

超混沌 Lorenz 系统*

王兴元† 王明军

(大连理工大学电子与信息工程学院, 大连 116024)
(2006 年 10 月 24 日收到, 2006 年 12 月 13 日收到修改稿)

对 Lorenz 系统添加一个非线性控制器, 使之构成四维超混沌 Lorenz 系统. 利用分岔图、Lyapunov 指数谱及相图分析方法, 研究了超混沌 Lorenz 系统的运动规律. 数值模拟结果表明: 新引入参数处于不同取值范围时, 超混沌 Lorenz 系统可以分别呈现收敛、发散、周期、混沌及超混沌动力学行为.

关键词: Lorenz 系统, 超混沌, Lyapunov 指数, 分岔

PACC: 0545, 0555

1. 引言

Rössler 给出了超混沌的概念, 并提出了超混沌 Rössler 系统^[1]. 由于超混沌系统有多个正的 Lyapunov 指数, 系统的动态行为更加难以预测, 因此在保密通信方面比一般的混沌系统具有更高的使用价值, 受到了科研工作者的普遍关注^[2]. 近年来, 人们对这一领域进行了广泛深入地研究^[3,4], 在理论和实践方面取得了许多成果. 如 Chen 等在 Chen 系统的基础上提出了超混沌 Chen 系统^[5]; Lü 等基于 Lü 系统提出了超混沌 Lü 系统^[6]; Nikolov 等提出了变形超混沌 Rössler 系统^[7]; Gao 等以另一种方法使 Chen 系统产生了超混沌^[8]. 针对超混沌系统的同步、追踪控制及保密通信方面, 人们也做了大量的研究工作, 提出了一系列解决方案^[9-16]. 在上述研究的基础上, 本文对 Lorenz 系统添加一个非线性控制器使之产生超混沌行为, 并利用分岔图、Lyapunov 指数谱及相图分析了新引入参数处于不同取值范围时超混沌 Lorenz 系统的动力学特征.

2. 超混沌 Lorenz 系统的设计

Lorenz 系统^[17]可表示为如下方程:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(y - x), \\ \dot{y} &= cx - y - xz, \end{aligned}$$

$$\dot{z} = xy - bz, \quad (1)$$

当 $a = 10$, $b = 8/3$ 和 $c = 28$ 时, Lorenz 系统处于混沌状态, 其混沌吸引子在各平面投影如图 1 所示.

在系统 (1) 第一个方程中引入非线性控制器 w , 令 w 的变化率为 $\dot{w} = -yz + rw$, 则产生的新系统为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(y - x) + w, \\ \dot{y} &= cx - y - xz, \\ \dot{z} &= xy - bz, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\dot{w} = -yz + rw.$$

产生超混沌吸引子要满足几个必要条件: 具有耗散结构, 方程的维数不少于四, 系统至少有两个增强不稳定因素的方程且这两个方程至少有一个含非线性项. 系统 (2) 中 r 为新引入的控制参数, 仍令 $a = 10$, $b = 8/3$ 和 $c = 28$, 只有当

$$\begin{aligned} \nabla V &= \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial w} \\ &= -10 - 1 - 8/3 + r = r - 13.667 < 0 \end{aligned}$$

才能满足耗散结构从而产生混沌吸引子, 因此理论上 r 的最大上限为 13.667. 尝试对 r 取零附近的值以减小其对原系统耗散性的影响, 应用 Ramasubramanian 等提出的计算微分方程组 Lyapunov 指数谱的方法^[18], 作者得到当 $r = -1$ 时, 系统 (2) 的 Lyapunov 指数为 $\lambda_1 = 0.3381$, $\lambda_2 = 0.1586$, $\lambda_3 = 0$ 和 $\lambda_4 = -15.1752$, 可见, 此时系统 (2) 产生了超混沌运动, 对应的吸引子在各平面上的投影如图 2 所示.

