

# 电偶极子源定位问题的研究<sup>\*</sup>

吴重庆<sup>†</sup> 赵 爽

(发光与光信息技术教育部重点实验室,北京交通大学理学院光信息科学与技术研究所,北京 100044)

(2006 年 10 月 24 日收到 2006 年 11 月 8 日收到修改稿)

首先得到了封闭形式的电偶极子处于任意位置时电场分布的公式,它是一个线性变换,称其变换矩阵为传递矩阵,并给出了传递矩阵的具体表达式和许多有用的性质,得到了传递矩阵的逆矩阵,导出了利用电场分布来确定单个或者多个偶极子源位置矢量和电偶极矩矢量的公式.对单个偶极子源的计算表明,如果测得两点的电场分布相同,就可以确定偶极子处于它们连线的中点上.

关键词:电偶极子,传递矩阵,电场分布,定位问题

PACC: 1110, 4100, 8770

## 1. 引 言

电偶极子是生物研究中经常用到的模型.目前认为,在大脑中,脑神经元的兴奋伴随着电流的产生,伴随脑内神经元的兴奋而产生的兴奋性突触后电位(EPSP)是产生能被记录到的脑电活动基础. EPSP 电流在突触处的  $\text{Na}^+$  从细胞外流向细胞内时,称为电穴(sink).按细胞电流分布原理,在此神经细胞附近的树突上便有一同等大小的电流从细胞内进入细胞外液中,此处称为电源(source).细胞内液体是一导体,细胞膜类似一个电容器,因此一对具有相同强度、电荷相反的电穴和电源便构成了一对电偶极子.这些偶极子在脑皮层形成了一定的电场分布,最终能提供它所代表的脑组织的活动信息<sup>[1-3]</sup>.人们可以通过测量脑球体外的电场分布来确定脑电荷偶极子的位置和方向.从头皮脑电分布推算脑电活动源的脑电偶极子源定位问题的研究,对于脑认知功能的研究有重要的科学意义和临床应用价值<sup>[4,5]</sup>.在我们生活的空间,偶极子无处不在.因此,通过测定电偶极子形成的电场来确定电偶极子的分布,即解决电偶极子源定位问题,是一件十分重要的工作.

目前对偶极子源定位问题的研究,主要集中在模型的选择<sup>[6]</sup>、偶极子源定位的方法及源定位精确性等前沿课题.在这些模型中,单偶极子模型是一种

重要模型.而定位方法常采用有限元法、单纯型法等数值计算方法<sup>[7,8]</sup>.对于数据处理,也提出了许多方法,其中 Kamousi 提出了包括表面拉普拉斯滤波(surface Laplacian filtering),时域频域分析(time frequency analysis),噪声归一化(noise normalization),以及独立分量分析(independent component analysis)等计算方法<sup>[9]</sup>.这些方法已经在医学临床方面得到了应用<sup>[5]</sup>.但这些方法都是基于电位的,基于电场矢量模型的方法几乎没有见到.

根据库仑定律,不难求出处于坐标原点偶极子产生的场分布为<sup>[10]</sup>

$$E(r, \theta) = \frac{p_0}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2\cos\theta\hat{e}_r + \sin\theta\hat{e}_\varphi), \quad (1)$$

其中  $p_0$  为电偶极矩  $\mathbf{p}_0$  的大小,  $\hat{e}_r$  是偶极子到观测点  $A$  连线方向的单位矢量,  $\hat{e}_\varphi$  为垂直于  $\hat{e}_r$  方向的单位矢量,  $\theta$  为  $\mathbf{p}_0$  与  $\hat{e}_r$  的夹角(参见图 1).

对(1)式研究发现,利用它来求偶极子的位置是很困难的.因为该公式首先是假定了偶极子处于坐标原点,即使对它进行坐标修正,由于我们无法知道偶极子所处位置与观测点的连线,因此无法得到  $\cos\theta$ ,  $\sin\theta$ , 以及  $\hat{e}_r$  和  $\hat{e}_\varphi$  等信息.(1)式也不是  $E = f(\mathbf{p})$  的封闭形式,不能够直接求解出  $\mathbf{p} = f^{-1}(E)$ , 因此有必要对(1)式进行变形,并从中找出求解偶极子位置的方法.

