

非等同双原子与双模腔场相互作用模型中 原子布居的时间演化*

朴红光^{1)†} 马晓萍¹⁾ 张 寿²⁾

1) 淮海工学院数理科学系, 连云港 222005)

2) 延边大学理学院物理系, 延吉 133002)

(2006 年 11 月 10 日收到, 2006 年 12 月 28 日收到修改稿)

研究了两个非等同二能级原子与双模腔场耦合系统中原子能级布居的时间演化规律, 并详细讨论了两个原子与双模腔场的相对耦合常数($R = g_1/g_2$)和腔场的初态对原子能级布居数反转的影响.

关键词: 双模腔场, 双原子体系, 原子布居

PACC: 4250

1. 引 言

Jaynes-Cummings 模型(JCM)^[1]是描述一个二能级原子与单模光场单光子相互作用的简单理想模型, 由于它在数学意义上严格精确可解, 不仅在量子光学中, 而且在激光物理、核磁共振、量子场论、量子信息、量子计算机等许多问题中都常被采用. 但由于标准 JCM 过于简单, 不足以描述整个量子光学领域中场-物质之间的各种相互作用问题. 因此人们对标准 JCM 进行了线性、非线性推广, 线性推广有非旋波近似下的 JCM^[2]、简并双光子与简并多光子 JCM^[3,4]、缀饰多光子 JCM^[5]、单(双)光子-单个三能级(多能级)原子 JCM^[6-11]等, 非线性推广有任意依赖强度耦合 JCM^[12]、Kerr 介质中的 JCM^[13]、任意依赖空间自由度耦合 JCM^[14]、依赖时间耦合 JCM^[15-18]、单个囚禁粒子 JCM^[19]、具有 Kerr 效应和 Stark 效应的 JCM^[20]等, 而且也向多模光场和多原子系统进行推广, 如 Tavis-Cummings 模型^[21]、单模光场-两偶极相关的等同二能级原子的相互作用模型^[22]、Kerr 介质对双模压缩真空场与四能级原子相互作用系统^[23]、双模光场-两偶极相关的等同二能级原子的相互作用模型^[24]、三模光场-两偶极相关的等同二能级原子的相互作用模型^[25]、多模光场-

多个二能级原子的相互作用模型^[26]等等, 并进行了进一步地深入研究. 近年来, 冯健等人提出了具有不同耦合常数($g_1 \neq g_2$)的两个原子与双模腔场相互作用模型^[27], 并研究了相对耦合常数($R = g_1/g_2$)对两原子自发辐射线型的特征, 张桂明等人研究了相对耦合常数($R = g_1/g_2$)对腔场谱的影响^[28]. 但对于原子量子特性的影响至今尚未见报道.

本文研究了具有不同耦合常数的两个原子与双模腔场相互作用模型中原子能级的布居情况, 并详细分析了相对耦合常数($R = g_1/g_2$)和腔场的初态对原子能级布居数反转的影响.

2. 模型与系统态矢

二能级原子与辐射场相互作用系统的哈密顿量可写为

$$H = H_A - \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_0), \quad (1)$$

其中 H_A 为描述二能级原子本身的能量算符, \mathbf{D} 为描述二能级原子的偶极矩算符, 其表达式为 $\mathbf{D} = e\mathbf{r}$, \mathbf{r} 为原子核外电子的位置; $\mathbf{E}(\mathbf{r}_0)$ 为偶极子在 \mathbf{r}_0 处的电场算符.

由(1)式可知, 原子与辐射场的耦合常量的大小取决于原子本身核外电子的位置 \mathbf{r} . 因此, 具有不同偶极矩的两个原子与双模腔场相互作用系统,

* 国家自然科学基金(批准号 60667001)资助的课题.

