

高斯变迹布拉格光纤光栅中的调制不稳定性*

贾维国† 史培明 杨性愉 张俊萍 樊国梁

(内蒙古大学物理系, 呼和浩特 010021)

(2006 年 12 月 1 日收到, 2006 年 12 月 27 日收到修改稿)

利用激光脉冲在光纤光栅中传播时所遵守的相干耦合非线性薛定谔方程, 研究了激光脉冲在高斯变迹布拉格光纤光栅中传输时, 在反常色散区和正常色散区所产生的调制不稳定性. 结果表明在反常色散区和正常色散区都能产生调制不稳定性, 在反常色散区, 当输入功率达到一定数值时, 产生明显的有规律的增益谱; 在正常色散区, 在产生调制不稳定性功率区域, 调制不稳定性存在并从给定值一直持续到无穷; 并且, 在反常色散区和在正常色散区, 增益谱都受到高斯变迹函数的制约.

关键词: 高斯变迹, 布拉格光栅, 调制不稳定性, 增益

PACC: 4281, 4230L, 4281W

1. 引 言

当一光脉冲在非线形介质中传输时, 由于非线性和色散的相互作用产生调制不稳定性. 在弱的噪声和其他一些小的微扰存在下, 由于振幅和相位的调制, 连续波最终被分裂成高重复率的超短脉冲, 从而产生光孤子^[1, 2]. 在光纤布拉格光栅中, 实验也观察到了由于调制不稳定性入射光脉冲最终被分裂成高重复率的超短脉冲^[3, 4]. 当输入一光脉冲, 当输入光波脉冲的频率位于布拉格频率附近时, 由结构(XPM)色散造成的群速度色散和由自相为调制(SPM)交叉相位调制(XPM)引起的非线性效应的相互作用可导致光纤光栅中布拉格孤子的形成, 输出为布拉格孤子, 当在弱的微扰存在下, 产生调制不稳定性^[5], 入射光脉冲最终被分裂成高重复率的超短脉冲. 变迹光纤光栅就是使光纤光栅中的折射率沿轴向呈现一个类似钟形函数的形状变化^[6, 7], 它可以改善光纤光栅的反射谱、时延特性和色散特性等. 同样由于前向波和后向波, 并通过非线性效应的相互作用产生交叉相位调制, 产生调制不稳定性. 不同的变迹函数、不同的输入功率、不同的带宽位值具有不同的不稳定性, 调制不稳定性不仅在反常色散区而且在正常色散区产生. 我们利用激光脉冲在光纤

布拉格光栅中所遵循的相干耦合薛定谔方程^[8-10], 讨论了高斯变迹布拉格光纤光栅中的调制不稳定性. 这种调制不稳定性对应不同的输入功率、不同的带宽位值有不同增益谱.

2. 理 论

激光脉冲在布拉格光纤光栅中传输时所遵循的耦合薛定谔方程为

$$i \frac{\partial E_+}{\partial t} + i \frac{\partial E_+}{\partial z} + \kappa E_- + \chi (|E_+|^2 + 2|E_-|^2) E_+ = 0, \quad (1a)$$

$$i \frac{\partial E_-}{\partial t} - i \frac{\partial E_-}{\partial z} + \kappa E_+ + \chi (|E_-|^2 + 2|E_+|^2) E_- = 0, \quad (1b)$$

式中 E_+ , E_- 为在光纤光栅中传输的前向波和后向波, γ 为非线性系数: $\gamma = \frac{4\pi n}{\lambda Z} n_2$ 或 $\gamma = \frac{n_2 \omega}{cA}$. A_i 为有效截面, Z 为真空阻抗, n_2 为非线性折射率系数, n 为光栅中平均折射率, $\lambda(\omega)$ 为光脉冲波长(频率). κ 耦合系数, 对于不同的变迹函数其耦合系数不同.

方程(1)的稳态解为

$$E_+ = a_+ \exp(i K z), \quad (2a)$$

$$E_- = a_- \exp(i K z), \quad (2b)$$

* 国家自然科学基金(批准号 60468001)资助的课题.