本文首先得到了  $E = f(\mathbf{p})$  的封闭形式,它可以

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号: 60577020)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: cqwu@bjtu.edu.cn

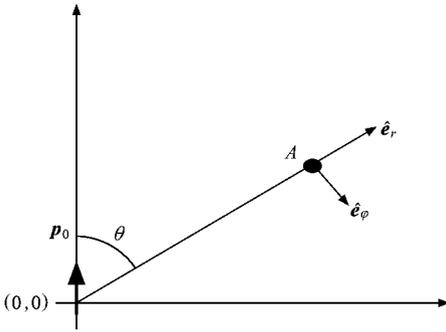


图1 偶极子的场

用一个线性变换表示,我们称这个变换矩阵为传递矩阵.然后,我们证明这个矩阵是满秩的,因此存在逆矩阵,从而得到了  $p = f^{-1}(E)$  的封闭形式.最后,我们利用这个理论公式,具体求解了几个不同场分布的偶极子位置.

## 2. 电偶极子在坐标原点时的传递矩阵

将图1中的  $p_0$  分解到  $\hat{e}_r, \hat{e}_\varphi$  两个方向,得到

$$p_0 = p_0 \cos\theta \hat{e}_r - p_0 \sin\theta \hat{e}_\varphi. \quad (2)$$

将(2)式代入(1)式得

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} [3p_0 \cos\theta \hat{e}_r - p_0]. \quad (3)$$

由于  $p_0 \cos\theta = p_0 \cdot \hat{e}_r$ , 于是

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} [2\hat{e}_r \hat{e}_r - I] p_0, \quad (4)$$

设  $M = 3\hat{e}_r \hat{e}_r - I$  则

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} M p_0. \quad (5)$$

由(5)式可以得到下面3个结论:

1) 其电场强度与偶极子矩  $p_0$  成线性关系,即不仅与  $p_0$  成正比,而且其方向是  $p_0$  方向的旋转,旋转角度与  $p_0$  无关,这是从(1)式不能直观看出的.

2) 对于给定的观测点,矩阵  $M$  是一个确定的对

称矩阵,它仅是从偶极子到观测点连线方向  $\hat{e}_r$  的函数.这表明,沿着  $\hat{e}_r$  方向的空间各点,它们具有相同  $M$  矩阵.也就是说,沿着  $\hat{e}_r$  方向的空间各点电场方向相同.

3) 处于同一个位置的多个偶极子  $p_i$  对所产生的电场满足叠加原理,即它们的合成场等于偶极子叠加形成的总偶极子的场

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} M P, \quad (6)$$

其中  $P = \sum_i p_i$  是多个偶极矩叠加后的总偶极矩.

由(6)式可以看出,只要知道矩阵  $M$ , 就可以容易得到偶极子所产生的电场的大小及方向.而且,矩阵  $M$  与偶极子  $p_i$  的大小和方向均无关,因此它可以作为一个描述偶极子场与源关系的量,我们称之为偶极子场的传递矩阵.对于观测点  $r(x, y, z)$  其具体形式为

$$M = \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} 3x^2 - r^2 & 3xy & 3xz \\ 3yx & 3y^2 - r^2 & 3yz \\ 3zx & 3zy & 3z^2 - r^2 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

传递矩阵  $M$  具有如下性质:

1) 对称性

由(7)式可以看出  $M = M^T$ , 说明  $M$  是对称矩阵.

2) 相对于原点的对称性

$$M(x, y, z) = M(-x, -y, -z).$$

说明相对于坐标原点对称的两点场强相同.

3) 行列式的值是常数2

$$|M| = \left| \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} 3x^2 - r^2 & 3xy & 3xz \\ 3yx & 3y^2 - r^2 & 3yz \\ 3zx & 3zy & 3z^2 - r^2 \end{pmatrix} \right| = 2. \quad (8)$$

4) 传递矩阵  $M$  的逆矩阵

因为矩阵  $M$  行列式的值为  $\chi (r \neq 0)$ , 所以它存在逆矩阵,经过简单运算得到

$$M^{-1} = \frac{2}{r^2} \begin{pmatrix} -(3y^2 + 3z^2 - r^2) & 3xy & 3xz \\ 3xy & -(3x^2 + 3z^2 - r^2) & 3yz \\ 3xz & 3yz & -(3x^2 + 3y^2 - r^2) \end{pmatrix}. \quad (9)$$

用  $M^{-1}$  左乘(6)式的左右两边得

$$p_0 = 4\pi\epsilon_0 r^3 M^{-1}(r) E(r). \quad (10)$$

(10)式是用电场的分布计算偶极子的表达式,它表明,通过测量空间电场的大小及方向可以确定电偶

极子的偶极矩.

