚普诺夫指数第一次和第二次穿过 0 值对应的耦合系数分别为 5.3 和 19.1)

从图 1 可以看出, 最大李指数只有在合适的耦合强度 ($5.3 < \varepsilon < 19.1$) 下才小于 0, 也就是说, 在这种驱动方式下, 只有耦合强度在一定范围内, 混沌同步才是稳定的, 耦合强度过大或过小都不会完全同步. 这种耦合方式很显然不同于以往经常研究的别的耦合方式(随着耦合强度的增强, 混沌同步的稳定性也增强), 由此我们期望有新的现象出现. 事实上, 在文献 [17, 18] 中已经研究了与此相对应的最短波长分岔和同步尺寸效应. 我们固定 ε_2 在稳定区内 ($5.3 < \varepsilon_2 < 19.1$), 然后慢慢改变 ε_1 , 在 ε_1 也在稳定区 ($5.3 < \varepsilon_1 < 19.1$) 时, 三个振子出现了完全同步. 继续增加 ε_1 跃过 19.1 时, 三个振子间不再完全同步, 直观上, 人们会认为随着增加 ε_1 , 第一个振子和第二个振子之间的同步被破坏, 再往下的同步信

号的传递将变得不可能. 但是我们发现了一个奇特的现象, 即第一个振子和第三个振子达到了近似同步, 虽然第二个振子和它们没有实现同步, 见图 2.

比较图 2 中 (a)(b)(c) 可以看到第一个振子和第三个振子的吸引子近似, 但与第二个振子的吸引子完全不同, 再看 (d)(e)(f), 可以看出它们之间三个变量都达到了近似同步, 其中 x 变量的同步最好. 显然是第一个振子和第三个振子达到了近似同步, 而第二个振子被跳过. 在本文中我们研究一维单向链系统, 第三个振子与第二个振子近邻耦合, 其只能通过第二个振子的传递作用被第一个振子同步. 这时我们要问, 同步信号的传递路径是什么, 这个路径“似乎”是跃过了第二个振子直接跑到第三个振子上. 为此在 (g)(h)(i) 我们画了第一个振子与第二个振子三个对应变量间的关系. 很惊奇地发现, 第一个振子和第二个振子的 y 变量事实上也达到了近似同步, 也就是原来第二个振子并非完全没有接收到第一个振子的信号. 这样整个系统间信号传递的路径也就明晰了, 先是第一个振子与第二个振子的 y 变量达到了近似同步, 由于驱动方式的特点(只需 y 单个变量), 把信号传递到了第三个振子上, 甚至继续传递下去.

我们进一步研究在什么时候会出现这种非直接连接近似同步, 也就是看耦合强度满足什么条件的时候, 会出现振子间的单变量近似同步, 为此画出了两个振子间三个对应变量间的相关系数随耦合强度的关系图(图 3(a)).

从图 3(a) 可以很清楚地看到, 在耦合强度超过失稳区的时候, 三个变量的相关系数都随之减小, 也就是同步失稳了, 三个变量都不再同步, 然而随着耦合强度的继续增加, y 变量的相关系数反而随着耦合系数的增加而变大, 也就是 y 变量之间发生了近似同步. 为了更清楚地看 y 变量随着耦合强度是怎样趋近于近似同步, 我们定义一个量 $S(i, j) = (y_j - y_i)^2$, 表示长时间的统计平均值, 并在图 3(b) 中画出 $S(1, 2)$ 随耦合强度的变化的关系. 随着耦合强度的加大, y_1 和 y_2 是通过近似同步的方式单调地趋于完全同步. 在插图上可以看出, $S(1, 2)$ 随着耦合强度的增加是幂指数衰减, 显然只有在耦合强度无限大时, S 才会等于 0, 才能实现完全同步. 由此可见, 对于 Lorenz 系统变量 y 加在 x 上的驱动方式(不一般的区间同步方式, 如图 1), 不断增加的驱动强度虽表现为整体系统的非同步化, 但也带来

