第 56 卷 第 9 期 2007 年 9 月
1000-3290/2007/56(09)/5142-07
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.56,No.9,September,2007

基于非线性观测器的一类混沌系统的相同步*

孟 娟 王兴元†
(大连理工大学电子与信息工程学院,大连 116024)
(2006 年 11 月 7 日收到;2006 年 12 月 15 日收到修改稿)

研究了一类自治混沌系统的相同步问题.基于非线性状态观测器方法和极点配置技术,设计了相同步机理,并用该方法实现了一类自治混沌系统的相同步.通过对一种新的混沌系统的数值模拟,进一步验证了所提方案的有效性.

关键词:混沌,相同步,非线性状态观测器,极点配置技术
PACC:0545,0555

1.引 言

自从 Pecora 和 Carroll[1] 提出"混沌同步"的概念以来,混沌同步的研究已引起越来越多学者的关注[2].混沌同步在保密通信、信号处理和生命科学等方面有着十分广泛的应用前景和巨大的市场潜在价值[3—6].近年来,人们从不同的角度对混沌同步进行了研究,并将其概念进行了推广,如广义同步[7,8]、相位同步[9,10]、延迟同步[11]、反相同步[10,12]等.相位同步是指两个混沌系统轨道的相位差锁定在 2π 以内,而它们的振幅仍然保持混沌状态且互不相关.相位同步因其重要性和普遍存在性受到了非线性动力学领域的研究者的重视,它在生物、医学、化学等领域中的应用,使其成为一个方兴未艾的研究方向[13,14].近年来,国内外的一些学者对此进行了较深入的研究,如 Michael 等研究了弱耦合 Rössler 系统的相同步问题[9];Shuai 等研究了两个耦合 HR 神经元的相同步过程[13];Schafer 等研究了人体心肺系统的相同步[14];Ho 等利用主动控制的方法实现了 Lorenz 系统的相同步[10];张廷宪等研究了耦合非线性振子系统的相同步[15];郝建红等研究了在两个周期振子耦合作用下的 Rössler 系统的相同步问题[16].本文在上述研究的基础上,基于非线性状态观测器理论和极点配置技术,实现了自治混沌系统的相位同步.数值模拟进一步证明了所提方法的有效性.

2.相位定义及同步观测器的设计

2.1.相位定义

对于一类自治系统 $\dot{x}=F(x)$,设 $s_1(t)$ 和 $s_2(t)$ 为其任意两个状态变量,假设平面 s_1-s_2 上的混沌吸引子只有一个旋转中心,则系统的相位可以定义为

$$\phi(t)=\arctan\frac{s_1(t)-s_{1c}}{s_2(t)-s_{2c}}, \tag{1}$$

这里点 (s_{1c},s_{2c}) 位于旋转中心内.

设 ϕ_1 和 ϕ_2 分别为两个混沌系统的相位,若 $\Delta\phi=|\phi_1-\phi_2|<2\pi$,则两个系统获得了相位同步.

2.2.观测器的设计

考虑如下混沌系统:

$$\dot{x}=Ax+Bf(x)+C, \tag{2}$$

这里 $x\in R^n$ 为系统的状态矢量,$A\in R^{n\times n}$,$B\in R^{n\times m}$,$C\in R^n$,$f:R^n\to R^m$ 是非线性向量函数.

假设系统(2)的输出为

$$s(x)=f(x)+Kx, \tag{3}$$

这里 $K\in R^{m\times n}$ 为反馈增益矩阵.

定义观测器

$$\dot{\hat{x}}=A\hat{x}+Bf(\hat{x})+C+B[s(x)-s(\hat{x})]. \tag{4}$$

* 国家自然科学基金(批准号:60573172)和辽宁省教育厅高等学校科学技术研究计划(批准号:20040081)资助的课题.
† 通讯联系人.E-mail:wangxy@dlut.edu.cn

定义系统(2)和系统(4)的同步误差为 $e(t)=x-\hat{x}$，则误差动力系统可表示为

$$
\begin{aligned}
\dot{e} &= \dot{x}-\dot{\hat{x}}\\
&= Ae + Bf(x) - Bf(\hat{x}) - B[s(x)-s(\hat{x})]\\
&= (A-BK)e.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

为了使系统(5)可控，需要适当地选取反馈增益矩阵 K. 由文献[10]的研究结果可知，当误差动力系统(5)的特征值出现为零和负值时，系统(2)和系统(4)达到稳定的相位同步. 另外，若可控矩阵 $[B, AB, \cdots, A^{n-1}B]$ 是满秩的，则系统(4)为系统(2)的全局观测器. 因此可以使用极点配置技术[17]，通过随意选定矩阵 $(A-BK)$ 的特征值来确定反馈增益矩阵 K.