### 5) 特征值和特征向量

对于矩阵, 可以写出下面的形式:

$$M p_i = \lambda p_i. \quad (11)$$

通过计算得出  $M$  的特征值为  $\lambda = -1, 2$ . 所对应的特征向量分别为

$$p_1 = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, p_2 = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ x \end{pmatrix}, p_3 = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (12)$$

可以得出  $p_1, p_2$  与  $\hat{e}_r$  垂直, 而  $p_3$  与  $\hat{e}_r$  平行,  $p_1, p_2$  均与  $\hat{e}_r$  正交, 但是  $p_1, p_2$  不正交. 特征向量的物理意义在于: 如果  $p_0$  等于上述特征矢量, 那么在  $\hat{e}_r$  这个方向上的电场不会旋转.

比如, 当  $p_0$  取  $p_1, p_2$  时, 电场为

$$E = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0 r^3} p_0, \quad (13)$$

当  $p_0$  取  $p_3$  时, 电场为

$$E = \frac{2}{4\pi\epsilon_0 r^3} p_0. \quad (14)$$

值得注意的是, 由于  $x, y, z$  取值不同, 特征向量  $p_1, p_2, p_3$  并不是确定的.

## 3. 任意位置偶极子场的传递矩阵

假定偶极子不在坐标原点, 而处于空间任意一点  $r_0$ , 如图 2.

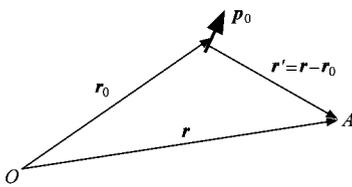


图 2 偶极子不在坐标原点

在这时 (3) 式中的  $\hat{e}_r$  应换为  $\hat{e}_{r'}$ , 因为  $r' = r - r_0$ ,  $\hat{e}_{r'} = r'/r$ , 代入 (3) 式得到

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r'^3} \left[ \frac{3}{r'^2} (\mathbf{r}\mathbf{r} + r_0 r_0 - \mathbf{r}r_0 - r_0 \mathbf{r}) - \mathbf{I} \right] p_0, \quad (15)$$

式中的四项并矢均可写成矩阵的形式

$$\mathbf{r}\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{r}_0 \mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0^2 & x_0 y_0 & x_0 z_0 \\ x_0 y_0 & y_0^2 & y_0 z_0 \\ x_0 z_0 & y_0 z_0 & z_0^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{r}\mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} x x_0 & x y_0 & x z_0 \\ y x_0 & y y_0 & y z_0 \\ z x_0 & z y_0 & z z_0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{r}_0 \mathbf{r} = \begin{pmatrix} x_0 x & x_0 y & x_0 z \\ y_0 x & y_0 y & y_0 z \\ z_0 x & z_0 y & z_0 z \end{pmatrix}. \quad (16)$$

定义  $M = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r'^3} \left[ \frac{3}{r'^2} (\mathbf{r}\mathbf{r} + r_0 r_0 - \mathbf{r}\mathbf{r}_0 - r_0 \mathbf{r}) - \mathbf{I} \right]$ , 同样可以得到

$$E = M(\mathbf{r}, r_0) p_0. \quad (17)$$

可以看到 (5) 式是 (17) 式中  $r_0 = 0$  的特殊情况. 由 (17) 式, 我们可以得出位于坐标系中任意一点的偶极子所产生的电场. 同样, 我们可以得到

$$p_0 = M^{-1}(\mathbf{r}, r_0) E(\mathbf{r}), \quad (18)$$

而且 (18) 式也是满足叠加原理的

$$E = \sum_i M(\mathbf{r}, r_i) p_i. \quad (19)$$

## 4. 空间中单个电偶极子位置的确定

利用 (18) 式, 我们可以得到空间中的单个偶极子的位置大小及方向. 设两个观测点为  $A, B$ , 取  $A, B$  连线的中点为坐标原点, 如图 3 所示.

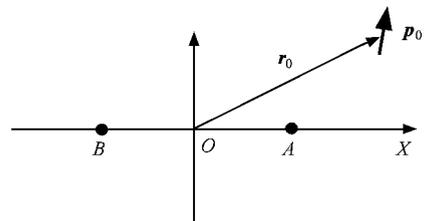


图 3 计算偶极子的位置

假设  $A, B$  两点的坐标为  $r_A(a, 0, 0)$  和  $r_B(-a, 0, 0)$ ,  $AB$  的长度为  $2a$ ;  $A, B$  两点的电场强度分别为  $E_A, E_B$ . 此处  $a, E_A, E_B$  均是可测量的量, 为已知数.