* 国家自然科学基金(批准号: 60573172)和辽宁省教育厅高等学校科学技术研究项目(批准号: 20040081)资助的课题.

† 通讯联系人, E-mail: wangxy@dlut.edu.cn

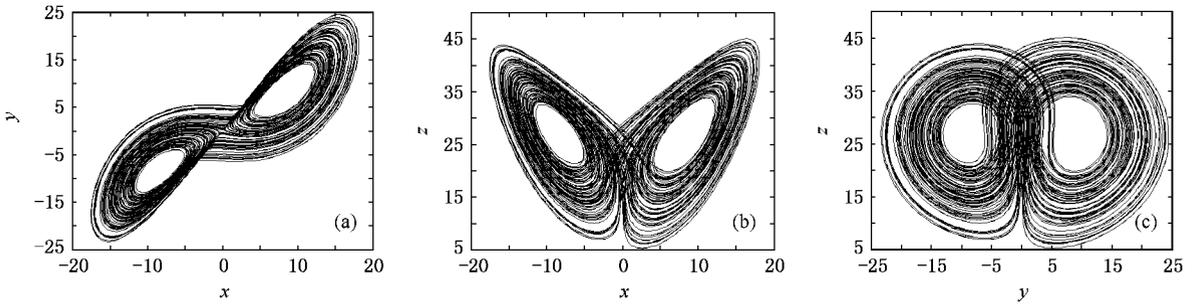


图 1 Lorenz 吸引子在各平面上的投影

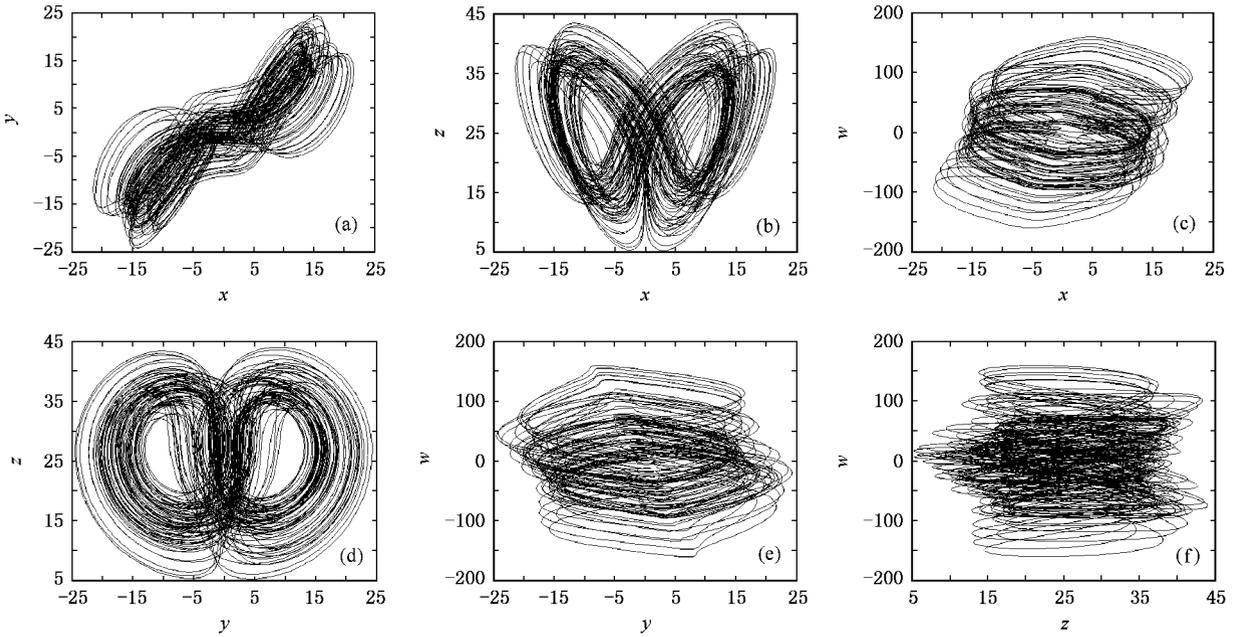


图 2 $r = -1$ 时, 系统 2 的超混沌吸引子在各平面上的投影

3. 超混沌 Lorenz 系统的动力学分析

对系统 (2) 而言, $r > 0$ 时, 若 $|r|$ 越大, 则系统中的驱动力就越大, 系统不稳定因素就会增大; 反之, $r < 0$ 时, 若 $|r|$ 越大, 则系统中的耗散力就越大, 系统稳定因素将得到增强. 对 r 取零附近的值进行数值模拟时, 当 $r > 0.17$ 时系统 (2) 将很快发散. 对 r 取距离零稍远的负值, 这时系统 (2) 会收敛于稳定平衡点. 仿真结果如图 3 所示.

由图 3 可见, 有时需要很长时间系统 (2) 才最终稳定于平衡点. 通过模拟系统 (2) 的长期运动行为得出: 当 $r < -6.43$ 时, 系统 (2) 将最终收敛于某个平衡点.

为研究系统 (2) 的动力学行为随 r 值的变化情况, 取 $-6.43 \leq r \leq 0.17$, 做出分岔图 4. X_{\max} 表示在每个不稳定周期 (或稳定周期) 中 x 的峰值, 当系统做周期运动时, 对应同一个 r 值 X_{\max} 只能取到一个或有限几个值, 而系统在混沌状态时, 对应同一个 r 值 X_{\max} 能取到无数个值. 应用 Ramasubramanian 等提出的计算微分方程组 Lyapunov 指数谱的方法^[18], 得出 $-6.43 \leq r \leq 0.17$ 时系统 (2) Lyapunov 指数谱如图 5 所示.

根据图 4 和 5 及先前的判定结果, 针对处于交界区域的 r 值, 对系统 (2) 的 Lyapunov 指数做了较为精确的数值计算, 得出如下结论: 当 $r < -6.43$ 时, 系统 (2) 最终收敛于稳定平衡点; 当 $-6.43 \leq r \leq -3.21$ 时, $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 < 0, \lambda_4 < 0$, 系统 (2) 处于

混沌状态 ;当 $-3.21 < r \leq -1.52$ 时 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0, \lambda_4 < 0$, 系统 (2) 处于周期运动状态 ;当 $-1.52 < r \leq -0.06$ 时 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 = 0, \lambda_4 < 0$, 系统

(2) 处于超混沌状态 ;当 $-0.06 < r \leq 0.17$ 时 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 < 0, \lambda_4 < 0$ 系统 (2) 处于混沌状态 ;当 $r > 0.17$ 时, 系统 (2) 将发散.

