

# 分数阶 Liu 系统与分数阶统一系统中的混沌现象及二者的异结构同步

张成芬 高金峰 徐 磊

(郑州大学电气工程学院, 郑州 450001)

(2006 年 12 月 14 日收到, 2006 年 12 月 27 日收到修改稿)

对近几年提出的 Liu 混沌系统和统一混沌系统, 研究了其分数阶系统的混沌动力学行为, 发现低于三阶的两系统均存在混沌吸引子, 且存在混沌的最低阶数仅为 0.3, 并计算了存在混沌时系统的最大 Lyapunov 指数, 证明了混沌的存在性, 利用 Active 控制技术实现了分数阶 Liu 系统与分数阶 Lorenz 系统及分数阶 Lü 系统的异结构同步. 理论分析及数值实验都证明了该同步方案的有效性.

关键词: 分数阶 Liu 系统, 分数阶统一系统, 混沌, 异结构同步

PACC: 0545

## 1. 引 言

混沌及其应用是近年来非线性科学研究领域中的一个热点问题. 混沌系统有着复杂的动力学行为, 但目前已知的混沌吸引子并不多. 1963 年, Lorenz<sup>[1]</sup> 在三维自治系统中发现了第一个混沌吸引子; 1999 年 Chen 等利用反控制方法发现了一个与 Lorenz 系统类似但不拓扑等价的 Chen<sup>[2]</sup> 混沌系统; 2001 年, Lü 等人发现在这两个对偶系统之间存在一个新的混沌系统, 称为 Lü<sup>[3]</sup> 系统; 2002 年, Lü, Chen 等人又提出一个新的混沌系统——统一系统<sup>[4]</sup>, 这个系统连接了 Lorenz 吸引子和 Chen 吸引子, 并包含 Lü 系统作为它的一个特例; 2004 年, Liu 等又提出了一种新的混沌系统——Liu<sup>[5]</sup> 系统. 以上这些系统都是 3 阶混沌系统, 由庞加莱-本迪生定理<sup>[6]</sup> 可知自治连续整数阶系统产生混沌的最低阶数是 3 阶, 但是总阶数低于 3 阶的自治分数阶系统也可以产生混沌, 文献 7—13 研究了低于 3 阶的分数阶系统的混沌动力学行为. 本文对分数阶 Liu 系统和分数阶统一系统的混沌动力学行为进行了研究, 发现两系统低于 3 阶时都存在混沌吸引子, 且它们存在混沌吸引子的最低阶数仅为 0.3.

由于混沌系统对初值的敏感性和长时间的不可预测性, 控制混沌就成了混沌应用的关键环节. 自从 1990 年 Pecora 和 Carroll 提出了混沌同步的思想以

来, 混沌控制和同步的研究得到了蓬勃发展. 近年来混沌同步及其应用已成为非线性科学中的一个重要研究课题, 人们提出了多种混沌控制与同步的方法, 如线性和非线性反馈方法, 延迟反馈法, 自适应方法, Backstepping 方法等. 同步的两个混沌系统结构可以相同也可以不同, 如果结构不相同, 则称这两个混沌系统的同步为“异结构同步”<sup>[14]</sup>. 迄今, 从系统结构角度已经提出的混沌同步的诸多方法中, 大多是混沌系统的自同步研究, 关于两个不同系统之间的异结构同步<sup>[15, 16]</sup> 研究相对较少, 对分数阶混沌系统的异结构同步研究就更少.

本文利用 Active 控制技术实现分数阶 Liu 混沌系统与分数阶统一混沌系统的异结构同步, 理论分析和数值仿真都证明了该同步方法的有效性.

## 2. 分数阶微分及其近似

在分数阶微积分的研究过程中, 对微分和积分概念提出了许多种定义<sup>[17]</sup>, 但在应用研究中使用较多的是 Riemann-Liouville (R-L) 定义, R-L 微分定义为

$$\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau,$$

其中  $n$  为整数, 且  $\alpha > 0, n-1 \leq \alpha < n$ ,  $\Gamma(\cdot)$  是 Gamma 函数. R-L 分数阶微分的拉氏变换为

$$L\left\{\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha}\right\} = s^\alpha L\{f(t)\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[ \frac{d^{\alpha-1-k} f(t)}{dt^{\alpha-1-k}} \right]_{t=0},$$

其中  $n$  为整数,且  $\alpha > 0, n - 1 \leq \alpha < n^{[18]}$ . 考虑到初始条件为零,上式简化为

$$L\left\{\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha}\right\} = s^\alpha L\{f(t)\}.$$

由此  $\alpha$  阶的分数阶积分算子可转化到频域计算,传递函数为  $F(s) = 1/s^\alpha$ .