† E-mail: hgpiao@hhit.edu.cn

在旋波近似下的哈密顿量可写为(令 $\hbar = 1$)

$$H = \sum_{i=1}^2 (\omega_i a_i^\dagger a_i + \omega_\alpha S_i^z) + \sum_{i=1}^2 g_i (S_i^+ a_1 a_2 + a_1^\dagger a_2^\dagger S_i^-), \quad (2)$$

式中 a_i^\dagger 和 a_i ($i=1, 2$) 分别为第 i 个腔场光子的产生和湮没算符; S_i^z 和 S_i^\pm 分别为第 i 个原子的反转和跃迁算符; g_i ($i=1, 2$) 分别为第 i 个原子与双模腔场的耦合系数. ω_i ($i=1, 2$) 为第 i 个腔场光子的频率, ω_α 为原子的跃迁频率.

在共振条件下 $\omega_\alpha = \omega_1 + \omega_2$, 系统的相互作用哈密顿可以写成

$$H_I = \sum_{i=1}^2 g_i (S_i^+ a_1 a_2 + a_1^\dagger a_2^\dagger S_i^-). \quad (3)$$

若初始时刻两原子都处于激发态而双模腔场分别处于相干态, 则系统的初始态矢为

$$|\Psi(0)\rangle = \sum_{mn} P_{mn} |m, n\rangle \otimes |++\rangle. \quad (4)$$

这里 $P_{mn} = e^{-\left(\frac{\bar{n}_1}{2} + \frac{\bar{n}_2}{2}\right)} \frac{\bar{n}_1^{\frac{m}{2}} \bar{n}_2^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{m! n!}}$ 表示双模腔场处在粒子数态 $|m, n\rangle$ 的概率幅, 它满足归一化条件 $\sum_{mn} |P_{mn}|^2 = 1$, \bar{n}_i ($i=1, 2$) 为第 i 个相干态腔场的平均光子数.

在给定的初始条件下, 利用 Schrödinger 方程可解得系统的任意时刻 t 的态矢

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{mn} [A(t)|++, m, n\rangle + B(t)|+-, m+1, n+1\rangle + C(t)|-, +, m+1, n+1\rangle + D(t)|-, -, m+2, n+2\rangle], \quad (5)$$

式中

$$A(t) = \frac{P_{mn}}{4\Omega} e^{-\frac{\lambda^- + \lambda^+}{\sqrt{2}} t} \{ \mu [x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + x_4(t)] - (\alpha^2 - \beta^2) \{ g_1^2 + g_2^2 [x_1(t) - x_2(t) - x_3(t) + x_4(t)] \} \}, \quad (6)$$

$$B(t) = i \frac{P_{mn} \alpha g_2}{2\sqrt{2}\lambda - \lambda + \Omega} e^{-\frac{\lambda^- + \lambda^+}{\sqrt{2}} t} \{ \mu [x_1(t)\xi^- + x_2(t)\xi^+ - x_3(t)\xi^+ - x_4(t)\xi^-] - [(\alpha^2 + 3\beta^2)g_1^2 + (\alpha^2 - \beta^2)g_2^2 [x_1(t)\xi^- - x_2(t)\xi^+ + x_3(t)\xi^+ - x_4(t)\xi^-] \}, \quad (7)$$

$$C(t) = i \frac{P_{mn} \alpha g_1}{2\sqrt{2}\lambda - \lambda + \Omega} e^{-\frac{\lambda^- + \lambda^+}{\sqrt{2}} t} \{ \mu [x_1(t)\xi^- + x_2(t)\xi^+ - x_3(t)\xi^+ - x_4(t)\xi^-] - [(\alpha^2 + 3\beta^2)g_2^2 + (\alpha^2 - \beta^2)g_1^2 [x_1(t)\xi^- - x_2(t)\xi^+ + x_3(t)\xi^+ - x_4(t)\xi^-] \}, \quad (8)$$

$$D(t) = \frac{P_{mn} \alpha \beta g_1 g_2}{\Omega} e^{-\frac{\lambda^- + \lambda^+}{\sqrt{2}} t} \left(-e^{\frac{\lambda^-}{\sqrt{2}} t} + e^{\frac{\lambda^+}{\sqrt{2}} t} + e^{\frac{2\lambda^- + \lambda^+}{\sqrt{2}} t} - e^{\frac{\lambda^- + 2\lambda^+}{\sqrt{2}} t} \right), \quad (9)$$