我们的任务是求出偶极子  $p_0$  的坐标  $r_0(x, y, z)$  和  $p_0 = [p_x, p_y, p_z]^T$  等六个未知数.

利用 (17) 式, 可以得到如下关系式:

$$E_A = A M_A p, \quad (20)$$

$$E_B = BM_B p, \quad (21)$$

$$\text{其中 } A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_A^5}, B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_B^5},$$

$$r_A^2 = (x - a)^2 + y^2 + z^2,$$

$$r_B^2 = (x + a)^2 + y^2 + z^2.$$

我们假定电偶极子不处于两个观测点的任何一个, 从而  $r_A \neq 0, r_B \neq 0$ ,

$$M_A = \begin{pmatrix} 3(x - a)^2 - r_A^2 & 3y(x - a) & 3z(x - a) \\ 3y(x - a) & 3y^2 - r_A^2 & 3yz \\ 3z(x - a) & 3yz & 3z^2 - r_A^2 \end{pmatrix},$$

$$M_B = \begin{pmatrix} 3(x + a)^2 - r_B^2 & 3y(x + a) & 3z(x + a) \\ 3y(x + a) & 3y^2 - r_B^2 & 3yz \\ 3z(x + a) & 3yz & 3z^2 - r_B^2 \end{pmatrix},$$

因此由(20)与(21)式得到

$$BM_B E_A = AM_A E_B. \quad (22)$$

方程(22)是仅含有  $x, y, z$  三个未知数的矩阵方程, 通过解此方程可以确定电偶极子的位置  $r_0(x, y, z)$ . 再将  $r_0(x, y, z)$  代入方程(18), 可求出偶极矩  $p_0$ .

**例 1** 如果测得  $E_A = E_B = E_0$ , 代入(22)式, 解方程得

$$r_0(x, y, z) = 0,$$

说明电偶极子处在 AB 连线的中点. 可以写出  $M_A, M_B$  的表达式

$$M_A = M_B = \begin{pmatrix} 2a^2 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 \end{pmatrix}, \quad (23)$$

将(23)式代入(20)和(21)式得

$$E_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a^5} \begin{pmatrix} 2a^2 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 \end{pmatrix} p_0, \quad (24)$$

可以解出

$$p_0 = 2\pi\epsilon_0 a^3 \begin{pmatrix} E_{0x} \\ -2E_{0y} \\ -2E_{0z} \end{pmatrix}. \quad (25)$$

例 1 的结果说明, 只要我们测的两点的电场相等, 我们就可以轻而易举的确定偶极子的位置和大小.

**例 2** 如果测得  $E_A = [E, 3E, 0]^T, E_B = [E, -3E, 0]^T$  将其代入方程(22), 可得到

$$r_0(x, y, z) = (0, a, 0),$$

$$p_0 = [8\pi\epsilon_0 a^3 E, 0, 0]^T,$$

这说明电偶极子处于 AB 连线的中垂线上距 AB 为  $a$  的位置,  $p_0$  的方向与 AB 垂直, 大小为  $8\pi\epsilon_0 a^3 E$ .

## 5. 多偶极子源定位问题

当空间中分布着  $N$  个电偶极子时, 为解决它们的定位问题, 必须要获得  $6N$  个参数, 也就是要获得  $2N$  个不同位置的电场强度. 为此, 我们以下标  $i$  和  $j$  表示观测点的序号, 以下标  $k$  表示电偶极子的序号, 由(19)式可得

$$E_i = \sum_{k=1}^N M_{ik}(r_i, r_k) p_k \quad (i = 1, \dots, N), \quad (26)$$

和

$$E_j = \sum_{k=1}^N M_{jk}(r_j, r_k) p_k \quad (j = 1, \dots, N). \quad (27)$$

以每个传递矩阵作为一个  $3N \times 3N$  大方阵的子矩阵, 即定义  $U = [M_{ik}]_{3N \times 3N}$  和  $V = [M_{jk}]_{3N \times 3N}$ , 并将  $E_i, E_j$  和  $p_k$  做成一个大的列向量, 分别写为  $E_U, E_V$  和  $P$ , 从而得到

$$E_U = UP \quad (28)$$

和

$$E_V = VP, \quad (29)$$

于是我们可以得到仅含有多个偶极子位置参数作为未知量的方程组

$$U^{-1} E_U = V^{-1} E_V. \quad (30)$$

解这个方程组, 即可确定偶极子源的位置分布, 然后用(22)式求逆, 即可得到各个点上的偶极子大小及方向. 具体求解可借助于计算机的数值计算方法.