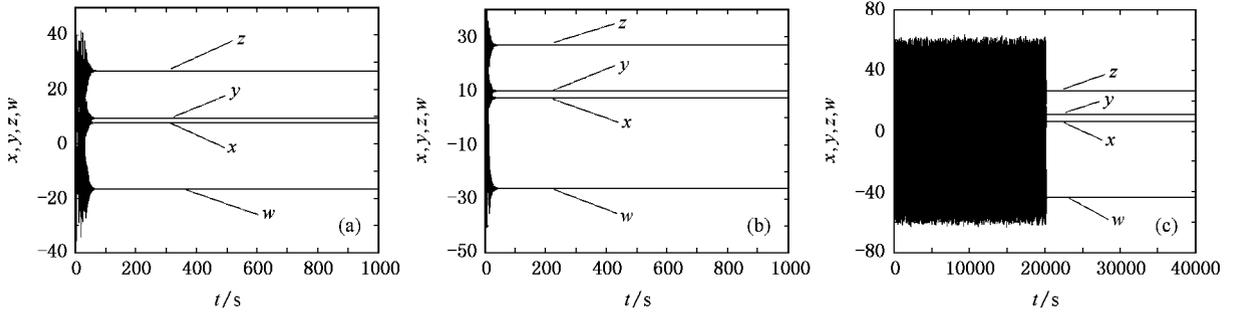


图 3 系统 (2) 收敛于稳定平衡点 (a) $r = -15$; (b) $r = -10$; (c) $r = -6.5$

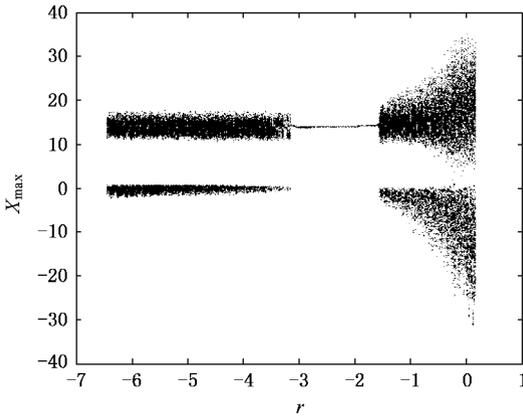


图 4 $-6.43 \leq r \leq 0.17$ 时, 系统 (2) 的分岔图

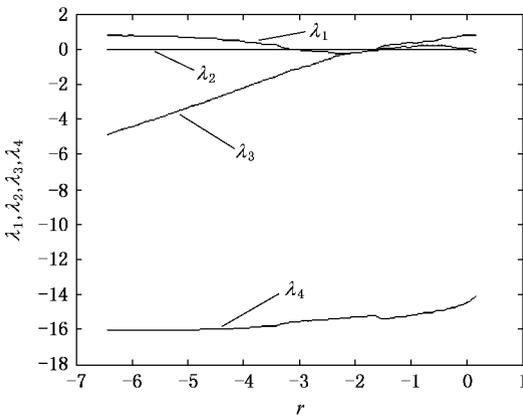


图 5 $-6.43 \leq r \leq 0.17$ 时, 系统 (2) 的 Lyapunov 指数谱

系统 (2) 的 Lyapunov 指数为 : $r = -6.43$ 时 $\lambda_1 = 0.7797, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -4.8541, \lambda_4 = -16.0454$; $r = -5.71$ 时 $\lambda_1 = 0.7713, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -4.1194, \lambda_4 = -16.0502$; $r = -4.89$ 时 $\lambda_1 = 0.6658, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -3.2228, \lambda_4 = -16.0240$; $r = -4.06$ 时 $\lambda_1 = 0.4701, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -2.2861, \lambda_4 = -15.9332$; $r = -3.21$ 时 $\lambda_1 = 0.0016, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -1.2957, \lambda_4 = -15.5962$. $r = -4.89$ 时, 系统 (2) 的吸引子在各平面上的投影如图 6 所示. 可见当 $-6.43 \leq r \leq -3.21$ 时, 系统 (2) 处于混沌状态.

2) 当 $-3.21 < r \leq -1.52$ 时, 取不同的 r 值计算系统 (2) 的 Lyapunov 指数为 : $r = -3.20$ 时 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -0.0031, \lambda_3 = -1.2857, \lambda_4 = -15.5937$; $r = -2.79$ 时 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -0.0924, \lambda_3 = -0.8867, \lambda_4 = -15.4908$; $r = -2.37$ 时 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -0.2226, \lambda_3 = -0.4424, \lambda_4 = -15.3875$; $r = -1.95$ 时 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -0.1739, \lambda_3 = -0.1756, \lambda_4 = -15.2822$; $r = -1.52$ 时 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -0.0111, \lambda_3 = -0.0113, \lambda_4 = -15.1795$. 取 $r = -2.37$ 时, 系统 (2) 的吸引子在各平面上的投影如图 7 所示. 可见当 $-3.21 < r \leq -1.52$ 时, 系统 (2) 做周期运动.