目前,实施分数阶微积分运算的求解方法主要采用整数阶拟合分数阶的方式,利用求整数阶的方法来计算,工程上最常用的是时频域转换法<sup>[18]</sup>,而后再在频域中用分段线性近似法来实施计算.在一些文献中也可查到  $1/s^\alpha$  的逼近结果<sup>[7]</sup>,其中  $\alpha = 0.1-0.9$ ,步长为 0.1,逼近误差为 2 dB 或 3 dB. 本文就是采用时频域转换法把分数阶微分方程拟合成整数阶微分方程进行数值算例分析.

### 3. 分数阶 Liu 系统与分数阶统一系统中的混沌现象

#### 3.1. 分数阶 Liu 系统中的混沌现象

分数阶 Liu 系统可描述为

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha y_1}{dt^\alpha} &= a(y_2 - y_1), \\ \frac{d^\alpha y_2}{dt^\alpha} &= by_1 - cy_1y_3, \\ \frac{d^\alpha y_3}{dt^\alpha} &= -dy_3 + hy_1^2, \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $\alpha$  为分数阶的阶数, $a, b, c, d, h$  为控制参数. 当  $\alpha = 1$  时系统(1)为整数阶 Liu 系统,控制参数取为  $a = 10, b = 40, c = 10, d = 2.5, h = 4$  时,系统处于混沌状态,相图如图 1 所示.

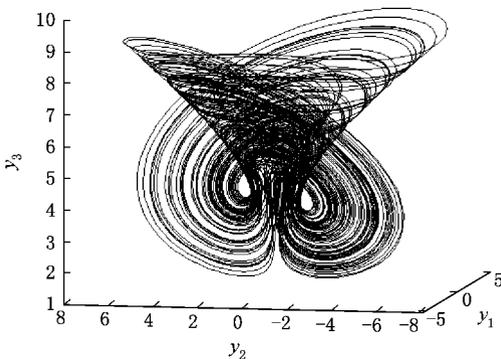


图 1 整数阶 Liu 混沌吸引子 ( $\alpha = 1, a = 10, b = 40, c = 10, d = 2.5, h = 4$ )

本文研究了非整数阶时 Liu 系统的混沌动力学行为.采用时频域转换法<sup>[18]</sup>,先把分数阶状态方程拟合成高阶的整数阶状态方程,再对整数阶状态方程利用四阶 Runge-Kutta 法进行数值仿真.选择合适的控制参数,对  $\alpha = 0.9-0.1$ ,以步长 0.1 变化时分数阶 Liu 系统的仿真结果表明,当  $\alpha = 0.9, 0.8, 0.1$  时系统存在混沌吸引子,相图如图 2—4 所示.为证明仿真结果的正确性,又计算了出现混沌时系统的最大 Lyapunov 指数<sup>[19]</sup>,如表 1 所示.

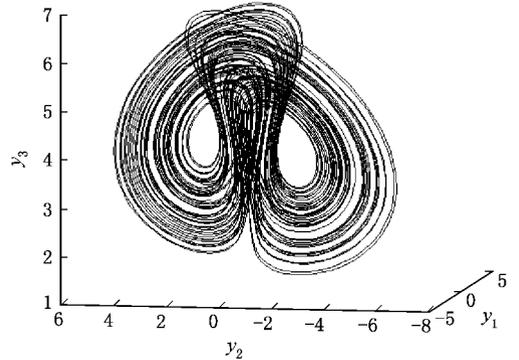


图 2 2.7 阶 Liu 混沌吸引子 ( $\alpha = 0.9, a = 10, b = 40, c = 10, d = 2.8, h = 4$ )