† E-mail: weiguoja@mail.china.com

其中 a_+ , a_- 为不随光纤长度变化的常数. 总能量为

$P_0 = a_+^2 + a_-^2$, 引入参数 $f = \frac{a_-}{a_+}$ 用来描述总能量在

前向波和后向波的分配情况, 则 $a_+ = \sqrt{\frac{P_0}{1+f^2}}$,

$a_- = \sqrt{\frac{P_0}{1+f^2}}f$. 根据光纤布拉格光栅中的色散关

系^[1], f 可以取正负值, 当 $f < 0$ 时对应于反常色散区, $f > 0$ 时对应于正常色散区; $|f| > 1$ 以后向波为主, $|f| < 1$ 以前向波为主. 对(1a)式连续波解引入一阶微扰项 u 和 v 有

$$\begin{aligned} E_+ &= (a_+ + u) \exp(iKz), \\ E_- &= (a_- + v) \exp(iKz). \end{aligned} \quad (3)$$

将(3)式代入(1)式, 并且线性化得到有关 u 和 v 的方程

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + i \frac{\partial u}{\partial z} + \kappa v - \kappa f u + G(u + u^*) + 2f(v + v^*) = 0, \quad (4a)$$

$$i \frac{\partial v}{\partial t} + i \frac{\partial v}{\partial z} + \kappa u - \kappa f^{-1} v + G(f^2(v + v^*) + 2(u + u^*)) = 0. \quad (4b)$$

设

$$u = u_s \exp[i(\Omega t - qz)] + u_a \exp[i(-\Omega t + qz)], \quad (5a)$$

$$v = v_s \exp[i(\Omega t - qz)] + v_a \exp[i(-\Omega t + qz)], \quad (5b)$$

将(5)式代入(4)式, 得到有关 u_s, u_a, v_s, v_a 的线性方程, 我们可以得到如下色散关系:

$$\begin{aligned} (\Omega^2 - q^2)^2 - 2\kappa^2(\Omega^2 - q^2) - \kappa^2 f^2(\Omega + q)^2 \\ - \kappa^2 f^{-2}(\Omega - q)^2 + 4\kappa G(3q^2 - \Omega^2) = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

式中 Ω 和 q 是由于频率(波数)偏离了布拉格频率(波数), 并且因为交叉相位调制等耦合和微扰因数引起的附加频率(波数), 它应为一小量, 叠加在原频率(波数)之上, q 为 Ω 的函数, 并且

$$G = \frac{\gamma P_0}{1+f^2}. \quad (7)$$

从方程(6)可以看出, 对于给定参量 f 和输入功率 P_0 , Ω 和 q 的关系为四次方的多项式, 有四个根, 当所有的四个根为实数时, 其解是稳定的, 如果至少有两个根为复数, 并形成一对共轭复数, 那么解是不稳定的. 我们下面研究两种情况的不稳定性问题: 根据色散关系^[1], 当 $f = -1$ 时处于反常色散区, 对应于禁带之上能带底, 当 $f = 1$ 时处于正常色散区, 对应

于禁带之下能带顶.

2.1. 高斯变迹函数的引入

我们知道光纤光栅是通过改变光纤芯区折射率, 产生小的周期性调制而产生, 当用二束高斯紫外光束照射在紫外敏感的光纤芯区产生干涉, 其强度为

$$I(z) = I_0 \exp\left(-\left(\frac{z-L/2}{L}\right)^2\right) \times [1 + \cos(2k_0 z)], \quad (8)$$

由于这一光强度的分布导致与之成比例的折射率分布

$$n(z) = n_0 + \delta n \exp\left(-\left(\frac{z-L/2}{L}\right)^2\right) \times [1 + \cos(2k_0 z)], \quad (9)$$

这样的折射率分布光栅称为高斯变迹光纤光栅. 其中 n_0 为芯区的平均折射率, δn 为折射率的起伏(或微扰), L 为高斯光束的宽度(即光栅长度), k_0 为布拉格波数. 对于高斯变迹光纤光栅, 其耦合系数 κ 为

$$\kappa = \kappa_0 \exp\left(-\left(\frac{z-L/2}{L}\right)^2\right), \quad (10)$$

其中 $\kappa_0 = \delta n/2n_0$ 为常数, 对于均匀光纤光栅 $\kappa = \kappa_0$. 图1为耦合系数 κ 随传输距离的变化关系, 其中 $L = 5.0 \text{ cm}$, $\kappa_0 = \delta n/2n_0 = 5.0 \text{ cm}^{-1}$.