3) 当 $-1.52 < r \leq 0.06$ 时, 取不同的 r 值计算系统 (2) 的 Lyapunov 指数为 : $r = -1.51$ 时 $\lambda_1 = 0.1997, \lambda_2 = 0.0271, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = -15.4176$; $r = -1.15$ 时 $\lambda_1 = 0.2978, \lambda_2 = 0.1176, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = -15.2438$; $r = -0.79$ 时 $\lambda_1 = 0.4201, \lambda_2 = 0.2088, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = -15.0982$; $r = -0.43$ 时 $\lambda_1 = 0.5837, \lambda_2 = 0.1974, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = -14.8888$; $r = -0.06$ 时,

4. 针对典型 r 值进行数值仿真

1) 当 $-6.43 \leq r \leq -3.21$ 时, 取不同的 r 值计算

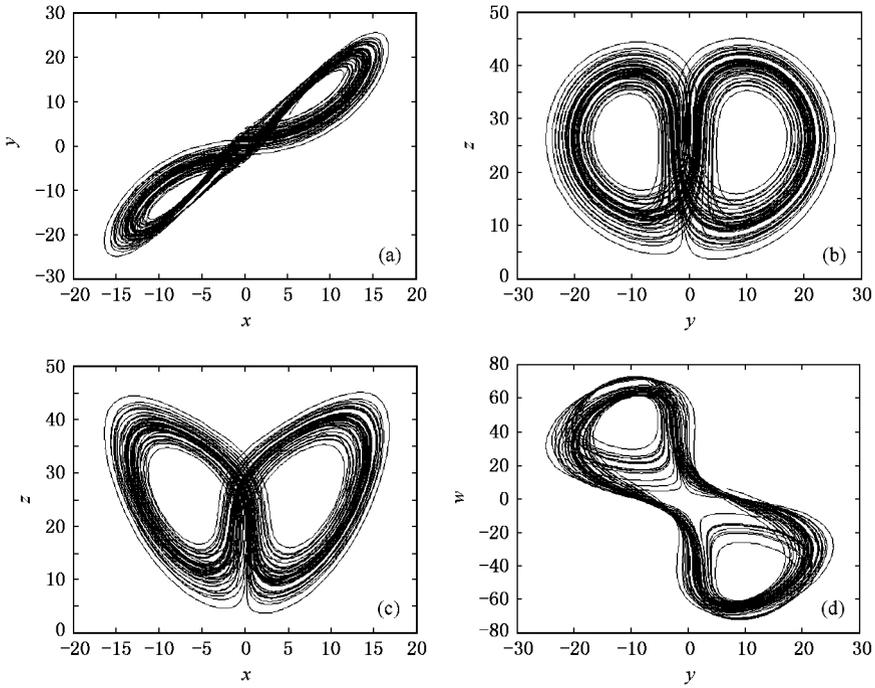


图 6 $r = -4.89$ 时, 系统(2)的动力学行为分析 (a)吸引子在 $x-y$ 平面上的投影 (b)吸引子在 $y-z$ 平面上的投影 (c)吸引子在 $x-z$ 平面上的投影 (d)吸引子在 $y-w$ 平面上的投影