$$x_1(t) = e^{\frac{\xi^-}{\sqrt{2}} t}, x_2(t) = e^{\frac{\xi^+}{\sqrt{2}} t}, x_3(t) = e^{\frac{2\xi^- + \xi^+}{\sqrt{2}} t}, x_4(t) = e^{\frac{\xi^- + 2\xi^+}{\sqrt{2}} t}, \quad (10)$$

$$\Omega = \sqrt{-4\alpha^2 \beta^2 (g_1^2 - g_2^2)^2 + (\alpha^2 + \beta^2) \{ g_1^2 + g_2^2 \}^2}, \quad (11)$$

$$\xi^+ = \sqrt{\mu - (\alpha^2 + \beta^2) \{ g_1^2 + g_2^2 \}}, \quad (12)$$

$$\xi^- = \sqrt{-\mu - (\alpha^2 + \beta^2) \{ g_1^2 + g_2^2 \}}, \quad (13)$$

$$\mu = \sqrt{(\alpha^2 - \beta^2) \{ (g_1^4 + g_2^4) + 2\alpha^4 + 6\alpha^2 \beta^2 + \beta^4 \} g_1^2 g_2^2}, \quad (14)$$

$$\lambda^+ = \sqrt{\Omega - (\alpha^2 + \beta^2) \{ g_1^2 + g_2^2 \}}, \quad (15)$$

$$\lambda^- = \sqrt{-\Omega - (\alpha^2 + \beta^2) \{ g_1^2 + g_2^2 \}}, \quad (16)$$

$$\alpha = \sqrt{(m+1) \{ n+1 \}}, \quad \beta = \sqrt{(m+1) \{ n+2 \}}. \quad (17)$$

3. 原子能级布居的时间演化规律

在量子电动力学实验中,最感兴趣的物理量是原子能级的布居数反转 $S_z(t)$,它是原子处在激发态和基态的概率之差,是原子与腔场相互作用系统中反映原子动力学行为特性的重要物理量之一.

在双原子系统中,原子能级的布居数反转表为

$$S_z = \frac{1}{2} \sum_{mm} [|A(t)|^2 - |D(t)|^2]. \quad (18)$$

不难看出,(18)式是很难精确求和的.因此,我们只能借助数值计算来展现原子能级布居数反转的时间演化.为了简单起见,这里腔场的平均光子数 \bar{n} 分别取 5 20 40,光子数 n 取到 60.这样取已经足够精确,因为当 $\bar{n} = 40$ 时,在初始腔场中光子数多于 60 的情况出现的概率只占 0.002.而 \bar{n} 取 20 和 5 时,光子数多于 60 的情况出现的概率更小.所以,可以把初始时刻双模腔场所处的相干态近似地改写成

$$|\alpha\rangle \approx \sum_{m,n=0}^{60} P_{mn} |m,n\rangle. \quad (19)$$

下面我们讨论两个原子与双模腔场的相对耦合常数 $R = g_1/g_2$ 和腔场的初态对原子能级布居数反转的影响.

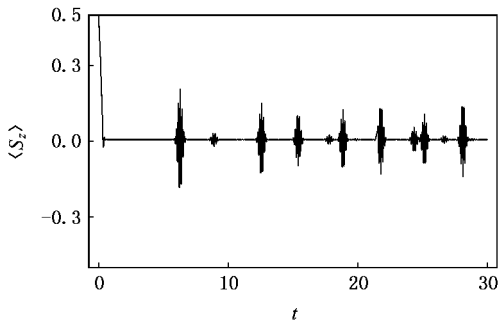


图1 $\bar{n}_1 = 20, \bar{n}_2 = 20, R = 1$ 时, S_z 的时间演化

当双模腔场处于相同的相干态($\bar{n}_1 = \bar{n}_2$)时,若两个原子与双模腔场的耦合常数相同($R = 1$) (见图1), S_z 的时间演化过程中出现明显的崩塌与回复现象,而且通过简单的数值计算可发现 S_z 在时间演化过程中出现两种系列的崩塌与回复现象(或见文献[29]),并且两种系列的崩塌与回复的振荡幅度在不断地互相交换,如第一系列的第一次崩塌与回复的振荡幅度和第二系列的第一次崩塌与回复