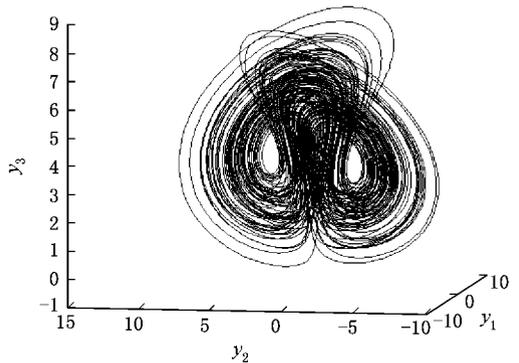


图 3 2.4 阶 Liu 混沌吸引子 ( $\alpha = 0.8, a = 10, b = 40, c = 10, d = 3, h = 4$ )

表 1 不同阶数与参数时 Liu 系统的最大 Lyapunov 指数

$\alpha$	( $a, b, c, d, h$ )	$\lambda_{\max}$
0.9	(10, 40, 10, 2.8, 4)	0.0250
0.8	(10, 40, 10, 3, 4)	0.0218
0.1	(10, 40, 10, 5.8, 4)	0.0151

#### 3.2. 分数阶统一系统中的混沌现象

分数阶统一系统的数学模型为

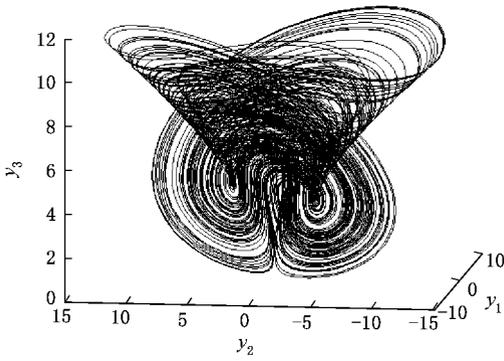


图4 0.3阶 Liu 混沌吸引子(  $\alpha = 0.1$  ,  $a = 10$  ,  $b = 40$  ,  $c = 10$  ,  $d = 5.8$  ,  $h = 4$  )

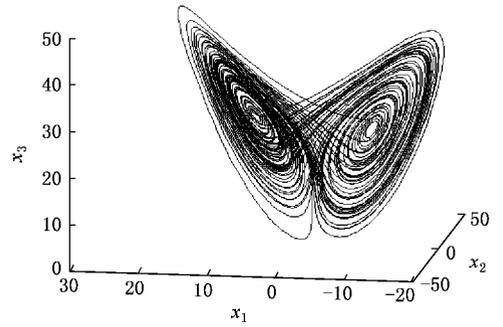


图5 0.3阶 Lorenz 系统(  $\alpha = 0.1$  ,  $k = 0$  )

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha x_1}{dt^\alpha} &= (25k + 10)x_2 - x_1, \\ \frac{d^\alpha x_2}{dt^\alpha} &= (28 - 35k)x_1 \\ &\quad + (29k - 1)x_2 - x_1x_3, \\ \frac{d^\alpha x_3}{dt^\alpha} &= x_1x_2 - \frac{(k + 8)}{3}x_3, \end{aligned} \quad (2)$$

其中  $\alpha$  为分数阶的阶数,  $k \in [0, 1]$  为控制参数. 当  $\alpha = 1$  时, 即整数阶系统, 这是一族混沌系统, 对于  $k \in [0, 1]$  系统均为混沌状态, 人们称它们为 Lorenz 系统族. 当  $k \in [0, 0.8]$  时, 统一系统属于广义 Lorenz 系统; 当  $k \in (0.8, 1]$  时, 统一系统属于广义 Chen 系统; 当  $k = 0.8$  时, 统一系统属于广义 Lü 系统, 为临界系统.

文献 [8—10] 已经对分数阶 Chen 系统的混沌动力学行为进行了研究, 所以本文仅对分数阶 Lorenz 系统与分数阶 Lü 系统的混沌动力学行为进行研究. 利用上述的时频域转换法, 对  $\alpha = 0.9—0.1$  以步长 0.1 变化时的分数阶 Lorenz 系统与分数阶 Lü 系统进行数值仿真, 仿真结果表明 2.7 阶与 2.4 阶的 Lü 系统存在混沌吸引子, 0.3 阶的 Lorenz 系统和 Lü 系统均存在混沌吸引子, 仿真相图分别如图 5—8 所示, 并计算了出现混沌时系统的最大 Lyapunov 指数<sup>[19]</sup>, 如表 2 所示.