3. 一种新混沌系统模型

考虑如下三维自治系统[18]：

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= -\frac{ab}{a+b}x - yz + c,\\
\dot{y} &= ay + xz,\\
\dot{z} &= bz + xy,
\end{aligned}
\tag{6}
$$

这里 a, b, c 为实常数. 系统(6)在较大的参数范围内表现出混沌特性[18]. 例如，当 $a=-10, b=-4, |c|<19.2$ 时，系统(6)为混沌的. 图 1 给出了当 $a=-10, b=-4, c=18.1$ 时的混沌吸引子. 图 2 给出了该混沌吸引子在三个坐标平面内的投影. 从图 2 中可以看出，系统(6)在各平面的混沌吸引子只有一个旋转中心.

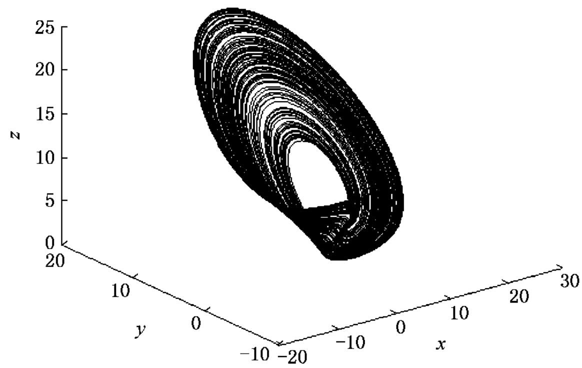

图 1　混沌吸引子

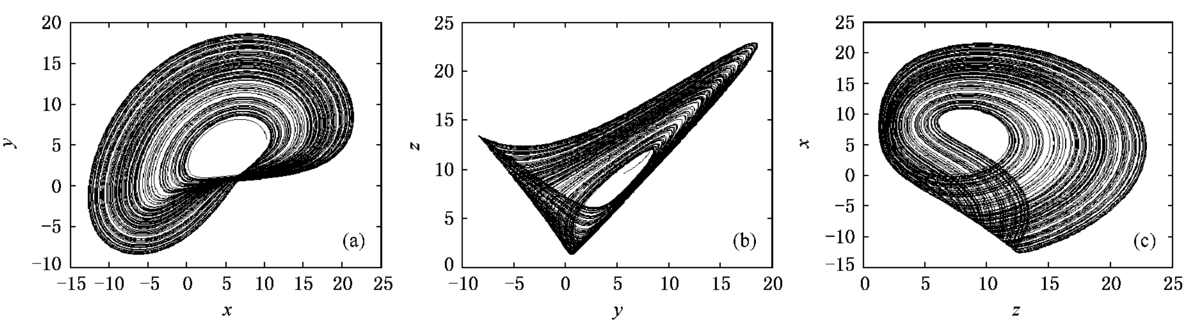

图 2　混沌吸引子在各平面的投影　(a)平面 x-y 上的混沌吸引子；(b)平面 y-z 上的混沌吸引子；(c)平面 z-x 上的混沌吸引子

4. 数值模拟

将系统(6)改写为(2)式的形式，可得

$$
\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{bmatrix}
=\begin{bmatrix}-\frac{ab}{a+b} & 0 & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & b\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}
+\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}yz\\ xz\\ xy\end{bmatrix}
+\begin{bmatrix}c\\ 0\\ 0\end{bmatrix}.
\tag{7}
$$

将(7)式与(2)式对比，可知

$$
A=\begin{bmatrix}-\frac{ab}{a+b} & 0 & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & b\end{bmatrix},
$$

$$
B=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.
$$

选择系统(7)的输出为 $s(x)=f(x)+Kx$，可得到系统(7)的观测器为

$$
\begin{bmatrix}\dot{\hat{x}}\\ \dot{\hat{y}}\\ \dot{\hat{z}}\end{bmatrix}
=\begin{bmatrix}-\frac{ab}{a+b} & 0 & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & b\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}\hat{x}\\ \hat{y}\\ \hat{z}\end{bmatrix}
$$

$$+\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{y}\hat{z}\\\hat{x}\hat{z}\\\hat{x}\tilde{y}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}c\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{s}(\hat{\boldsymbol{x}})). \tag{8}$$

定义误差 $\boldsymbol{e}=\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}$，则误差系统为

$$\begin{bmatrix}\dot{e}_1\\\dot{e}_2\\\dot{e}_3\end{bmatrix}=\left(\begin{bmatrix}-\frac{ab}{a+b}&0&0\\0&a&0\\0&0&b\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{K}\right)\begin{bmatrix}e_1\\e_2\\e_3\end{bmatrix}. \tag{9}$$

由于矩阵$[\boldsymbol{B},\boldsymbol{AB},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}]$是满秩的，因此系统(8)为系统(7)的全局观测器，可以通过极点配置技术得到反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K}$.