## 6. 结 论

本文得到了封闭形式的电偶极子处于原点或者任意位置时产生的场的公式(17), 它是一个线性变换, 称这个变换矩阵为传递矩阵, 并给出了传递矩阵的具体表达式, 从而可以较为方便的得到空间中电偶极子所产生的电场. 本文对于传递矩阵进行了深入的研究, 得到了许多有用的性质. 同时, 本文得到了利用电场分布来确定偶极子位置和矢量的(18)和(24)式. 利用该公式, 可以解决单个偶极子源和多个偶极子源的定位问题. 对于许多基于偶极子理论的有机分子或者生物大分子, 我们能够根据它所形成的空间电场来分析它们的内部结构. 最后, 我们给出了 2 个计算实例. 对于单个偶极子源的计算表明, 如

果测得两点的电场相同,就可以简单地确定偶极子处于它们连线的中点上.这些工作,对于诸如从头皮脑电场分布推算脑电活动源和脑认知功能的研究十

分重要.在生物医学研究中有重要的科学意义和临床应用价值.

- [ 1 ] He B , Musha T , Okamoto Y 1987 *IEEE Trans on Biomedical Engineering* **34** 406
- [ 2 ] Salu Y , Cohen L G , Rose D 1990 *IEEE Trans on Biomedical Engineering* **37** 699
- [ 3 ] Cuffin B N 1995 *IEEE Trans on Biomedical Engineering* **42** 68
- [ 4 ] Zou L , Zhu A S , Zhang Y C 2003 *Foreign Medical Sciences ( Biomedical Engineering Fascicle )* **26** 103 ( in Chinese ) [ 邹 凌、朱善安、张迎春等 2003 国外医学生物医学工程分册 **26** 103 ]
- [ 5 ] Wan H M , Xu R X , Fang D X , Yuan H S 2006 *Chinese Journal of Neuromedicine* **5** 410 ( in Chinese ) [ 王焕明、徐如祥、方冬秀、袁辉胜 2006 中华神经医学杂志 **5** 410 ]
- [ 6 ] Xiao C Y , Lei Y Z 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1950 ( in Chinese ) [ 肖春燕、雷银照 2005 物理学报 **54** 1950 ]
- [ 7 ] Hara J , Musha T , Shankle W R 1999 *IEEE Trans. on Biomedical Engineering* **46** 125
- [ 8 ] Li Y , Li H , He R , Rao L , Wu Q , Xu G , Shen X , Yan W 2004 *Proceedings of 26th Annual Conference of the IEEE EMBS* 1903
- [ 9 ] Kamousi B , Liu Z , He B 2005 *IEEE Trans. on Neural Systems and Rehabilitation Engineering* **13** 166
- [ 10 ] Chen N Y 2001 *Electromagnetic field and electromagnetic wave theory fundamentals* ( China Railway Publishing House ) p38 ( in Chinese ) [ 陈乃云等 2001 电磁场与电磁波理论基础( 中国铁道出版社 )第 38 页 ]

## Study on the localization of the electric dipole sources \*

Wu Chong-Qing<sup>†</sup> Zhao Shuang

( Key Laboratory of Luminescence and Optical Information , Ministry of Education , School of Science , Beijing Jiaotong University , Institute of Optical Information , Beijing 100044 , China )

( Received 24 October 2006 ; revised manuscript received 8 November 2006 )

### Abstract

The research of dipole source localization has great significance in both clinical research and applications. For example , the EEG recording from the scalp is widely used for the localization of sources of electrical activity in the brain. This paper presents a closed formula that describes the electric field of dipoles at arbitrary position , which is a linear transformer called the transfer matrix. The expression of transfer matrix and its many useful characteristics are given , which can be used for the analysis of the electrical fields of dipoles. This paper also presents the closed formula for determining the location and magnitude of single dipole or multi-dipoles according to its electrical field distribution. A calculation result for a single dipole shows that the dipole will be located at the midpoint of a line segment if there are equivalent fields at its two ends.

**Keywords** : electric dipoles , transfer matrix , electric-field distribuion , localization

**PACC** : 1110 , 4100 , 8770

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 60577020 ).

<sup>†</sup> E-mail : cqwu@bjtu.edu.cn