表 2 不同阶数的 Lorenz 系统与 Lü 系统的最大 Lyapunov 指数

$\alpha$	Lorenz 系统	Lü 系统
0.9	< 0	0.0160
0.8	< 0	0.0181
0.1	0.0950	0.0220

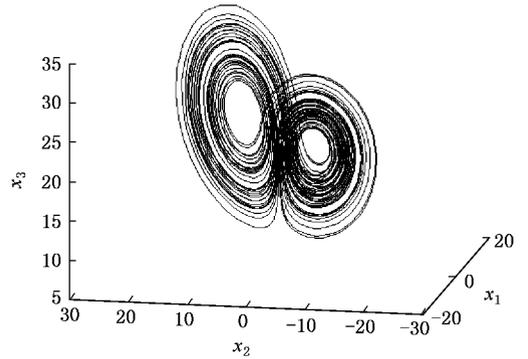


图6 2.7阶 Lü 系统(  $\alpha = 0.9$  ,  $k = 0.8$  )

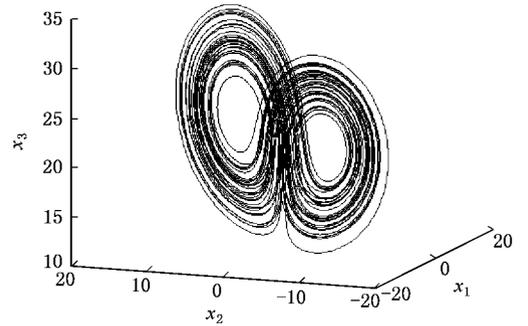


图7 2.4阶 Lü 系统(  $\alpha = 0.8$  ,  $k = 0.8$  )

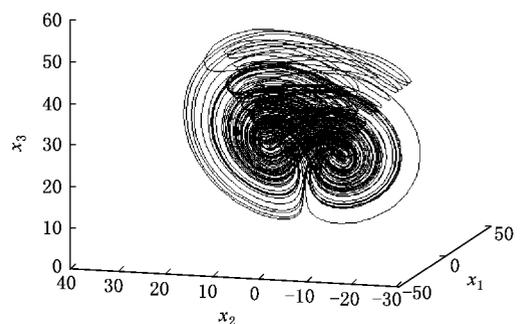


图8 0.3阶 Lü 系统(  $\alpha = 0.1$  ,  $k = 0.8$  )

#### 4. Active 控制法实现异结构同步

定义 两个非线性分数阶混沌系统

$$\frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = f(t, x),$$

$$\frac{d^\alpha y}{dt^\alpha} = g(t, y) + u(t, x, y),$$

其中  $x, y \in R^n$ ,  $f, g$  为从  $R_+ \times R^n \rightarrow R^n$  的可微函数,  $u(t, x, y)$  为控制函数, 上式为驱动系统, 下式为响应系统, 若对任意初值  $x(t_0), y(t_0) \in R^n$ , 成立  $\lim_{t \rightarrow \infty} (y - x) = 0$  则称响应系统和驱动系统达到同步, 由于驱动系统和响应系统结构不同, 又称异结构同步.

统一系统是一个单参数、全域性的连续混沌系统, 它连接了 Lorenz 吸引子, Chen 吸引子及 Liu 吸引子, 在保密通信等领域获得了广泛应用, 因此研究 Liu 系统与统一系统间的同步问题具有重要的实际意义, 本文通过 Active 控制技术进一步研究了分数阶 Liu 系统与分数阶统一系统的同步问题.