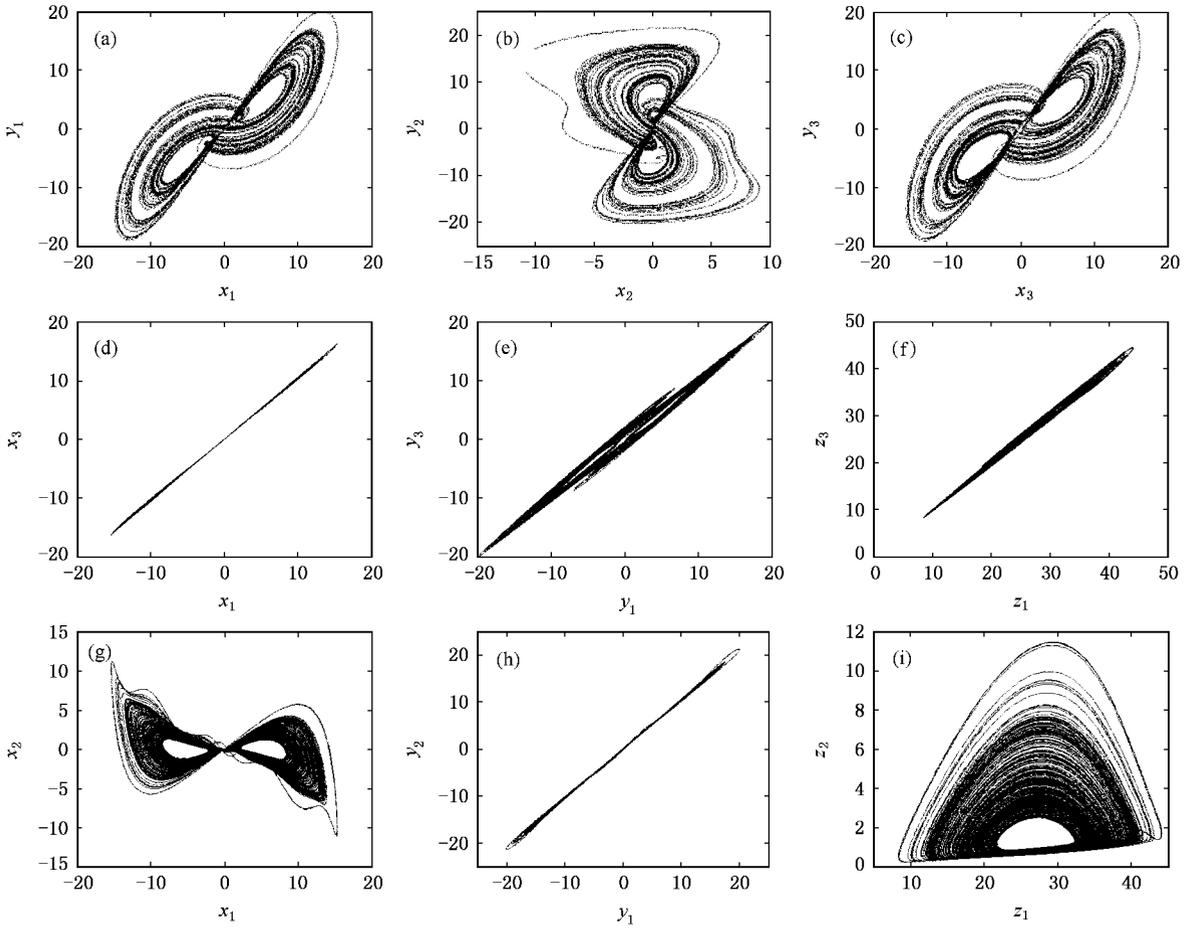


图 2 三个振子的吸引子图与振子间对应变量的关系图 $\mu_1 = 300, \mu_2 = 10$

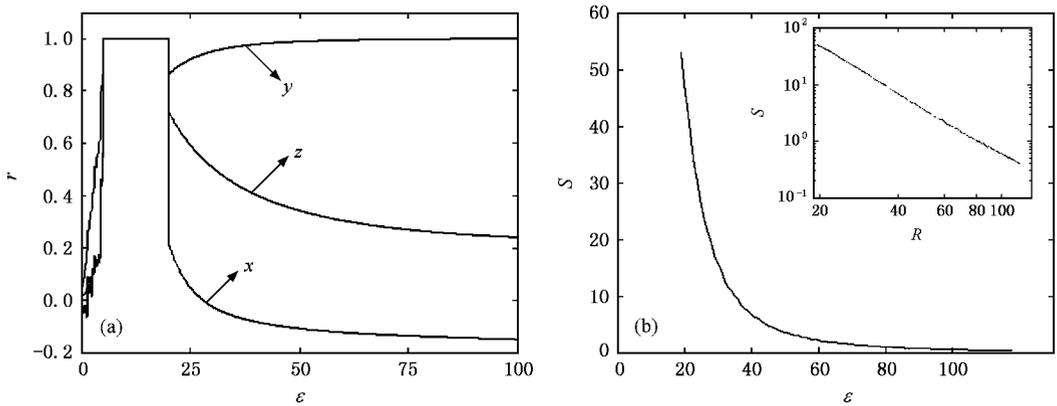


图 3 (a) 第一个振子和第二个振子三个变量间的相关系数随耦合强度的关系图 ;(b) 第一个振子与第二个振子的 S 随耦合强度的关系图

另一种形式的部分同步(单变量 y 的近似同步)的程度不断增强.

对于 N 大于 3 的 Lorenz 振子链 $\epsilon_1 = 300, \epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon_4 = \dots = \epsilon_N = 11$ (图 4(a)), 同步信号会经过第二个

振子, 第三个振子, 第四个振子往下传, 但是由于这里不是完全同步, 所以在传递的过程中, 同步的信号会逐渐变弱. 计算每个振子与第一个振子的 $S(i, j)$ (图 4(b)), 可以看出信号传递的效率. 这时改变 $\epsilon_1,$

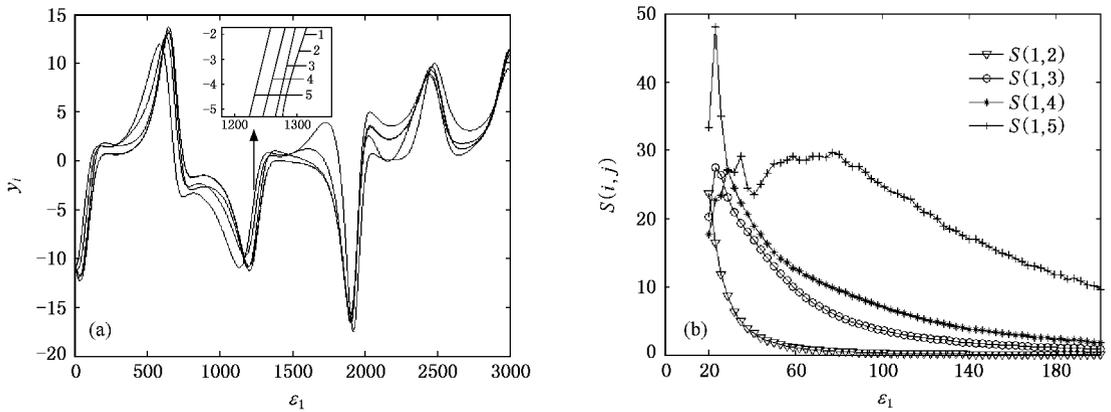


图 4 (a) 每个振子的 y 变量 y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 的时序图(图中的插图是局部放大);(b) $S(i, j)$ 随耦合强度的变化图