采用四阶 Runge-Kutta 法求解方程(7)和(8)，选取时间步长 $\Delta t=0.001$(s). 在计算过程中，选取系统(7)和系统(8)的初值分别为$(x(0),y(0),z(0))=(1.0,1.0,1.0)$和$(\hat{x}(0),\hat{y}(0),\hat{z}(0))=(3.0,0.5,2.0)$，则误差系统(9)的初值为$(e_1(0),e_2(0),e_3(0))=(-2.0,0.5,-1.0)$. 选取系统参数为 $a=-10$，$b=-4$，$c=18.1$. 选取误差系统(9)中$(A-BK)$的特征值为非正数. 以下给出了不同特征值时的数值模拟结果.

4.1.$(A-BK)$有一个零特征值和两个负特征值

选取$(A-BK)$的特征值为$[0\ \ -1\ \ -1]$时，系统(7)和系统(8)的相同步模拟结果如图 3 所示. 由图 3 可见，$x(t)$与 $\hat{x}(t)$获得了相同步，它们的振幅之间互不相关；$y(t)$与 $\hat{y}(t)$以及 $z(t)$与 $\hat{z}(t)$分别处于同一轨线上，获得了完全同步. 从误差效果图 4 可以看出，相同步时，$e_1(t)$最终稳定在常数值 -2.0058，$e_2(t)$和 $e_3(t)$分别稳定到零值. 图 5 给出了系统(7)和系统(8)在 x-y 平面上的相位差图. 从图 5 可以看出，当 t 大于 2.1(s)时，相位差小于 2π，这表明系统(7)和系统(8)获得了相同步.

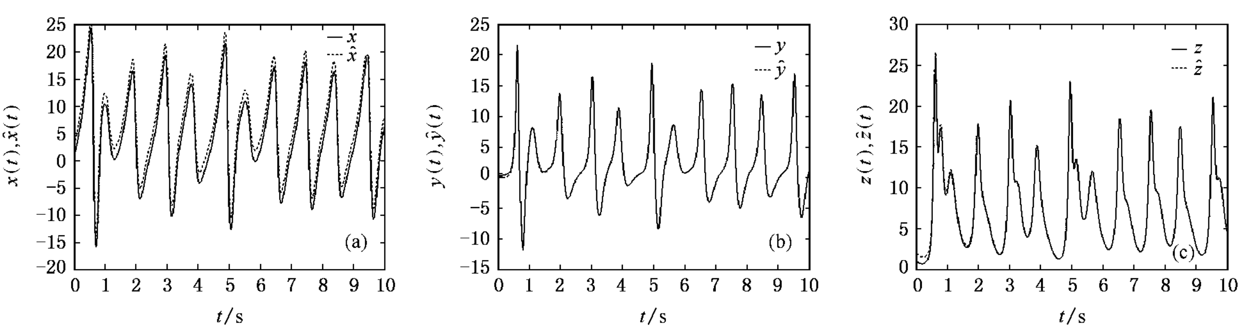

图 3 特征值为$[0\ \ -1\ \ -1]$时的相同步过程 (a) $x(t)$，$\hat{x}(t)$的响应曲线；(b) $y(t)$，$\hat{y}(t)$的响应曲线；(c) $z(t)$，$\hat{z}(t)$的响应曲线