设分数阶统一系统与分数阶 Liu 系统分别为驱动系统和响应系统:

$$\text{驱动系统} \begin{cases} \frac{d^\alpha x_1}{dt^\alpha} = (25k + 10)(x_2 - x_1), \\ \frac{d^\alpha x_2}{dt^\alpha} = (28 - 35k)x_1 \\ \quad + (29k - 1)x_2 - x_1 x_3, \\ \frac{d^\alpha x_3}{dt^\alpha} = x_1 x_2 - \frac{(k + 8)}{3} x_3; \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{响应系统} \begin{cases} \frac{d^\alpha y_1}{dt^\alpha} = a(y_2 - y_1) + u_1(t), \\ \frac{d^\alpha y_2}{dt^\alpha} = by_1 - cy_1 y_3 + u_2(t), \\ \frac{d^\alpha y_3}{dt^\alpha} = -dy_3 + hy_1^2 + u_3(t). \end{cases} \quad (4)$$

其中响应系统(4)引入了三个待定的控制函数  $u_1(t), u_2(t), u_3(t)$ . 定义误差信号

$$e_1 = y_1 - x_1, e_2 = y_2 - x_2, e_3 = y_3 - x_3.$$

由(4)式减(3)式得到误差系统

$$\frac{d^\alpha e_1}{dt^\alpha} = a(e_2 - e_1) + (a - 25k - 10)(x_2 - x_1) + u_1(t),$$

$$\frac{d^\alpha e_2}{dt^\alpha} = be_1 + (b + 35k - 28)x_1 - (29k - 1)x_2 + x_1 x_3 - cy_1 y_3 + u_2(t), \quad (5)$$

$$\frac{d^\alpha e_3}{dt^\alpha} = -de_3 + \left(\frac{k + 8}{3} - d\right)x_3 - x_1 x_2 + hy_1^2 + u_3(t).$$

定理 1 如果取控制函数  $u$  为

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(25k + 9)x_1 + (a - 1)y_1 + (25k + 10)x_2 - ay_2 \\ -(35k - 28)x_1 - by_1 + 29kx_2 - y_2 - x_1 x_3 + cy_1 y_3 \\ -\left(\frac{k + 8}{3} - 1\right)x_3 + (d - 1)y_3 + x_1 x_2 - hy_1^2 \end{bmatrix},$$

其中  $u = [u_1, u_2, u_3]^T$ , 则误差系统(5)的零点是渐进稳定的, 即有  $\lim_{t \rightarrow \infty} e = 0$  或  $\lim_{t \rightarrow \infty} (y - x) = 0$ , 从而实现了分数阶 Liu 系统与分数阶统一系统的异结构同步.

证明 选取如下控制函数

$$\begin{aligned} u_1(t) &= V_1(t) - (a - 25k - 10)(x_2 - x_1), \\ u_2(t) &= V_2(t) - (b + 35k - 28)x_1 \\ &\quad + (29k - 1)x_2 - x_1 x_3 + cy_1 y_3, \quad (6) \\ u_3(t) &= V_3(t) - \left(\frac{k + 8}{3} - d\right)x_3 \\ &\quad + x_1 x_2 - hy_1^2, \end{aligned}$$

其中  $V_1(t), V_2(t), V_3(t)$  是控制输入信号, 它们是关于误差变量  $e_1, e_2, e_3$  的函数.

不妨取控制信号为

$$\begin{bmatrix} V_1(t) \\ V_2(t) \\ V_3(t) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix},$$

其中  $A$  为  $3 \times 3$  的实矩阵, 则误差系统(5)变为

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha e_1}{dt^\alpha} &= a(e_2 - e_1) + V_1(t), \\ \frac{d^\alpha e_2}{dt^\alpha} &= be_1 + V_2(t), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\frac{d^\alpha e_3}{dt^\alpha} = -de_3 + V_3(t).$$

此时,要使系统(7)稳定,即  $\lim_{t \rightarrow \infty} e = 0$ ,只需适当地选取常数矩阵  $A$  即可,不妨取为

$$A = \begin{bmatrix} a-1 & -a & 0 \\ -b & -1 & 0 \\ 0 & 0 & d-1 \end{bmatrix},$$

则系统(7)变为

$$\frac{d^\alpha e_1}{dt^\alpha} = -e_1,$$

$$\frac{d^\alpha e_2}{dt^\alpha} = -e_2,$$

$$\frac{d^\alpha e_3}{dt^\alpha} = -e_3.$$

从而受控误差系统(7)的特征值  $\lambda_i$  满足  $|\arg(\lambda_i)| > \alpha\pi/\chi (i=1,2,3)$ ,由分数阶线性系统的稳定性理论<sup>[20]</sup>知,分数阶系统(7)的零点是渐进稳定的,即有  $\lim_{t \rightarrow \infty} e = 0$  或  $\lim_{t \rightarrow \infty} (y-x) = 0$ ,因此实现了分数阶 Liu 系统与分数阶统一系统的异结构同步.