固定 $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \dots = \varepsilon_N = 11$. 从图 4 (b) 很明显看到随着耦合强度的增加, 第三个振子的 $S(1, 3)$, 第四个振子的 $S(1, 4)$, 第五个振子的 $S(1, 5)$ 都在衰减, 也就是所有振子的 y 变量在以近似同步的方式走向同步, 但同时随着振子数的增多, 同步效率也在逐渐衰减.

更进一步的研究表明, 在同步混沌态稳定区间 ($5.3 < \varepsilon_1 < 19.1$), 系统表现为两个混沌吸引子(一个为同步的混沌吸引子, 另一个为被驱动系统内新增的吸引子)之间的竞争, 随着驱动强度的增加, 同步的混沌吸引子的稳定性逐渐减弱(这一点可以从图 1 的最大横截李指数图中看出), 新增加的由耦合引起的吸引子逐渐取代同步混沌吸引子的地位, 在 $\varepsilon_1 = 19.1$ 之后, 变成唯一独占的一个稳定的吸引子. 我们观察到同步混沌吸引子的吸引域逐渐塌缩 ($\varepsilon_1 < 19.1$) 并最终成空集. 由此在 $\varepsilon_1 = 19.1$ 之外,

我们将观察不到通常情况下的失同步行为: 开关阵发^[19].