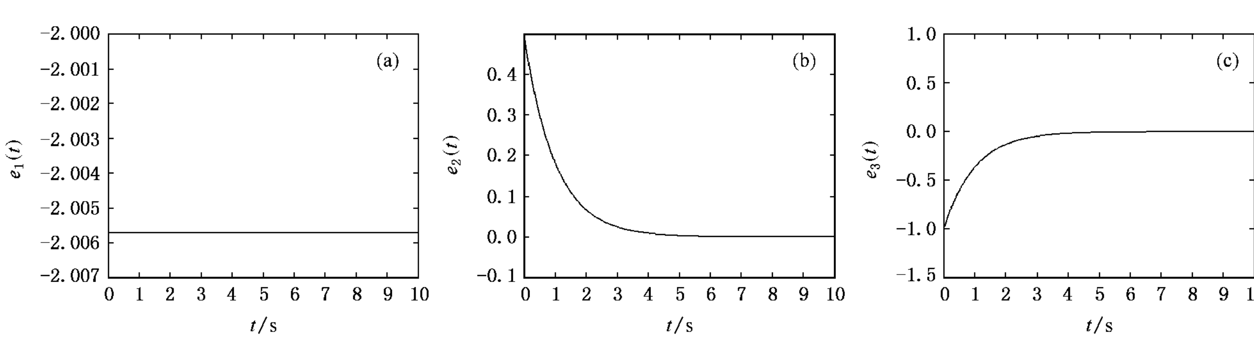

图 4 特征值为$[0\ \ -1\ \ -1]$时的相同步误差曲线 (a) $e_1(t)$的响应曲线；(b) $e_2(t)$的响应曲线；(c) $e_3(t)$的响应曲线

选取$(A-BK)$的特征值为$[-1\ \ \ 0\ \ -1]$时，$y(t)$与 $\hat{y}(t)$获得了相同步，振幅之间互不相关；$x(t)$与 $\hat{x}(t)$以及 $z(t)$与 $\hat{z}(t)$分别获得了完全同步. 系统(7)与系统(8)的相同步模拟结果如图 6 所

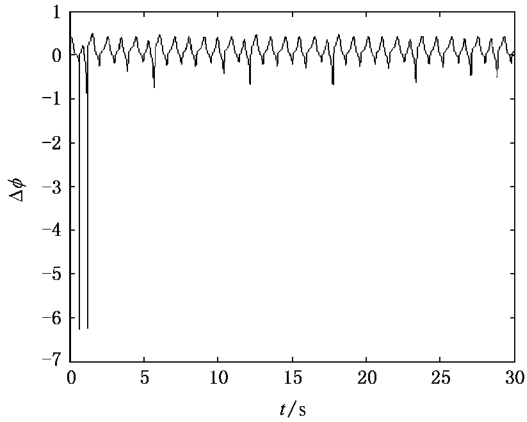

图 5　特征值为[0　-1　-1]时的相位差

从误差效果图 7 可以看出，相同步时，$e_2(t)$最终稳定到常数值 0.495，$e_1(t)$和 $e_3(t)$分别稳定到零值．图 8 给出了此时 y-z 平面上的相位差图．从图 8 可以看出，当 t 大于 4.3(s)时，相位差小于 2π，系统(7)和系统(8)获得了相同步．

选取$(A-BK)$的特征值为[-1　-1 0]时，$z(t)$与 $\hat{z}(t)$获得了相同步，振幅之间互不相关；$x(t)$与 $\hat{x}(t)$以及 $y(t)$与 $\hat{y}(t)$分别获得了完全同步．系统(7)与系统(8)的相同步模拟结果如图 9 所示．从误差效果图 10 可以看出，相同步时，$e_3(t)$最终稳定到一个常数值 -0.996，$e_1(t)$和 $e_2(t)$分别稳定到零值．图 11 给出了此时 z-x 平面上的相位差图．从图 11 可以看出，当 t 大于 5.8(s)时，相位差小于 2π，系统(7)和系统(8)获得了相同步．