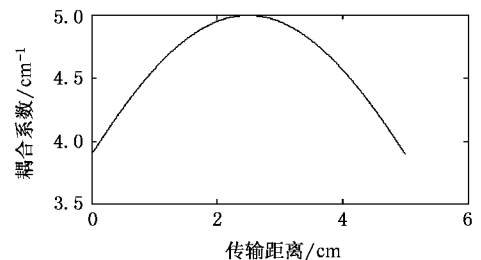


图1 耦合系数 κ 随传输距离的变化关系

2.2. 当 $f = -1$, 禁带之上能带底

当 $f = -1$ 时, $G = \frac{\gamma P_0}{2}$, 多项式(6)转化为 Ω^2 的二次方程

$$\begin{aligned} \Omega^2 &= q^2 + 2\kappa(\kappa - G) \\ &\pm 2\sqrt{\kappa^2(\kappa - G)^2 + \kappa q^2(\kappa + 2G)}. \end{aligned} \quad (11)$$

当 Ω 有复数根时调制不稳定性存在. 由

$$q^2 + 2\kappa(\kappa - G) - 2\sqrt{\kappa^2(\kappa - G)^2 + \kappa q^2(\kappa + 2G)} < 0 \quad (12)$$

即

$$q^2(q^2 - 12\kappa G) < 0,$$

解得

$$q = 0 \text{ 或 } -q_0 < q < q_0, \quad (13)$$

其中 $q_0 = \sqrt{12\kappa G}$, 所以当 $-q_0 < q < q_0$ 时, 调制不稳定性存在. 图2为 q_0 随传输距离 z 的变化关系,

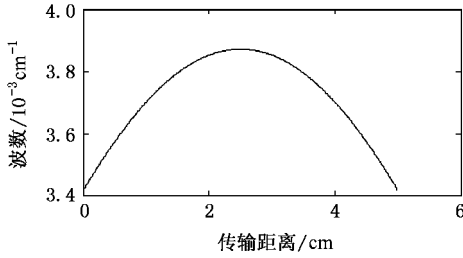


图2 q_0 随传输距离 z 的变化关系

其中 $L = 5.0 \text{ cm}$, $\kappa_0 = \delta n / 2n_0 = 5.0 \text{ cm}^{-1}$, $\gamma = 0.5 \text{ cm}^{-1} \text{ GW}^{-1}$, $P_0 = 1000 \text{ W}$. 对于光纤光栅, 由于非线性系数较小, 所以在整个高斯变迹变化范围内 q_0 的变化较小, 并且随输入功率 P_0 的变化也较小, 除非输入功率 P_0 很大. 定义 $g(q) = |\ln(\Omega)|$, $g(q)$ 代表波数 $K + q$ 对于原始波数 K 的偏移 q 后的扰动的增益. 当 q 满足(13)式时调制不稳定性存在, 对应的增益为

$$g(q) = q^2 + 2\kappa_0 \exp\left(-\left(\frac{z - L/2}{L}\right)^2\right) \times \left(\kappa_0 \exp\left(-\left(\frac{z - L/2}{L}\right)^2\right) - \frac{\gamma P_0}{2}\right) - 2\left[\left(\kappa_0 \exp\left(-\left(\frac{z - L/2}{L}\right)^2\right)\right)^2 \times \left(\kappa_0 \exp\left(-\left(\frac{z - L/2}{L}\right)^2\right) - \frac{\gamma P_0}{2}\right)^2 + \kappa_0 \exp\left(-\left(\frac{z - L/2}{L}\right)^2\right) q^2 \times \left(\kappa_0 \exp\left(-\left(\frac{z - L/2}{L}\right)^2\right) + \gamma P_0\right)\right]^{1/2}. \quad (14)$$

我们取 $L = 5 \text{ cm}$, $\kappa_0 = 5.0 \text{ cm}^{-1}$, $\gamma = 0.5 \text{ cm}^{-1} \text{ GW}^{-1}$, 从理论上讲对于任何输入功率都可以产生调制不稳定性. 如图3为在不同输入功率下, $Z = 2$ 时调制不稳定性增益谱. 从图可以看出, 当输入功率较小时 ($P_0 = 50 \text{ W}$), 在调制不稳定性区域内, 会产生许多小的尖峰脉冲串, 认为这是因为光纤光栅有较小非线性系数, 由于光纤光栅的性质(前向波和后向波的相互作用)和调制不稳定性共同作用的结果, 并且,

调制不稳定性不起主导作用. 随着输入功率的增大, 调制不稳定性开始起主导作用, 这时在调制不稳定性增益谱的背景下叠加有明显的小尖峰脉冲串, 当只有输入功率达到一定数值时, 才能产生明显的有规律的增益谱.