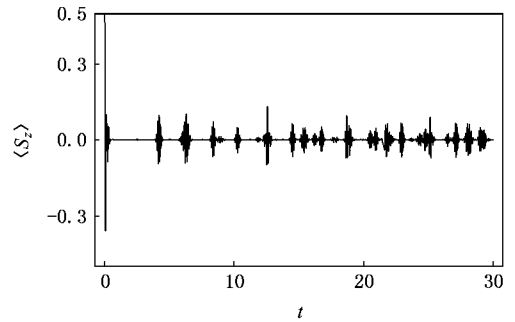


图2 $\bar{n}_1 = 20, \bar{n}_2 = 20, R = \frac{2}{3}$ 时, S_z 的时间演化

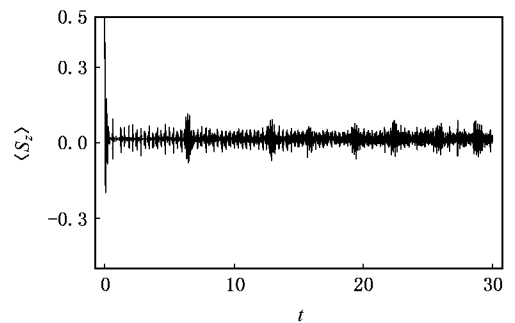


图3 $\bar{n}_1 = 20, \bar{n}_2 = 20, R = \frac{1}{10}$ 时, S_z 的时间演化

的振荡幅度的差值很大,到两种系列崩塌与回复的第二次振荡时,第一系列崩塌与回复的第二次振荡幅度明显减小,而第二系列崩塌与回复的第二次振荡幅度明显增大.到第三次振荡时,第二系列崩塌与回复的振荡幅度大于第一系列崩塌与回复的振荡幅度.这表明双原子-双模腔场-双光子跃迁系统中两原子是各自与双模光场作用的,但两原子都进行双光子跃迁,因此一个原子的能级跃迁会影响到另一个原子的能级跃迁概率.而且随着时间的演化,两种系列崩塌与回复出现的周期逐渐缩短,致使两种系列崩塌与回复互相干扰而破坏崩塌与回复现象.若两个原子与双模腔场的耦合常数不同($R \neq 1$) (见图2,3),随着相对耦合系数的减小(两种耦合系数差越大),不仅两种系列崩塌与回复出现的周期逐渐缩短,最终 S_z 的崩塌与回复现象将消失.由图3可知,两种系列崩塌与回复有同步叠加现象,因此 S_z 在时间演化过程中会出现幅度较大的振荡.

当双模腔场中一模处于真空态另一模处于相干态时,若两个原子与双模腔场的耦合常数相同($R = 1$) (见图4), S_z 在时间演化过程中出现新的崩

塌与回复现象, 也出现两种系列的崩塌与回复现象. 由图可以看出, 两种系列崩塌与回复的第一次振荡幅度依然差值很大. 由于一模式是真空场两原子更多受到相干场的影响, 真空场只起到干扰相干场作用. 若两个原子与双模腔场的耦合常数不同 ($R \neq 1$) (见图 5, 6), 随着 R 的减小相干场在双原子-双模腔场相互作用中逐步占据主导, 因此相似于耦合双原子-单模腔场相互作用时的 S_z 的时间演化规律. 但由于真空场的影响崩塌周期增加, 其回复后的崩塌也变得不再是高斯型 (见图 6). 而且 S_z 的曲线整体向上平移, 这是因为随着 R 的减小双原子感受到的腔场强度增大, 所以原子从基态跃迁到激发态的概率就增大.