3. 结 论

我们在单向驱动耦合 Lorenz 振子链中发现了非直接连接近似同步, 并指出了这种非直接连接近似同步是由于大耦合条件下单变量的近似同步引起的. 这是一个新的物理现象, 是对于图 1 所代表的一大类在大耦合条件下驱动系统与被驱动系统不能实现完全同步的多个系统中出现的带有普遍性的一种现象. 这一现象的发现或许对混沌的实际应用(如耦合混沌系统的信号传播问题, 混沌的控制^[20, 21])也有很好的利用价值.

感谢北京邮电大学理学院物理实验中心的刘维清、钱晓岚的有益讨论.

- [1] Pecora L M, Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
 [2] Heagy J F, Carroll T L, Pecora L M 1994 *Phys. Rev. E* **50** 1874
 [3] Chen B, Liu G G, Zhang Y, Zhou Z O 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5039 (in Chinese) [陈 滨、刘光祜、张 勇、周正欧 2005 物理学报 **54** 5039]
 [4] Min F H, Wang Z Q 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4026 (in Chinese) [闵富红、王执铨 2005 物理学报 **54** 4026]
 [5] Rulkov N F, Sushchik M M, Tsimring L S, Ababanel H D 1995 *Phys. Rev. E* **51** 980
 [6] Ababanel H D, Rulkov N F, Sushchik M M 1996 *Phys. Rev. E* **53** 4528
 [7] Zheng Z G, Hu G 2000 *Phys. Rev. E* **62** 7882

- [8] Li F, Hu A H, Xu Z Y 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 0590 (in Chinese) [李 芳、胡爱花、徐振源 2006 物理学报 **55** 0590]
 [9] Zhang P W, Tang G N, Luo X S 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3497 (in Chinese) [张平伟、唐国宁、罗晓曙 2005 物理学报 **54** 3497]
 [10] Rosenblum M G, Pikovsky A S, Kurths J 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 1804
 [11] Zhang T X, Zheng Z G, 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3287 (in Chinese) [张廷宪、郑志刚 2004 物理学报 **53** 3287]
 [12] Rosenblum M G, Pikovsky A S, Kurths J 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 4193
 [13] Liu W Q, Xiao J X, Qian Q L, Yang J Z 2006 *Phys. Rev. E* **73** 057203

- [14] Kim C M ,Rim S H ,Kye W H ,Ryu J W ,Park Y J 2003 *Phys. Lett. A* **320** 39
- [15] Rim S H ,Kim I ,Kang P *et al.* 2002 *Phys. Rev. E* **66** 015205
- [16] Zhan M ,Hu G ,Yang J Z 2000 *Phys. Rev. E* **62** 2963
- [17] Heagy J F ,Carroll T L ,Pecora L M 1994 *Phys. Rev. Lett.* **73** 3528
- [18] Heagy J F ,Carroll T L ,Pecora L M 1995 *Phys. Rev. Lett.* **74** 4185
- [19] Kim S Y ,Lim W C ,Ott E 2003 *Phys. Rev. E* **67** 056203
- [20] Hu G ,Yang J Z ,Liu W J 1998 *Phys. Rev. E* **58** 4440
- [21] Wang F Q ,Liu C X ,2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5055 (in Chinese)
- [王发强、刘崇新 2006 物理学报 **55** 5055]

Approximate synchronization of strongly coupled chaotic systems *

Wu Ye^{1,2,3)} Xiao Jing-Hua³⁾ Zhan Meng^{1)†}

1) *Wuhan Institute of Physics and Mathematics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, China*

2) *Graduate School of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China*

3) *School of Science, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876, China*

(Received 23 November 2006 ; revised manuscript received 23 December 2006)

Abstract

The chaotic synchronization in a one-way coupled oscillator array is studied. We find that, in certain coupling schemes (for example, the variable y driving x in the Lorenz system) and under proper coupling strengths, a nonlocal approximate synchronization happens between the first and the third oscillator, or all succeeding ones, which are not directly connected, accompanied with a desynchronization between the first and the closest, namely the second one. More detailed observation finds that under sufficiently strong coupling, there exists a single-driving-signal (not all three variables) synchronization between the first and the second oscillator that transfers the synchronization information to all remaining oscillators in the array. The nonlocal synchronization is a general phenomenon that has been observed in other systems.

Keywords : Lorenz oscillator, chaos synchronization, approximate synchronization

PACC : 0545

* Project supported by the Research Grant of Wuhan Institute of Physics and Mathematics of Chinese Academy of Sciences (Grant No. T06S607), and the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10675161).

† E-mail : zhanmeng@wipm.ac.cn