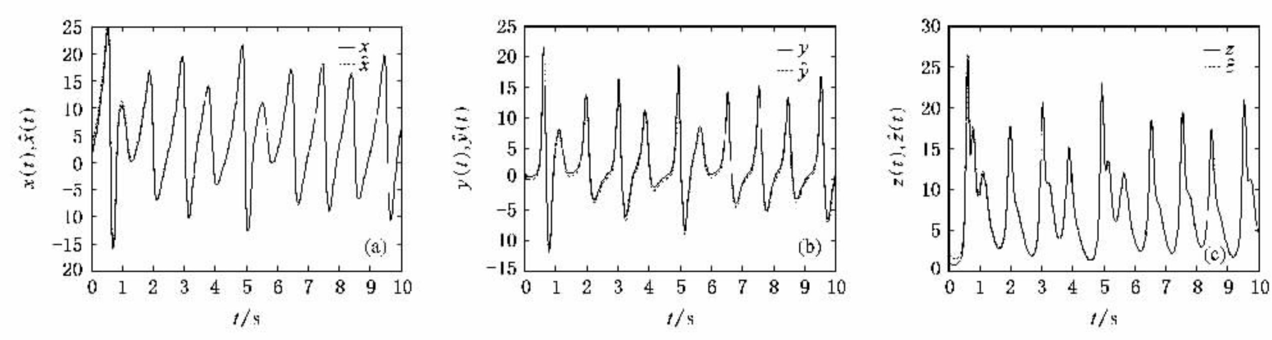

图 6　特征值为[-1　0　-1]时的相同步过程　(a) $x(t)$，$\hat{x}(t)$的响应曲线；(b) $y(t)$，$\hat{y}(t)$的响应曲线；(c) $z(t)$，$\hat{z}(t)$的响应曲线

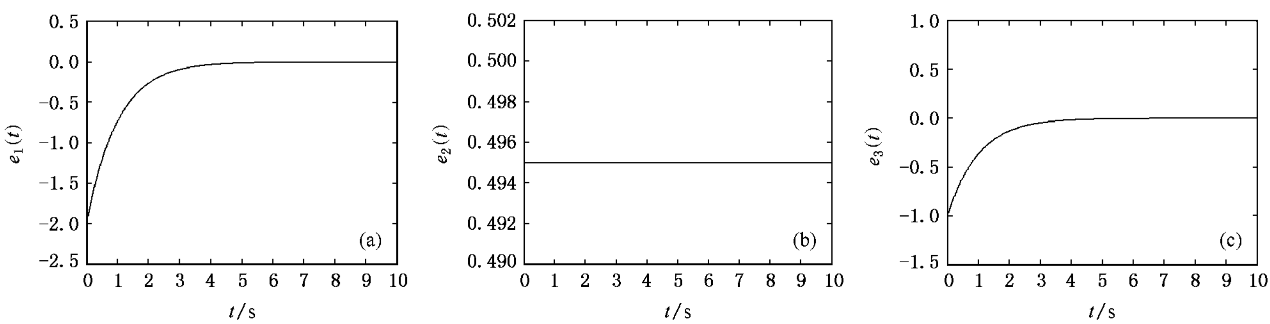

图 7　特征值为[-1　0　-1]时的相同步误差曲线　(a) $e_1(t)$的响应曲线；(b) $e_2(t)$的响应曲线；(c) $e_3(t)$的响应曲线

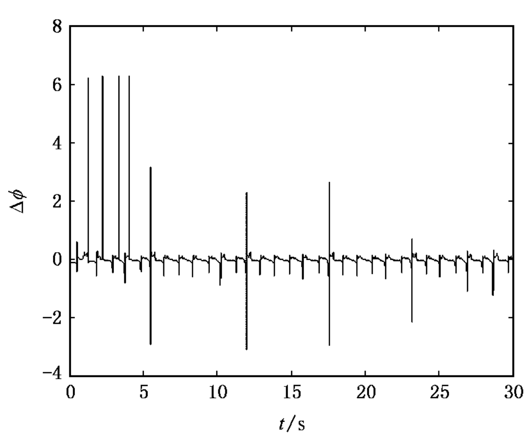

图 8　特征值为[-1　0　-1]时的相位差

4.2.$(A-BK)$有两个零特征值和一个负特征值

选取$(A-BK)$的特征值为[0 0　-2]时，由系统(7)和系统(8)的相同步模拟结果图 12 可见，$x(t)$与 $\hat{x}(t)$以及 $y(t)$与 $\hat{y}(t)$分别获得了相同步，它们的振幅之间互不相关；$z(t)$与 $\hat{z}(t)$处于同一轨线上，获得了完全同步．由误差效果图 13 可见，相同步时，$e_1(t)$和 $e_2(t)$分别稳定在常数值 -2.0058 和 0.495，$e_3(t)$稳定到零值．图 14 给出了系统(7)和系统(8)在 z-x 平面和 y-z 平面上的相位差图．从图