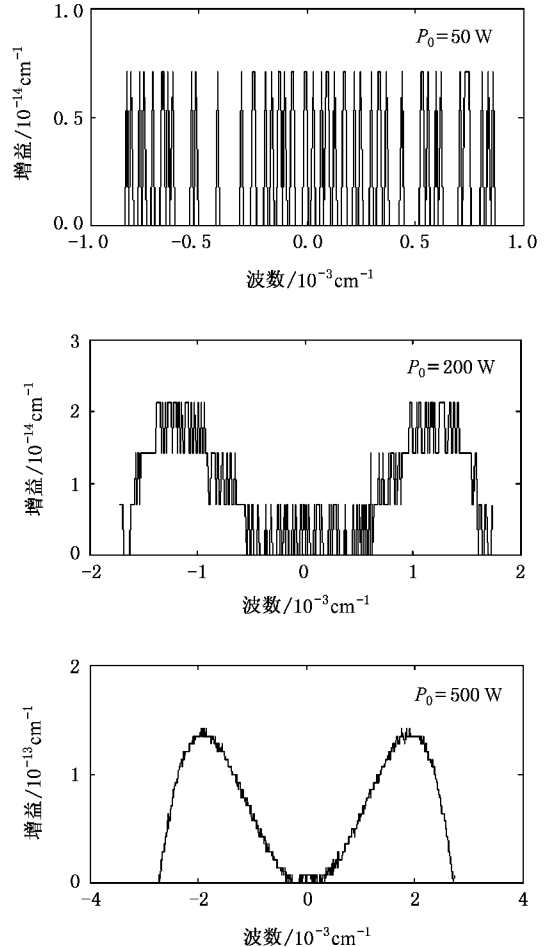


图3 当 $Z = 2$ 时, 在不同功率下调制不稳定性增益谱

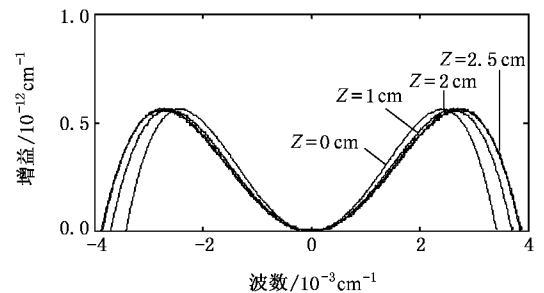


图4 $P_0 = 1000 \text{ W}$ 时, 调制不稳定性增益谱随传输距离的关系

图4为输入功率一定时, 调制不稳定性增益谱随传输距离的变化关系, 随着传输距离的增加, 增益

谱强度不变宽度增加,增益谱中心频率远离布拉格频率,当传输距离达到耦合系数 κ 的最大值时(即 $Z = L/2$)增益谱的宽度最大,以后随着传输距离的增加增益谱强度不变宽度减小,整个增益谱是以光纤光栅 $L/2$ 为对称.显然,调制不稳定性增益谱受到高斯变迹函数的限制.

图 5 为传输距离一定时,增益谱随输入功率的变化关系,显然,随着输入功率的增大,增益谱强度增强宽度加宽,增益谱中心频率远离布拉格频率.

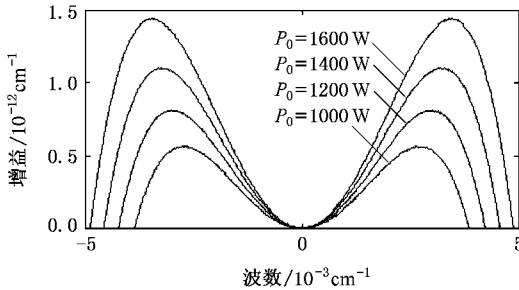


图 5 $Z = 2$ 时,调制不稳定性增益谱随输入功率的关系

2.3. 当 $f = 1$ 禁带之下能带顶

当 $f = 1$ 时, $G = \frac{\gamma P_0}{2}$, 同样多项式 (6) 转化为 Ω^2 的二次方程

$$\Omega^2 = q^2 + 2\kappa(\kappa + G) \pm 2\kappa \sqrt{(\kappa^2(\kappa + G)^2 + \kappa q^2(\kappa - 2G))}. \quad (15)$$

当 Ω 有复数根时调制不稳定性存在,由

$$\kappa^2(\kappa + G)^2 + \kappa q^2(\kappa - 2G) < 0, \quad (15a)$$

得

$$q^2 > \frac{\kappa(\kappa + G)^2}{2G - \kappa}. \quad (15b)$$

因为 $q^2 > 0$, 所以 $2G - \kappa > 0$, 即 $P_0 > \frac{\kappa}{\gamma}$ 时 (15) 式有

复数解. 所以当 $|q| > q_1 = (\kappa + G) \left(\frac{\kappa}{2G - \kappa} \right)^{\frac{1}{2}}$ 时, 调制不稳定性存在并一直持续到 $|q| \rightarrow \infty$.