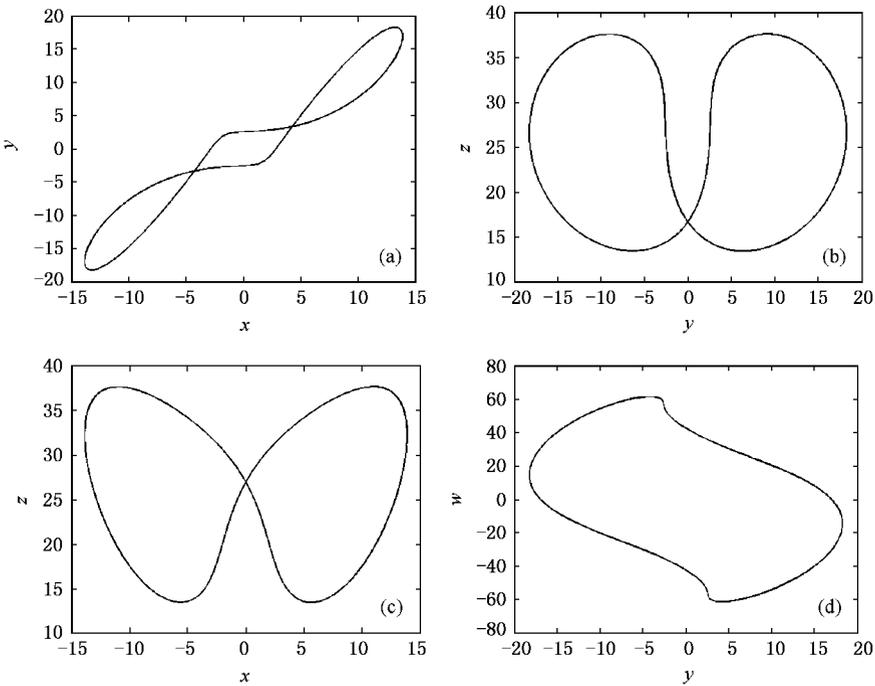


图 7 $r = -2.37$ 时, 系统(2)的动力学行为分析 (a)吸引子在 $x-y$ 平面上的投影 (b)吸引子在 $y-z$ 平面上的投影 (c)吸引子在 $x-z$ 平面上的投影 (d)吸引子在 $y-w$ 平面上的投影

$\lambda_1 = 0.7979$ $\lambda_2 = 0.0327$ $\lambda_3 = 0$ $\lambda_4 = -14.5398$. 取 $r = -0.79$ 时, 系统(2)的吸引子在各平面上的投影

如图 8 所示. 可见当 $-1.52 < r \leq -0.06$ 时, 系统(2)处于超混沌状态.

4)当 $-0.06 < r \leq 0.17$ 时 取不同的 r 值计算系统(2)的 Lyapunov 指数为 : $r = -0.05$ 时 , $\lambda_1 = 0.8004$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -0.0401$, $\lambda_4 = -14.5249$; $r = 0.01$ 时 , $\lambda_1 = 0.8073$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -0.0691$, $\lambda_4 = -14.4316$; $r = 0.06$, $\lambda_1 = 0.8204$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 =$

-0.0869 , $\lambda_4 = -14.3667$; $r = 0.11$, $\lambda_1 = 0.8351$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -0.1294$, $\lambda_4 = -14.2888$; $r = 0.17$ 时 , $\lambda_1 = 0.7952$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -0.2130$, $\lambda_4 = -14.0896$. 取 $r = 0.11$ 时 系统(2)的吸引子在各平面上的投影如图9所示.可见当 $-0.06 < r \leq 0.17$ 时 系统(2)是混沌的.