### 数值仿真

本文对  $\alpha = 0.1$  时,即 0.3 阶的 Liu 系统与 0.3 阶的统一系统之间的同步进行了数值仿真,由于 0.3 阶的统一混沌系统是一族系统,所以只对  $k=0$  和  $k=0.8$  时的情况即 Lorenz 系统和 Liu 系统进行了仿真.

对 0.3 阶的 Liu 系统与 0.3 阶的 Lorenz 系统: 0.3 阶 Liu 系统的参数为  $\alpha = 0.1, a = 10, b = 40, c = 10, d = 5.8, h = 4$ , 0.3 阶 Lorenz 系统的参数为  $\alpha = 0.1, k = 0$ ,此时驱动系统和响应系统均处于混沌状态.当初值分别取为  $x_1(0) = 1, x_2(0) = 2, x_3(0) = 3$  和  $y_1(0) = 10, y_2(0) = 12, y_3(0) = 14$  时,两系统的同步结果如图 9 所示.

对 0.3 阶的 Liu 系统与 0.3 阶的 Lü 系统: 0.3 阶 Liu 系统的参数同上, 0.3 阶 Lü 系统的参数为  $\alpha = 0.1, k = 0.8$ ,此时驱动系统与响应系统都为混沌状态.当取初值分别为  $x_1(0) = 1, x_2(0) = 2, x_3(0) = 3$  和  $y_1(0) = 100, y_2(0) = 110, y_3(0) = 120$  时,仿真结果如图 10 所示.