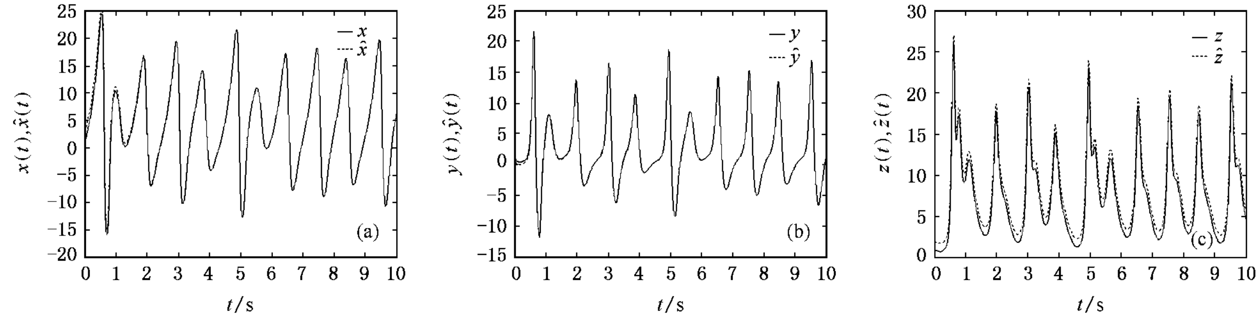

图 9 特征值为[−1 −1 0]时的相同步过程 (a) $x(t)$, $\hat{x}(t)$的响应曲线;(b) $y(t)$, $\hat{y}(t)$的响应曲线;(c) $z(t)$, $\hat{z}(t)$的响应曲线

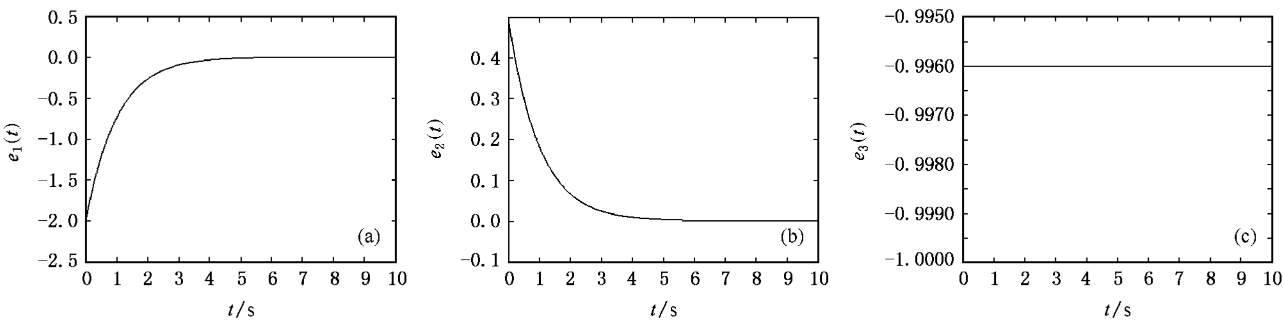

图 10 特征值为[−1 −1 0]时的相同步误差曲线 (a) $e_1(t)$的响应曲线;(b) $e_2(t)$的响应曲线;(c) $e_3(t)$的响应曲线

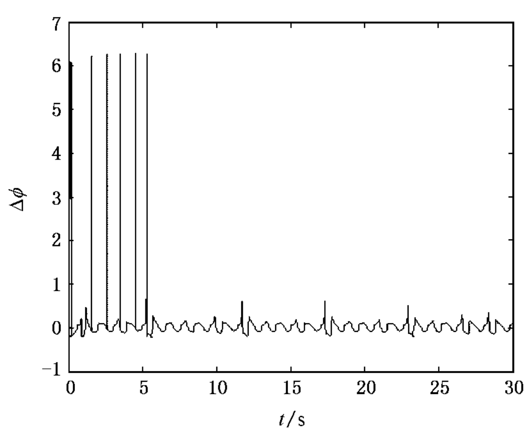

图 11 特征值为[−1 −1 0]时的相位差

14 可以看出,经过一段时间之后,相位差 $\Delta\phi$ 稳定在$[0,2\pi]$内,这表明系统(7)和系统(8)获得了相同步.

同理,当选取$(A - BK)$的特征值为$[-2\ 0\ 0]$时,数值模拟结果表明:$y(t)$与$\hat{y}(t)$以及$z(t)$与$\hat{z}(t)$分别获得相同步,$x(t)$与$\hat{x}(t)$获得完全同步;此时,$e_2(t)$和$e_3(t)$分别稳定到常数值,$e_1(t)$稳定于零值;且相同步时,相位差 $\Delta\phi$ 稳定在$[0,2\pi]$内.当选取$(A - BK)$的特征值为$[0\ -2\ 0]$时,数值模拟结果亦表明:$x(t)$与$\hat{x}(t)$以及$z(t)$与$\hat{z}(t)$分别获得了相同步,$y(t)$与$\hat{y}(t)$获得了完全同步;此时,$e_1(t)$和$e_3(t)$分别稳定在常数值,$e_2(t)$稳定到零值;且达到相同步时,相位差 $\Delta\phi$ 稳定在$[0,2\pi]$内.