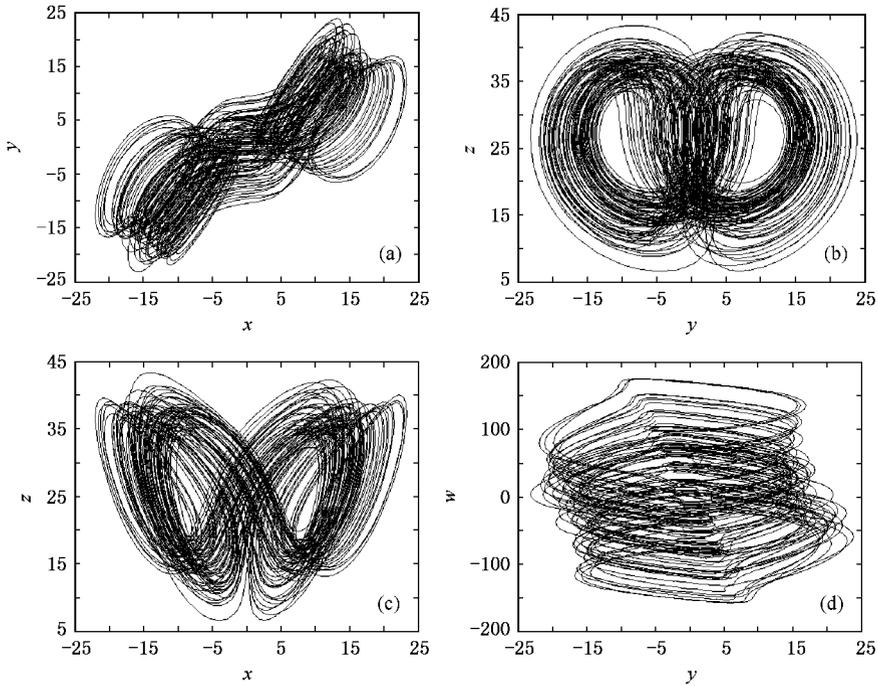


图8 $r = -0.79$ 时 系统(2)的动力学行为分析 (a)吸引子在 $x - y$ 平面上的投影 ;(b)吸引子在 $y - z$ 平面上的投影 ;(c)吸引子在 $x - z$ 平面上的投影 ;(d)吸引子在 $y - w$ 平面上的投影

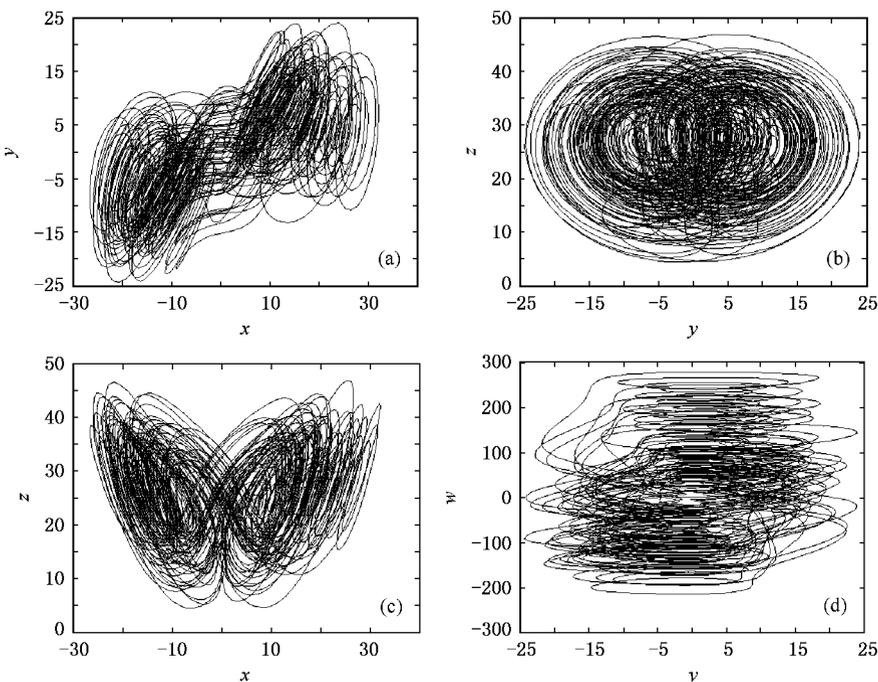


图9 $r = 0.11$ 时 系统(2)的动力学行为分析 (a)吸引子在 $x - y$ 平面上的投影 ;(b)吸引子在 $y - z$ 平面上的投影 ;(c)吸引子在 $x - z$ 平面上的投影 ;(d)吸引子在 $y - w$ 平面上的投影

5. 结 论

本文基于 Lorenz 系统提出了一个新的四维超混沌 Lorenz 系统,研究了新引入参数取不同值时超混沌 Lorenz 系统的运动情况,给出可令超混沌 Lorenz

系统分别处于收敛、发散、周期、混沌及超混沌状态的参数的取值范围.通过分岔图、Lyapunov 指数谱及相图的数值仿真,验证了超混沌 Lorenz 系统的运动规律.本文中的理论及分析方法具有普适性,对于其他低维混沌系统产生超混沌运动具有一定启示意义.