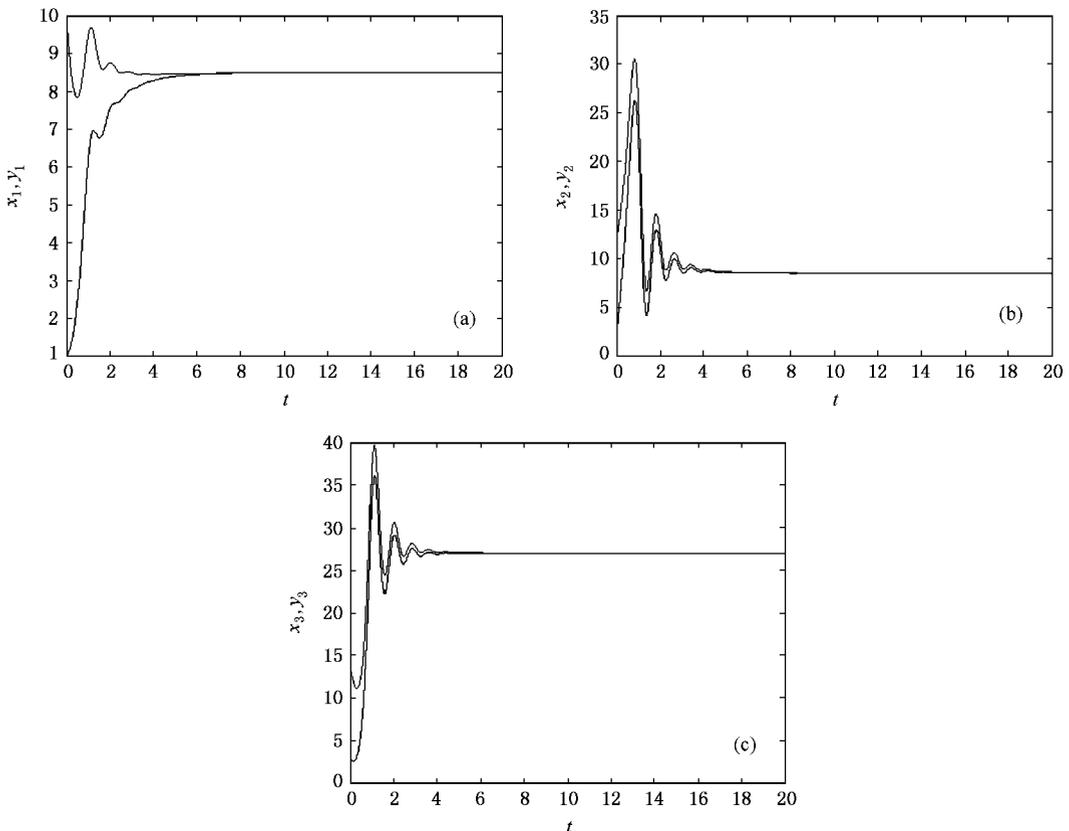


图9 0.3 阶 Liu 系统与 0.3 阶 Lorenz 系统的异结构同步结果 (a) 信号  $x_1, y_1$  (b) 信号  $x_2, y_2$  (c) 信号  $x_3, y_3$

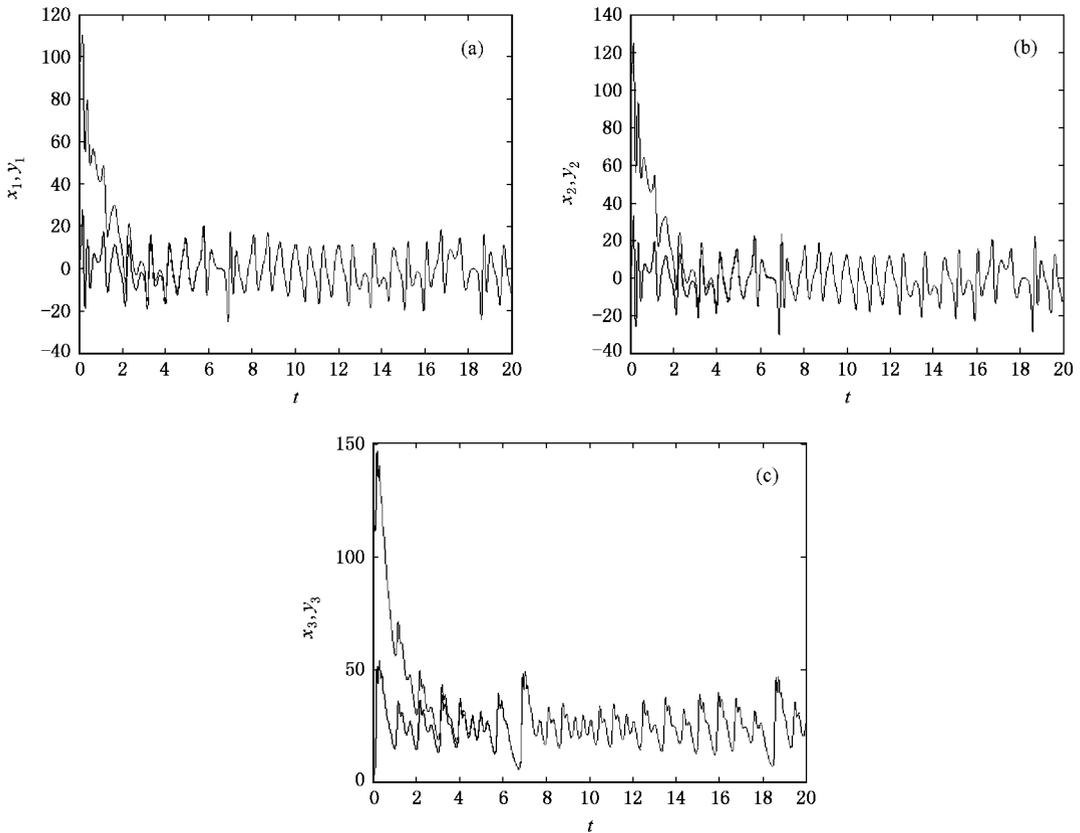


图 10 0.3 阶 Liu 系统与 0.3 阶 Li 系统的异结构同步结果 (a) 信号  $x_1, y_1$  (b) 信号  $x_2, y_2$  (c) 信号  $x_3, y_3$