图 6 为输入临界功率 P_0 随传输距离 Z 的关系, 相应的参数为 $L = 5 \text{ cm}$, $\kappa_0 = 5.0 \text{ cm}^{-1}$, $\gamma = 0.5 \text{ cm}^{-1} \text{ GW}^{-1}$, 呈现高斯函数的形式.

图 7 为输入功率 $P_0 = 10 \text{ GW}$ 时, q_1 随传输距离 Z 的关系, 参数同上, 显然由于受高斯变迹函数的约束也呈现出类似高斯函数的分布形式.

当 $|q| \rightarrow \infty$ 时

$$(\kappa^2(\kappa + G)^2 + \kappa q^2(\kappa - 2G))^{\frac{1}{2}} \cong q(\kappa(\kappa - 2G))^{\frac{1}{2}},$$

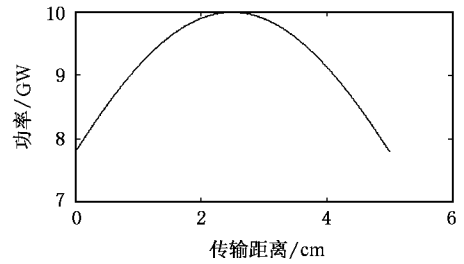


图 6 输入临界功率 P_0 随传输距离 Z 的关系

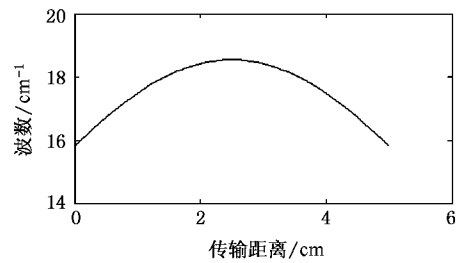


图 7 当输入功率 $P_0 = 10 \text{ GW}$ 时, q_1 随传输距离 Z 的关系

所以 (15) 式变为

$$\Omega^2 = q^2 + 2\kappa(\kappa + G) \pm 2q(\kappa(\kappa - 2G))^{\frac{1}{2}}, \quad (16a)$$

$$\Omega \cong \pm q \pm (\kappa(2G - \kappa))^{\frac{1}{2}}. \quad (16b)$$

所以 $P_0 > \frac{\kappa}{\gamma}$, 当 $|q| > q_1 =$

$(\kappa + \frac{\gamma P_0}{2}) \left(\frac{\kappa}{\gamma P_0 - \kappa} \right)^{\frac{1}{2}}$ 时, 对应的增益谱为

$$g(q) = (\kappa q^2(2G - \kappa) - \kappa^2(\kappa + G)^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (17a)$$

当 $|q| \rightarrow \infty$ 时, 对应的增益谱为

$$g(q) \cong (\kappa(2G - \kappa))^{\frac{1}{2}}, \quad (17b)$$

其中 $\kappa = \kappa_0 \exp\left(-\left(\frac{z - L/2}{L}\right)^2\right)$.

图 8 为输入功率一定时, 调制不稳定性增益谱随传输距离的变化关系. 根据对称性, 我们只作出了 $q > q_1$ 靠近 q_1 的部分, $q < -q_1$ 的部分没有作出. 从图可以看出, 随着传输距离的增加最初增益谱强度减弱直到高斯函数的极大值点, 然后随着传输距离的继续增加增益谱强度增强, 当 $Z = L$ 时, 其增益谱恢复到 $Z = 0$ 时的状态.

图 9 为传输距离一定时, 增益谱随输入功率的变化关系. 随着输入功率的增大增益谱强度增强, 产生调制不稳定性起始波数向布拉格波数趋近.