另外,对比 4.1 与 4.2 中的误差效果图可以看出,$(A - BK)$中负特征根的绝对值越大,同步误差收敛的速度越快.

5. 结 论

1.本文研究了一类自治混沌系统的相同步问题.基于状态观测器方法和极点配置技术,给出了一类自治混沌系统的相同步方法.适当地选取误差系统的特征值,可以实现系统的相同步.数值模拟进一步验证了本文方案的有效性.

2.本文方案易于实现,且可通过极点配置技术调整误差系统的特征值,进而调整误差的收敛速率.所设计的控制器适用于其他混沌系统之间的相同步研究,且可进一步推广到含有更多状态变量的混沌系统之间的相同步.

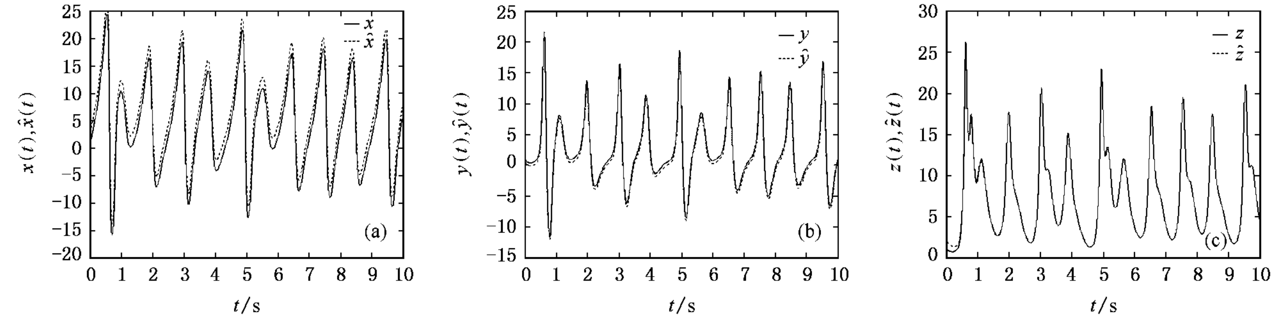

图 12　特征值为[0 0 −2]时的相同步过程　(a) $x(t)$，$\hat{x}(t)$的响应曲线；(b) $y(t)$，$\hat{y}(t)$的响应曲线；(c) $z(t)$，$\hat{z}(t)$的响应曲线