## 5. 结 论

本文首先对近几年提出的两个混沌系统——Liu 混沌系统和统一混沌系统,研究了它们分数阶系统的混沌动力学行为,把分数阶状态方程拟合成整数阶状态方程,再采用四阶 Runge-Kutta 法,对不同微分阶数时的情况进行了数值仿真。仿真结果表明,

两分数阶系统在系统阶数小于 3 时仍然存在混沌吸引子,且存在混沌的最低阶数仅为 0.3,并计算了存在混沌时系统的最大 Lyapunov 指数,证明混沌的确存在。其次,利用 Active 控制技术实现了分数阶 Liu 系统与分数阶统一系统的异结构同步,不需要计算 Lyapunov 指数,方法简单且同步速度很快, $t = 5$  s 时即达到同步。数值仿真结果验证了同步方案的有效性。

- [ 1 ] Lorenz E N 1963 *J. Atmos. Sci.* **20** 131
- [ 2 ] Chen G R, Ueta T 1999 *Int. J. Bifurc. Chaos* **9** 1465
- [ 3 ] Lü J H, Chen G R 2002 *Int. J. Bifurc. Chaos* **12** 659
- [ 4 ] Lü J H, Chen G R, Cheng D, Celikovsky S 2002 *Int. J. Bifurc. Chaos* **12** 2917
- [ 5 ] Lü C X, Liu T, Liu L, Liu K 2004 *Chaos, Solitons & Fractals* **22** 1031
- [ 6 ] Schuster HG 1984 *Deterministic chaos: an introduction* (Weinheim: Physik-Verlag)
- [ 7 ] Ahmad W M, Sprott J C 2003 *Chaos Solitons & Fractals* **16** 339
- [ 8 ] Li C G, Chen G R 2004 *Chaos, Solitons & Fractals* **22** 549
- [ 9 ] Li C P, Peng G J 2004 *Chaos, Solitons & Fractals* **22** 443
- [ 10 ] Lü J G, Chen G R 2006 *Chaos, Solitons & Fractals* **27** 685
- [ 11 ] Gao X, Yu J B 2005 *Chin. Phys. Soc.* **14** 06
- [ 12 ] Lü J G 2005 *Chin. Phys.* **14** 1517
- [ 13 ] Lü J G 2006 *Chin. Phys.* **15** 301
- [ 14 ] Wang X Y 2003 *Chaos in the Complex Nonlinearity System* (Beijing: Electronics Industry Press) chapt. 3 (in Chinese) [王兴元 2003 复杂非线性系统中的混沌(北京:电子工业出版社)第三章]

- [ 15 ] Li S , Xu W , Li R H , Li Y P 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5681 [ 李爽、徐 伟、李瑞红、李玉鹏 2006 物理学报 **55** 5681 ]
- [ 16 ] Cai G L , Huang J J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3997 [ 蔡国梁、黄娟娟 2006 物理学报 **55** 3997 ]
- [ 17 ] Podlubny I 1999 *Fractional differential equations* ( New York : Academic Press )
- [ 18 ] Charef A , Sun H H , Tsao Y Y , Onaral B 1992 *IEEE Trans Auto Contr* **37** 1465
- [ 19 ] Rosenstein M T , Collins J J , De Luca CJ 1994 *Phys. D* **73** 82
- [ 20 ] Matignon D 1996 In : IMACS , IEEE-SMC , Lille , France 963

## Chaos in fractional-order Liu system and a fractional-order unified system and the synchronization between them

Zhang Cheng-Fen Gao Jin-Feng Xu Lei

( School of Electrical Engineering , Zhengzhou University , Zhengzhou 450001 , China )

( Received 14 December 2006 ; revised manuscript received 27 December 2006 )

### Abstract

This paper studies the chaotic behaviors of the fractional-order Liu system and the fractional-order unified system which were presented several years ago. It is found that chaos exists in the both systems with order less than three and the lowest order to have chaos is 0.3. The calculation results of the maximum Lyapunov exponents when the system is chaotic illustrate the existence of chaos. Chaos synchronization between fractional-order Liu system , fractional-order Lorenz system and fractional-order Lü system is realized by employing active control technique. Theoretical analysis and numerical simulations demonstrate the effectiveness of the proposed method.

**Keywords** : fractional-order Liu system , fractional-order unified system , chaos , synchronization

**PACC** : 0545