- [1] Rössler O E 1979 *Phys. Lett. A* **71** 155
- [2] Chen G, Dong X 1998 *From Chaos to Order: Methodologies, Perspectives and Applications* (Singapore: World Scientific) chapt. 1
- [3] Wang G R, Yu X L, Chen S G 2001 *Chaotic Control, Synchronization and Utilizing* (Beijing: National Defence Industry Press) chapt. 7 (in Chinese) [王光瑞、于熙龄、陈式刚 2001 混沌的控制、同步与利用(北京:国防工业出版社)第七章]
- [4] Wang X Y 2003 *Chaos in the Complex Nonlinearity System* (Beijing: Electronics Industry Press) chapt. 2 (in Chinese) [王兴元 2003 复杂非线性系统中的混沌(北京:电子工业出版社)第二章]
- [5] Li Y X, Tang W K S, Chen G R 2005 *Int. J. Bifur. Chaos* **15** 3367
- [6] Chen A M, Lu J A, Lü J H, Yu S M 2006 *Physica A* **364** 103
- [7] Nikolov S, Clodong S 2004 *Chaos, Solitons Fract.* **22** 407
- [8] Gao T G, Chen Z Q, Yuan Z Z, Chen G R 2006 *Int. J. Mod. Phys. C* **17** 471
- [9] Sun L, Jiang D P 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3283 (in Chinese) [孙琳、姜德平 2006 物理学报 **55** 3283]
- [10] Chen S H, Hua J, Wang C P, Lü J H 2004 *Phys. Lett. A* **321** 50
- [11] Park J H 2005 *Chaos, Solitons Fract.* **26** 959
- [12] Zhang H, Ma X K, Yang Y, Xu C D 2005 *Chin. Phys.* **14** 86
- [13] Zou Y L, Zhu J, Chen G R 2005 *Chin. Phys.* **14** 697
- [14] Cheng L, Zhang R Y, Peng J H 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 536 (in Chinese) [程丽、张入元、彭建华 2003 物理学报 **52** 536]
- [15] Ma J, Liao G H, Mo X H, Li W X, Zhang P W 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5585 (in Chinese) [马军、廖高华、莫晓华、李维学、张平伟 2005 物理学报 **54** 5585]
- [16] Cai G L, Huang J J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3997 (in Chinese) [蔡国梁、黄娟娟 2006 物理学报 **55** 3997]
- [17] Lorenz E N 1963 *J. Atmos. Sci.* **20** 130
- [18] Ramasubramanian K, Sriram M S 2000 *Physica D* **139** 72

Hyperchaotic Lorenz system^{*}

Wang Xing-Yuan[†] Wang Ming-Jun

(School of Electronic & Information Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

(Received 24 October 2006; revised manuscript received 13 December 2006)

Abstract

This paper presents a four-dimensional hyperchaotic Lorenz system, obtained by adding a nonlinear controller to Lorenz chaotic system. The hyperchaotic Lorenz system is studied by bifurcation diagram, Lyapunov exponent spectrum and phase diagram. Numerical simulations show that the new system's behavior can be convergent, divergent, periodic, chaotic and hyperchaotic as the parameter varies.

Keywords: Lorenz system, hyperchaos, Lyapunov exponents, bifurcation

PACC: 0545, 0555

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60573172) and the Superior University Science Technology Research Project of Liaoning Province (Grant No. 20040081).

[†] Corresponding author. E-mail: wangxy@dut.edu.cn