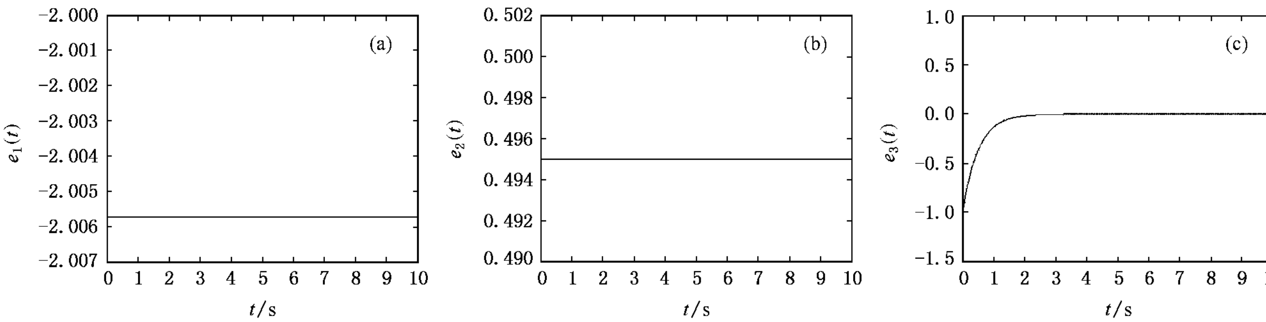

图 13　特征值为[0 0 −2]时的相同步误差曲线　(a) $e_1(t)$的响应曲线；(b) $e_2(t)$的响应曲线；(c) $e_3(t)$的响应曲线

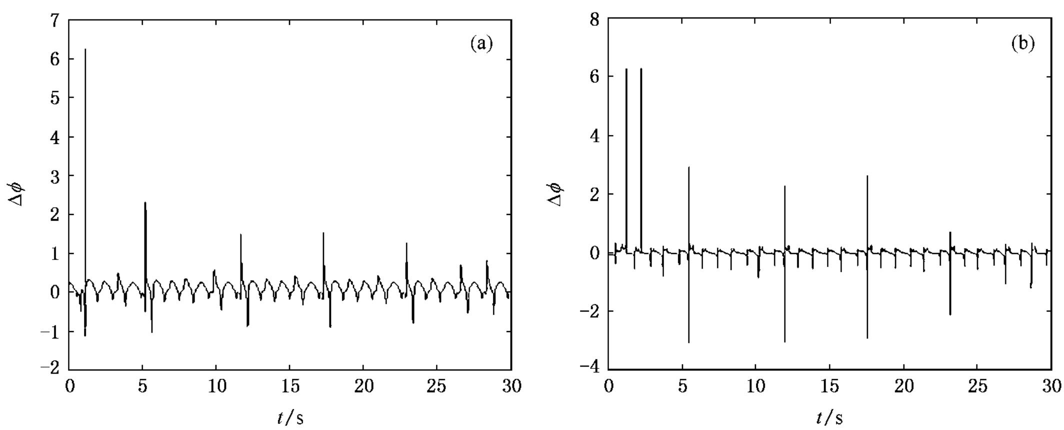

图 14　特征值为[0 0 −2]时的相位差　(a) z-x 平面相位差；(b) y-z 平面相位差

[1] Pecora L M，Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821

[2] Wang X Y 2003 *Chaos in the Complex Nonlinearity System* (Beijing: Electronics Industry Press) chapt. 2 (in Chinese) [王兴元 2003 复杂非线性系统中的混沌(北京:电子工业出版社)第二章]

[3] Guan X P，Fan Z P，Chen C L，Hua C C 2002 *Chaotic Control and its Application on Secure Communication* (Beijing: National Defence Industry Press) chapt. 9 (in Chinese) [关新平、范正平、陈彩莲、华长春 2002 混沌控制及其在保密通信中的应用(北京:国防工业出版社)第九章]

[4] Sundar S，Minai A A 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 5456

[5] Feki M 2003 *Chaos，Solitons Fract.* **18** 141

[6] Wang X Y，Wu X J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5077 (in Chinese) [王兴元、武相军 2006 物理学报 **55** 5077]

[7] Yang S S，Duan C K 1998 *Chaos，Solitons Fract.* **9** 1703

[8] Wang Y W，Guan Z H 2006 *Chaos，Solitons Fract.* **27** 97

[9] Michael G R，Arkady S P，Jurgen K 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 1804

[10] Ho M C，Hung Y C，Chou C H 2002 *Phys. Lett.* A **296** 43

[11] Li C D，Liao X F，Wong D W 2005 *Chaos，Solitons Fract.* **23** 183

[12] Zhang Y，Sun J 2004 *Phys. Lett.* A **330** 442

[13] Shuai J W, Durand D M 1999 *Phys. Lett.* A **264** 289
[14] Schafer C, Rosenblum M G, Abel H H, Kurths J 1999 *Phys. Rev.* E **60** 857
[15] Zhang T X, Zheng Z G 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3287 (in Chinese) [张廷宪、郑志刚 2004 物理学报 **53** 3287]
[16] Hao J H, Li W 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3491 (in Chinese) [郝建红、李 伟 2005 物理学报 **54** 3491]
[17] Paraskevopoulos P N 2002 *Modern control engineering* (New York: Marcel Dekker) chapt. 3
[18] Lü J H, Chen G R, Cheng D Z 2004 *Int. J. Bifur. Chaos* **14** 1507

Phase synchronization of chaotic systems based on nonlinear observers*

Meng Juan Wang Xing-Yuan†
(*School of Electronic & Information Engineering, Dalian University of Technology, Dalian* 116024, *China*)
(Received 7 November 2006; revised manuscript received 15 December 2006)

Abstract

The phase synchronization problem of autonomous chaotic systems is discussod. Based on the nonlinear state observer algorithm and the pole placement technique, a phase synchronization scheme is designed. The phase synchronization of a new chaotic system is achieved by using this observer controller. Numerical simulations are carried out to verify its effectiveness.

Keywords: chaos, phase synchronization, the nonlinear state observer, the pole placement technique
PACC: 0545, 0555

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60573172) and the Superior University Science Technology Research Project of Liaoning Province (Grant No. 20040081).
† Corresponding author. E-mail: wangxy@dlut.edu.cn