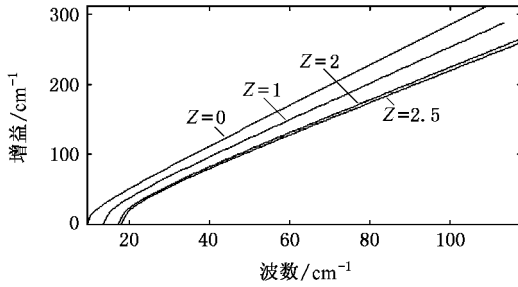


图 8 $P_0 = 12$ GW 时, 调制不稳定性增益谱随传输距离的关系

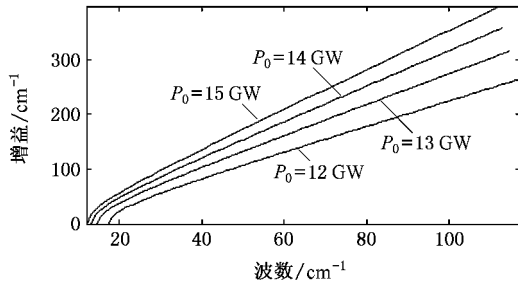


图 9 $Z = 2$ 时, 调制不稳定性增益谱随输入临界功率的关系

3. 结 论

在高斯变迹布拉格光纤光栅中在反常色散区和正常色散区都能产生调制不稳定性。

在反常色散区对于任何输入功率都可以产生调制不稳定性, 但因为光纤光栅有较小非线性系数, 由于光纤光栅的性质(前向波和后向波的相互作用)和调制不稳定性共同作用的结果, 当只有输入功率达到一定数值时, 才能产生明显的有规律的增益谱。整个增益谱是以光纤光栅 $L/2$ 为对称, 受到高斯变迹函数的限制。

在正常色散区, 当 $P_0 > \frac{\kappa}{\gamma}$, $q > (\kappa + G)$ $\times \left(\frac{\kappa}{2G - \kappa}\right)^{1/2}$ 或 $q < -(\kappa + G)\left(\frac{\kappa}{2G - \kappa}\right)^{1/2}$ 时, 调制不稳定性存在并一直持续到 $|q| \rightarrow \infty$; 同样整个增益谱受到高斯变迹函数的制约。

[1] Agrawal G P 2001 *Nonlinear Fiber Optics & Applications of nonlinear Fiber Optics*. third Edition. (Boston : Academic Press) 228—234 , 458—475

[2] Tai K , Hasegawa A , Tomita A 1986 *Phys. Rev. Lett.* **13** 135

[3] Eggleton B J , deSterke C M , Slusher R E *et al* 1996 *Electron. Lett.* **32** 2341

[4] Eggleton B J , Martijn de Sterke C , Aceves A B , *et al* 1998 *Opt. Commun.* **149** 267

[5] Martijn de Sterke C 1998 *J. Opt. Soc. Am. B* **15** 2660

[6] Winful C G , Zamir R , Feldman S 1991 *Appl. Phys. Lett.* **58** 1001

[7] Lee S , Khosravani R , Peng J *et al* 1999 *IEEE Photon. Technol. Lett.* **11** 982

[8] Martijn de Sterke C , Sipe J E 1994 *Prog. Opt.* **33** 203

[9] Jia W G , Yang X Y 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1054 (in Chinese [贾维国、杨性愉 2005 物理学报 **54** 1054])

[10] Jia W G , Shi P M , Yang X Y *et al* 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4575 (in Chinese [贾维国、史培明、杨性愉等 2006 物理学报 **55** 4575])

Modulation instability of fiber Bragg gratings with Gaussian apodization^{*}

Jia Wei-Guo[†] Shi Pei-Ming Yang Xing-Yu Zhang Jun-Ping Fan Guo-Liang

(Department of Physics , Inner Mongolia University , Hohhot 010021 , China)

(Received 1 December 2006 ; revised manuscript received 27 December 2006)

Abstract

The coherently coupled nonlinear Schrödinger (NLS) equation of the propagation of light pulse in fiber Bragg gratings has been utilized to study the modulation instability of laser pulses in fiber Bragg gratings with Gaussian apodization function , not only in the anomalous dispersion regime , but also in the normal dispersion regime . The results show that modulation instability can occur in both regimes . The regular gain spectra are observed obviously when input power reaches a definite value in the anomalous dispersion regime . The modulation instability can increase from a fixed value to infinity when the input power is in the region of modulation instability in normal dispersion regime . Furthermore , the gain spectra are restrained by Gaussian apodization function in both regimes .

Keywords : Gaussian apodization , fiber bragg gratings , modulation instability , gain

PACC : 4281 , 4230L , 4281W

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60468001).

[†] E-mail : weiguojia@mail.china.com