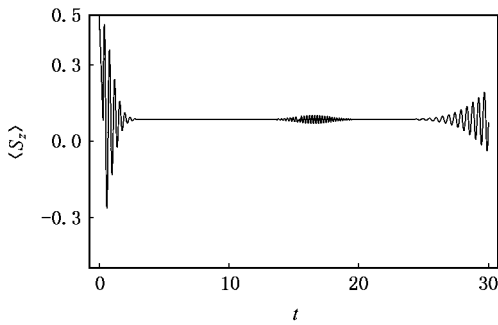


图 4 $\bar{n}_1 = 0, \bar{n}_2 = 40, R = 1$ 时, S_z 的时间演化

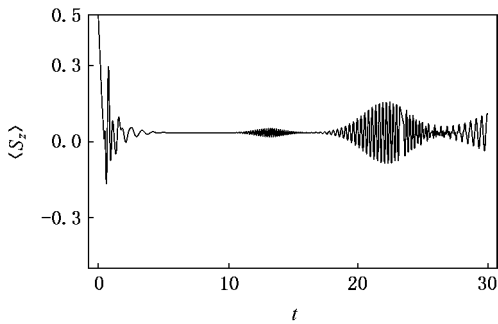


图 5 $\bar{n}_1 = 0, \bar{n}_2 = 40, R = \frac{2}{3}$ 时, S_z 的时间演化

当两模腔场处于不同强度的相干态时 ($\bar{n}_1 = 5, \bar{n}_2 = 40$), 若两个原子与双模腔场的耦合常数相同 ($R = 1$) (见图 7), S_z 的时间演化过程中出现又一个新的崩塌与回复现象. 由图可以看出, 崩塌与回复的振荡幅度随着时间的演化出现有规律的变化, 而且崩塌与回复的出现周期也在缩短. 若两个原子与双模腔场的耦合常数不同 ($R \neq 1$) (见图 8, 9), 随着 R 的减小, 崩塌与回复出现的周期缩小, 而且振荡

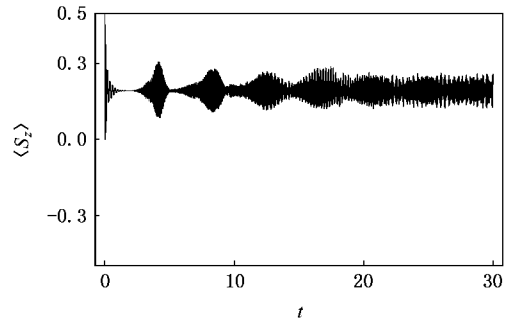


图 6 $\bar{n}_1 = 0, \bar{n}_2 = 40, R = \frac{1}{10}$ 时, S_z 的时间演化

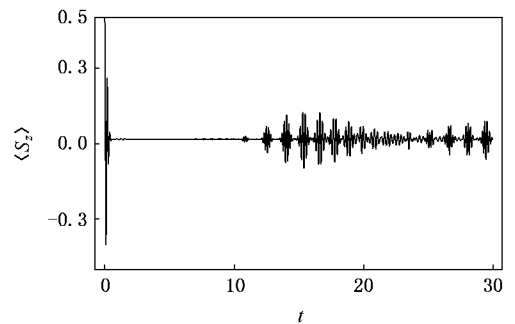


图 7 $\bar{n}_1 = 5, \bar{n}_2 = 40, R = 1$ 时, S_z 的时间演化

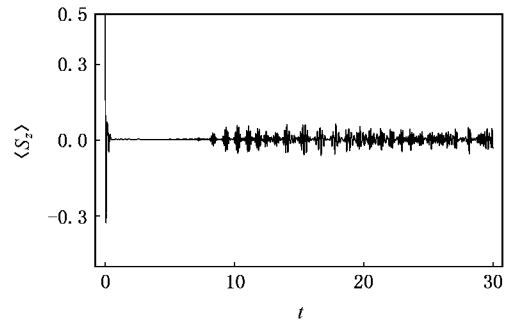


图 8 $\bar{n}_1 = 5, \bar{n}_2 = 40, R = \frac{2}{3}$ 时, S_z 的时间演化

幅度也在减小, 最终其崩塌与回复现象将消失.

4. 结 论

我们利用数值近似计算方法, 研究了具有不同耦合常数的两个原子与双模腔场相互作用模型中原子能级布居数反转的时间演化规律. 其计算结果表明: 原子能级布居数反转在时间演化过程中出现两种系列的崩塌与回复现象, 当初始腔场处于 $\bar{n}_1 = 0, \bar{n}_2 = 40$ 时, 其原子能级布居数的崩塌与回复规

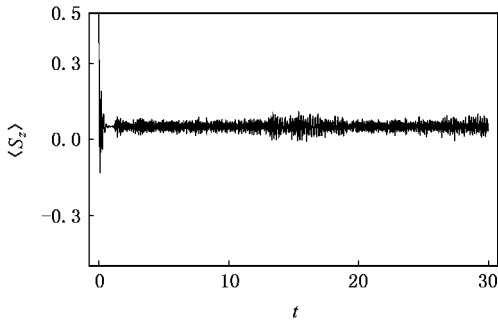


图9 $\bar{n}_1 = 5, \bar{n}_2 = 40, R = \frac{1}{10}$ 时, S_z 的时间演化

律与耦合双原子与单模光场相互作用系统有些相似^[29]. 但在不同的初始腔场条件下呈现不同的崩塌与回复规律. 随着时间的演化两种系列崩塌与回复出现的周期逐渐缩短. 不仅如此, 在两个原子与双模腔场的相对耦合常数 ($0 < R \leq 1$) 改变时, 两种系列崩塌与回复出现的周期也在改变, R 越小崩塌与

回复出现的周期也会缩短, 最终其崩塌与回复现象将消失. 当 $g_1 = g_2$ 时出现两种系列崩塌与回复最长的周期, 而且由图 10 可以看出, 随着两个原子与双模腔场的相对耦合常数的减小 ($1/R$ 的增加), 原子能级布居数反转的随时间演化曲线整体有向上平移的趋势.

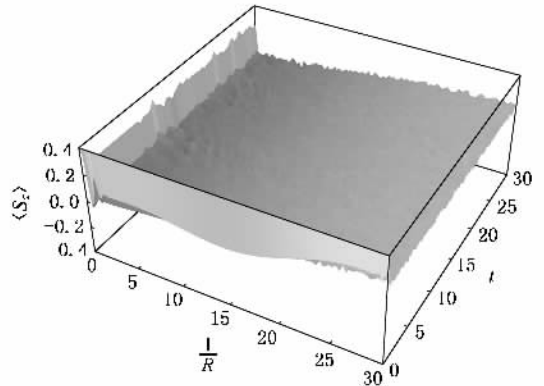


图10 $\bar{n}_1 = 5, \bar{n}_2 = 20$ 时, S_z 随 $\frac{1}{R}$ 的时间演化

- [1] Jaynes E T, Cummings F W 1963 *Proc. IEEE* **51** 89
- [2] Crisp M D 1991 *Phys. Rev.* **43A** 2430
- [3] Gerry C C, Moyer P J 1988 *Phys. Rev.* **38A** 5554
- [4] Kien F L, Kozirowski M, Quang T 1988 *Phys. Rev.* **38A** 263
- [5] Zhou P, Peng J S 1992 *Chin. Phys. Lett.* **9** 13
- [6] Liu X J 1995 *Chinese Science Bulletin* **40** 1374 (in Chinese) [刘夏姬 1995 科学通报 **40** 1374]
- [7] Lu H, Peng J S, Li G X 1995 *Acta Phys. Sin.* **44** 708 (in Chinese) [路 洪、彭金生、李高翔 1995 物理学报 **44** 708]
- [8] Zhu S Y, Li X S 1987 *Phys. Rev.* **A36** 3889
- [9] Li G X, Peng J S, Zhou P 1993 *Acta Optica Sinica* **13** 902 [李高翔、彭金生、周 鹏 1993 光学学报 **13** 902]
- [10] Li F L, Li X S, Lin D L *et al* 1989 *Phys. Rev.* **A40** 5129
- [11] Zhu A D, Zhang S, Zhao Y F 2005 *Chinese Physics* **14** 1152
- [12] Buck B, Sukumar C V 1981 *Phys. Lett.* **81A** 132
- [13] Agarwal G S, Puri R R 1989 *Phys. Rev. A* **39** 2969
- [14] Wang X G 1995 *Acta Quantum Electr. Sin.* **12** 320 (in Chinese) [王晓光 1995 量子电子学报 **12** 320]
- [15] Law C K, Eberly J H 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 1055
- [16] Wang X G, Yu R J, Yu H 1998 *Acta Photonica Sinica* **27** 304 (in Chinese) [王晓光、于荣金、于 华 1998 光子学报 **27** 304]
- [17] Piao H G, Zhang S 2005 *Journal of Atomic and Molecular Physics* **22** 21
- [18] Ma X P, Piao H G, Zhang S 2005 *Journal of Atomic and Molecular Physics* **22** 110 (in Chinese) [马晓萍、朴红光、张 寿 2005 原子与分子物理学报 **22** 110]
- [19] Yang X X, Wu Y, Gao K L 1998 *Acta Optica Sinica* **18** 1050 (in Chinese) [杨晓雪、吴 颖、高克林 1998 光学学报 **18** 1050]
- [20] Wang X G, Yu R J 1998 *Acta Optica Sinica* **18** 1160 (in Chinese) [王晓光、于荣金 1998 光学学报 **18** 1160]
- [21] Tavis M, Cummings F W 1968 *Phys. Rev.* **170** 379
- [22] Luo Z F, Xu Z Z, Xu L 1992 *Acta Phys. Sin.* **41** 1950 (in Chinese) [罗振飞、徐至展、徐 磊 1992 物理学报 **41** 1950]
- [23] Huang C J, Wen L 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1978 (in Chinese) [黄春佳、文 立 2002 物理学报 **51** 1978]
- [24] Feng J, Song T Q, Wang W Z, Xu J Z 1994 *Acta Phys. Sin.* **43** 1966 (in Chinese) [冯 健、宋同强、王文正、许敬之 1994 物理学报 **43** 1966]
- [25] Zhang J Y, Yang Z Y 1995 *Acta Sinica Quantum Optica* **1** 75 (in Chinese) [张纪岳、杨志勇 1995 量子光学学报 **1** 75]
- [26] Zhang D Y 1995 *Acta Optica Sinica* **15** 192 (in Chinese) [张登玉 1995 光学学报 **15** 192]
- [27] Feng J, Song T Q, Wang W Z, Xu J Z 1996 *Acta Photonica Sinica* **25** 689 (in Chinese) [冯健、宋同强、王文正、许敬之 1996 光子学报 **25** 689]
- [28] Zhang G M, Li R K, Gao Y F 2005 *Acta Optica Sinica* **34** 1117 (in Chinese) [张桂明、李悦科、高云峰 2005 光学学报 **34** 1117]
- [29] Peng J S, Li G X 1996 *Modern Quantum Optics Introduction* (Beijing: Science Press) p432 (in Chinese) [彭金生、李高翔 1996 近代量子光学导论 (北京: 科学出版社) 第 432 页]

Modeling the evolution of atomic population of two different atoms interacting in two-mode cavity field^{*}

Piao Hong-Guang^{1)†} Ma Xiao-Ping¹⁾ Zhang Shou²⁾

¹⁾ *Department of Mathematics and Physics, Huaihai Institute of Technology, Lianyungang 222005, China*

²⁾ *Department of Physics, College of Science, Yanbian University, Yanji 133002, China*

(Received 10 November 2006 ; revised manuscript received 28 December 2006)

Abstract

The evolution of atomic population in the model of two different atoms interacting with two-mode field are investigated. The effect of the relative coupling constant ($R = g_1/g_2$) and initial two-mode cavity field on the inversion of atomic population are discussed.

Keywords : two-mode cavity field , two-atoms system , atomic population

PACC : 4250

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No.60667001)

[†] E-mail : hgpiao@hhit.edu.cn